

Einführung in die Theoretische Physik I

1. Vektoren

Benötigen passendes math. Handwerkszeug zur Formulierung phys. Gesetze.

1D: Koordinate x
Bewegungsgl. $F = m \ddot{x}$

3D: Koordinatensystem, Wahl willkürlich.
Verlange Invarianz (Kovarianz) physikalischer
Gesetze unter Koordinatentransformationen.

Tensorrechnung:

Tensor 0. Stufe:	Skalar	0 Indizes,	a	
1. Stufe:	Vektor	1 Index	a_i	$(i = 1, 2, 3)$
2. Stufe:	Matrix	2 Indices	a_{ij}	$(i, j = 1, 2, 3)$

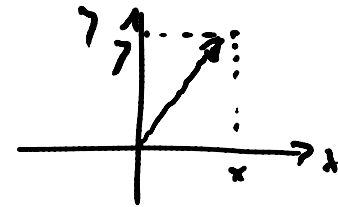
mathematische Struktur: linearer Raum

Vektor: Größe mit Betrag und Richtung

z.B. Zahlenpaar $(x, y) \rightarrow$ Punkt in Ebene $\rightarrow$ Pfeil

Schreibweise: $\vec{a} = (x, y)$

$$\text{Betrag } a = |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Drehung des Koordinatensystems um Winkel φ ($\vec{a}$ fest)

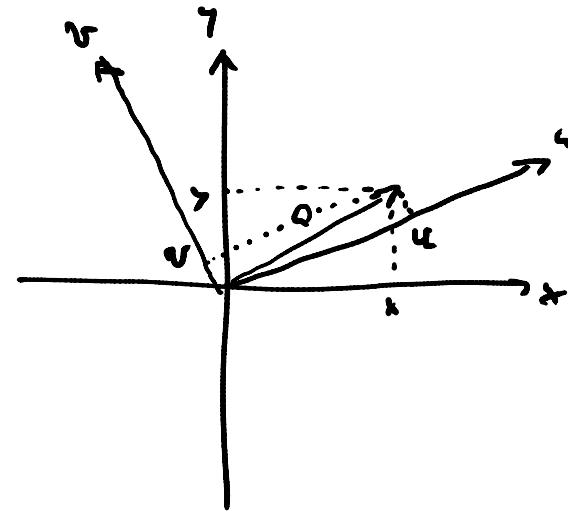
$$(x, y) \rightarrow (u, v)$$

$$u = x \cos \varphi + y \sin \varphi$$

$$v = -x \sin \varphi + y \cos \varphi$$

$$u^2 + v^2 = x^2 + y^2 \text{ invariant}$$

$\leadsto |\vec{a}|$ ist Skalar



3D: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

Skalar Vektor

1.1. Vektorrechnung

Betrachte Parallelverschiebungen im 3D Anschauungsraum.

$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$

Einheitsvektor $\hat{a}$: gleiche Richtung wie $\vec{a}$, Betrag $|\hat{a}| = 1$.

$$\hat{a} = \vec{a} / a \quad (a \neq 0)$$

$$\vec{a} = a \hat{a}$$

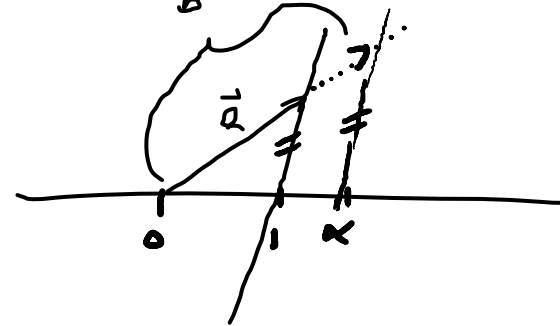
1.1.1. Rechnen mit Vektoren

- 1) Multiplikation eines Vektors mit Skalar
 → Streckung / Stauchung

$$\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a} = \alpha \vec{a}$$

$$|\vec{b}| = |\alpha| |\vec{a}|$$

Richtung wie $\vec{a}$ ($\alpha > 0$) oder entgegengesetzt ($\alpha < 0$)



Assoziativgesetz: $(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$

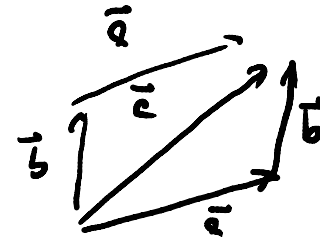
Spezialfälle: (1) $\alpha = 0$: $\vec{0} = 0 \cdot \vec{a}$ Nullvektor

(2) $\alpha = -1$: $\vec{b} = -\vec{a}$ Inverser Vektor

(3) $\alpha = 1/\alpha$ ($\alpha \neq 0$): $\hat{a} = \vec{a} / \alpha$ Einheitsvektor

2) Addition zweier Vektoren $\rightarrow$ Hintereinanderausführung

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$



Kommutativgesetz: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

Assoziativgesetz: $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

Distributivgesetz: $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$$

1.1.2 Abstraktion des Vektorbegriffs.

Betrachte allg. Menge aus Elementen $\vec{a}, \vec{b}, \dots$ mit Addition.

(G1) Assoziativgesetz: $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

(G2) Nullvektor $\vec{0}$: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

(G3) Inverser Vektor $-\vec{a}$: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

(G4) Kommutativgesetz: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

$\hookrightarrow$ kommutative (Abelsche) Gruppe oder Modul

Weiterhin Multiplikation mit Element aus Zahlkörper

$$(K1) \text{ Distributivgesetz: } \alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$$

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$$

$$(K2) \text{ Assoziativgesetz: } \alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$$

$$(K3) \text{ Einselement: } 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$$

Δ linearer Raum (Vektorraum, K -Modul)

k Vektoren $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k\}$ spannen durch Menge der Linearkombinationen

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_k \vec{x}_k = \sum_{j=1}^k \alpha_j \vec{x}_j$$

lineare Hülle auf.

Wenn $\sum_{j=1}^k \beta_j \vec{x}_j = \vec{0}$ für gewisse $\beta_j \in \mathbb{R}$, die nicht alle Null sind, dann $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k\}$ linear abhängig.

Sonst linear unabhängig.

Dimension des Vektorraums: Minimalzahl l.u. Vektoren, die
Vektorraum aufspannen.
↑
linear unabhängig

Basis: solche l.u. Menge

1.1.3 Skalarprodukt (inneres Produkt)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \varphi \quad \text{Skalar}$$

Eigenschaften:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad (\text{kommutativ})$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \quad (\text{distributiv})$$

$$\alpha (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\alpha \vec{b}) = \alpha \vec{a} \cdot \vec{b} \quad (\text{homogen})$$

Spezialfälle:

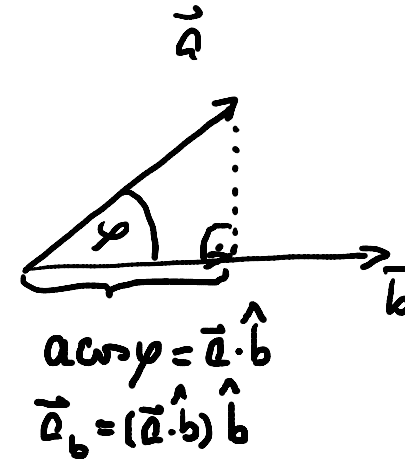
$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \text{ parallel } \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = ab$$

$$\vec{a} \text{ antiparallel } \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = -ab$$

$$\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$$

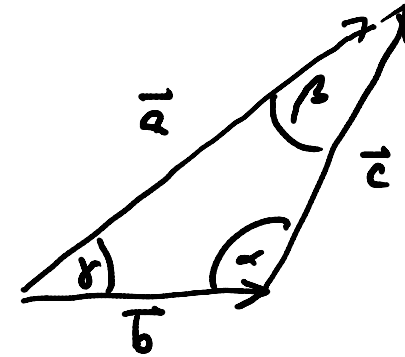
$$\vec{a} = \vec{0} \text{ oder } \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$



Projektion von $\vec{a}$ auf Richtung von $\vec{b}$: $\vec{a}_b = (\vec{a} \cdot \hat{b}) \hat{b}$

Beispiel für Anwendung:

Kosinus-Satz $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

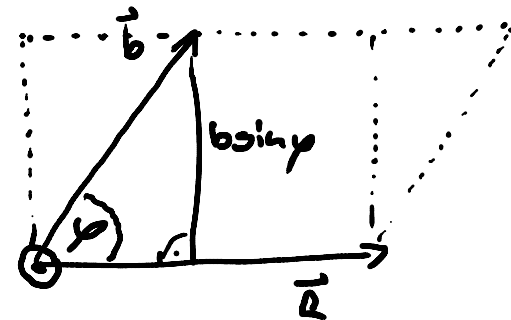


1.1.4 Vektorprodukt (Kreuzprodukt, äußeres Produkt)

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

Betrag:

$$c = \text{Fläche des aufgespannten Parallelogramms} \\ = a b |\sin \varphi|$$



Richtung: $\vec{c} \perp$ Parallelogramm
Orientierung gemäß Rechte-Hand-Regel

Eigenschaften des Vektorprodukts:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad (\text{antikommutativ})$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \quad (\text{distributiv})$$

$$\alpha(\vec{a} \times \vec{b}) = (\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha\vec{b}) = \alpha\vec{a} \times \vec{b} \quad (\text{homogen})$$

Spezialfälle:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = ab$$

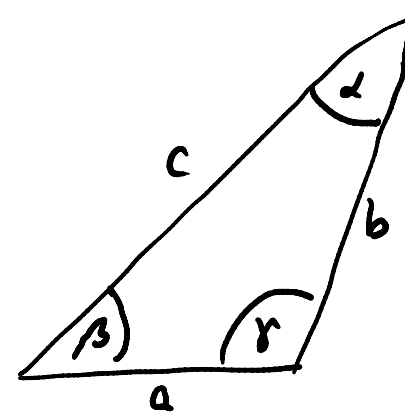
$$\vec{a} \text{ (ant)parallel } \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

$$\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

$$\vec{a} = \vec{0} \text{ oder } \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

Beispiel für Anwendung:

$$\text{Sinus-Satz} \quad \frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$



1.1.5 Komponentendarstellung

3D: Wähler drei paarweise senkrecht aufeinanderstehende Einheitsvektoren (Rechtssystem), d.h. kartesisches Koordinatensystem

$\hat{e}_1$: x-Richtung

$\hat{e}_2$: y-Richtung

$\hat{e}_3$: z-Richtung

$$\left. \begin{array}{l} \hat{e}_i^2 = 1 \\ \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = 0 \text{ wenn } i \neq j \end{array} \right\} \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$$

Kroneckersymbol $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{e}_3 \text{ und zyklisch}$$

total antisymmetrischer Tensor 3. Stufe:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & (i,j,k) = (1,2,3) \text{ und zyklisch} \\ -1, & (i,j,k) = (2,1,3) \text{ und zyklisch} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = -\varepsilon_{213} = -\varepsilon_{132} = -\varepsilon_{321} = 1$$

$$\varepsilon_{112} = \dots = \varepsilon_{111} = \dots = 0$$

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \hat{e}_k = \varepsilon_{ijk} \hat{e}_k$$

Einstein'sche Summenkonvention

$$\sum_{i=1}^3 a_i b_i = a_i b_i$$

$$A_{ij} B_{ik} = \sum_{i=1}^3 A_{ij} B_{ik}$$

$$A_{ij} B_{ij} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 A_{ij} B_{ij} = \sum_{ij=1}^3 A_{ij} B_{ij}$$

$$\vec{a} = a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 + a_3 \hat{e}_3 = \sum_{i=1}^3 a_i \hat{e}_i = a_i \hat{e}_i$$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad \text{Komponentenschreibweise}$$

$$\underline{a_i = \vec{a} \cdot \hat{e}_i = a_j \hat{e}_j \cdot \hat{e}_i = a_j \delta_{ji} = a_i} \quad \text{Komponenten herausprojizieren}$$

$$\alpha \vec{a} = \alpha a_i \hat{e}_i : \quad \alpha (a_1, a_2, a_3) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)$$

$$\vec{a} + \vec{b} = a_i \hat{e}_i + b_i \hat{e}_i = (a_i + b_i) \hat{e}_i : \quad (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i \hat{e}_i \cdot b_j \hat{e}_j = a_i b_j \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i :$$

$$(a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= a_i \hat{e}_i \times b_j \hat{e}_j = a_i b_j \hat{e}_i \times \hat{e}_j = a_i b_j \epsilon_{ijk} \hat{e}_k = \epsilon_{ijk} a_i b_j \hat{e}_k \\
&= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \hat{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \hat{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \hat{e}_3 \\
&= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \hat{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \hat{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \hat{e}_3 \\
&= \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Tafelanschrift:

unith.desy.de/research/pheno/lecture_notes/

1.1.6 Skalarprodukt

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \quad \text{Skalar}$$

Parallelepiped, Parallelogramm, Spat

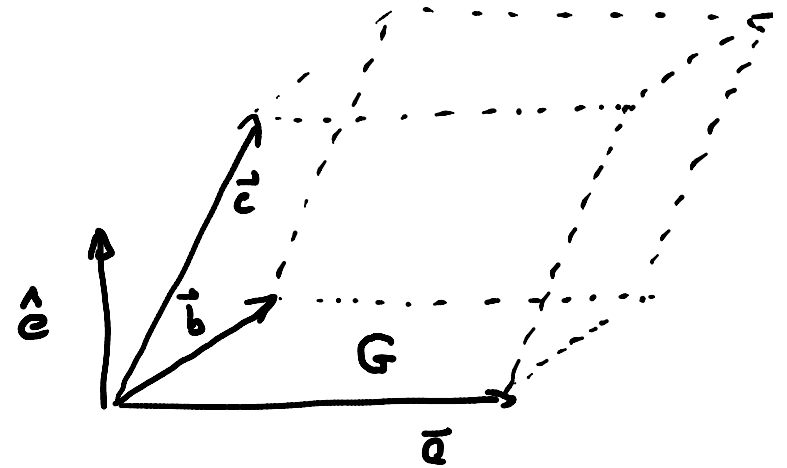
$$\vec{r} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}, \quad 0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1$$

$$\text{Grundfläche } G = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$\text{Höhe } h = |\hat{e} \cdot \vec{c}|$$

$$\text{Normaleneinheitsvektor } \hat{e} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$$

$$\text{Volumen } V = G \cdot h = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot \left| \frac{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} \right| = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$



$$\begin{aligned}
 (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \varepsilon_{ijk} a_i b_j \hat{e}_k \cdot c_\ell \hat{e}_\ell = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_\ell \underbrace{\hat{e}_k \cdot \hat{e}_\ell}_{=\delta_{k\ell}} \\
 &= \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k \\
 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 \\
 &\quad - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3
 \end{aligned}$$

$$\left[\text{NR: } c_\ell \delta_{k\ell} = \sum_{\ell=1}^3 c_\ell \delta_{k\ell} = c_1 \delta_{k1} + c_2 \delta_{k2} + c_3 \delta_{k3} = c_k \right]$$

$$\begin{aligned}
 (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} \\
 &= -(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} = -(\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b}
 \end{aligned}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ liegen in einer Ebene} \iff (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \iff \\
 \vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

1.1.7. Doppeltes Vektorprodukt

$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ Vektor

$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ nicht assoziativ

1. Gegenbeispiel genügt.

Wähle $\vec{a} = \vec{b} = \hat{e}_1$, $\vec{c} = \hat{e}_2$.

$$(\hat{e}_1 \times \hat{e}_1) \times \hat{e}_2 = \vec{0} \neq \hat{e}_1 \times (\hat{e}_1 \times \hat{e}_2) = \hat{e}_1 \times \hat{e}_3 = -\hat{e}_2$$

Entwicklungssatz: $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$

$$\begin{aligned} \text{Bew.: } (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} &= \varepsilon_{ijk} a_i b_j \hat{e}_k \times c_l \hat{e}_l = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_l \underbrace{\hat{e}_k \times \hat{e}_l}_{= \varepsilon_{klm} \hat{e}_m} \\ &= \underbrace{\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm}}_{= \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}} a_i b_j c_l \hat{e}_m = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) a_i b_j c_l \hat{e}_m \\ &= a_i b_j c_i \hat{e}_j - a_i b_j c_j \hat{e}_i = a_i c_i b_j \hat{e}_j - b_j c_j a_i \hat{e}_i = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a} \end{aligned}$$

Jakobiidentität $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0}$

Bew.: $\vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) + \vec{c}(\vec{b} \cdot \vec{a}) - \vec{b}(\vec{c} \cdot \vec{a}) + \vec{a}(\vec{c} \cdot \vec{b}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{0}$

unith.desy.de/research/pheno/lecture_notes/

1.2 Differentiation

Steigung der Sekante

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{Differenz-quotient}$$

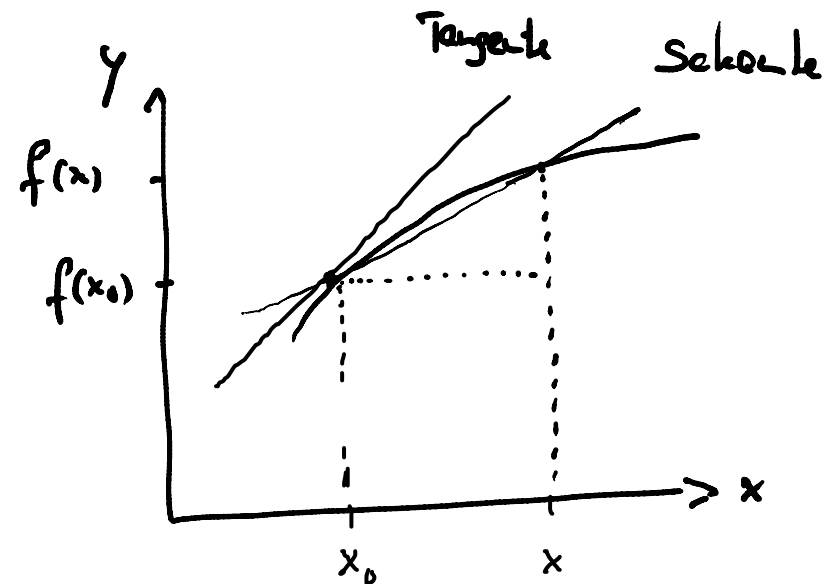
$\Delta x, \Delta f$ Inkrement

Grenzwert (wenn existent)

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \begin{array}{l} \text{Differentialquotient} \\ \text{(Ableitung)} \end{array}$$

dx, df Differential

mit Steigung der Tangente



Taylor-Entwicklung

lineare Approximation $f'(x_0) \approx \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$$\leadsto f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

quadratische Approximation

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

Taylor-Entwicklung

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (f^{(0)}(x) = f(x))$$

Beispiele: 1) $f(x) = e^x \leadsto f^{(n)}(x) = e^x \leadsto f^{(n)}(0) = 1$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots$$

Differential

$$f'(x) = \frac{df}{dx} \quad \leadsto \quad df = dx \cdot f'(x) \quad \text{Differential}$$

Anwendungen: Integraltransformation, Differentialgleichungen,
Fehlerrechnung

1.2.1 Differentiation von Vektorfunktionen

Betrachte Bahnkurve

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z} \hat{=} (x(t), y(t), z(t))$$

NB: Kartesische Einheitsvektoren $\hat{x} = \hat{e}_1, \hat{y} = \hat{e}_2, \hat{z} = \hat{e}_3$ hängen von nichts ab.

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) = [x(t + \Delta t) - x(t)]\hat{x} + \dots$$

$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \hat{x} + \dots$$

$$\xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{x} + \frac{dy}{dt}\hat{y} + \frac{dz}{dt}\hat{z} \hat{=} \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$$

komponentenweise ableiten

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \quad \text{Geschwindigkeitsvektor}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} \quad \text{Beschleunigungsvektor}$$

Rechenregeln:

$$\frac{d}{dt} (\vec{a} + \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} + \frac{d\vec{b}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{a} \times \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} (f \vec{a}) = \frac{df}{dt} \vec{a} + f \frac{d\vec{a}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} [\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})] = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{a} \cdot \left(\frac{d\vec{b}}{dt} \times \vec{c} \right) + \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \frac{d\vec{c}}{dt} \right) \quad (*)$$

$\times \qquad \qquad \times \qquad \qquad \times \qquad \qquad \times$

Beweis: $\frac{d}{dt} [\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})] = \frac{d}{dt} (\varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k)$

$$= \varepsilon_{ijk} (\dot{a}_i b_j c_k + a_i \dot{b}_j c_k + a_i b_j \dot{c}_k)$$

$$= \dot{\vec{a}} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{a} \cdot (\dot{\vec{b}} \times \vec{c}) + \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \dot{\vec{c}})$$

1.2.1. Partielle Ableitung

Betrachte Skalarfeld, z.B. Temperaturverteilung im Raum.

$$f = f(\vec{r}) = f(x, y, z)$$

Partielle Ableitung nach x :
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

analog
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y+\Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}, \dots$$

Schreibweisen:
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}, \dots$$

Höhere partielle Ableitung,

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Beispiel: $f(x, y) = 4x^5 + 2x^2y + 9xy^3$

$$f_x = 20x^4 + 4xy + 9y^3, \quad f_y = 2x^2 + 27xy^2$$

$$f_{xx} = 80x^3 + 4y, \quad f_{xy} = 4x + 27y^2$$

$$f_{yx} = 4x + 27y^2, \quad f_{yy} = 54xy$$

Satz von Schwarz: $f_{xy} = f_{yx}$, wenn diese partiellen Ableitungen existieren und stetig sind.

$$\frac{d}{dt} f(x(t)) = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt} \quad \text{Kettenregel}$$

Erweiterte Kettenregel: $f(t) = f(x(t), y(t), z(t))$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

$$\text{Zuweis: } \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \frac{f(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t), z(t+\Delta t)) - f(x(t), y(t), z(t))}{\Delta t}$$

$$= \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta t}$$

$$= \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y+\Delta y, z+\Delta z)}{\Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$+ \frac{f(x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y, z+\Delta z)}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$+ \frac{f(x, y, z+\Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z} \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

Grenzwert $\Delta t \rightarrow 0$: $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}$ ✓

Totales Differential: $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$

Näherungsformel: $\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z$

Beispiel: Berechne näherungsweise $f(0.1, 0.1, 0.1)$ für
 $f(x, y, z) = (1+z)e^{x+y^2}$

$$f(0, 0, 0) = 1, \quad \Delta f \approx 1 \cdot 0.1 + 0 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.1 = 0.2$$

$$\sim f(0.1, 0.1, 0.1) \approx 1.2$$

$$\approx 1.227 \dots$$

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) \approx f(x, y, z) + \Delta f \quad (\text{c.o.})$$

1.3 Krummlinige Koordinaten

Kartesische Koordinaten $\vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \hat{x}, \dots$$

$$d\vec{r} = \hat{x} dx + \hat{y} dy + \hat{z} dz = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} dz \quad \text{Linienelement}$$

Krummlinige Koordinaten u, v, w , nicht notwendig mit Dimension der Länge, z.B. Winkel.

$$\vec{r}(u, v, w) = x(u, v, w) \hat{x} + y(u, v, w) \hat{y} + z(u, v, w) \hat{z}$$

$$\text{Linienelement } d\vec{r} = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z} \hat{=} (dx, dy, dz)$$

$$= \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv + \frac{\partial x}{\partial w} dw \right) \hat{x} + \dots$$

$$= \left(\frac{\partial x}{\partial u} \hat{x} + \frac{\partial y}{\partial u} \hat{y} + \frac{\partial z}{\partial u} \hat{z} \right) du + \dots$$

$$= \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv + \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} dw$$

$$= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right| \hat{u} du + \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| \hat{v} dv + \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right| \hat{w} dw$$

$$= ds_u \hat{u} + ds_v \hat{v} + ds_w \hat{w}$$

Einheitsvektoren $\hat{u} = \frac{1}{b_u} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$, $b_u = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right|$, ...

Längenelemente $ds_u = b_u du$, ...

Wähle u, v, w so, dass $\hat{u} \cdot \hat{v} = \hat{v} \cdot \hat{w} = \hat{w} \cdot \hat{u} = 0$, $\hat{u} \times \hat{v} = \hat{w}$ et cycl.

Weglängenelement $dr = |d\vec{r}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$

$$= \sqrt{(ds_u)^2 + (ds_v)^2 + (ds_w)^2}$$

$$= \sqrt{b_u^2 (du)^2 + b_v^2 (dv)^2 + b_w^2 (dw)^2}$$

Bahnkurve $\vec{r} = \vec{r}(t)$

Weglänge $s = \int_{\vec{r}(t_1)}^{\vec{r}(t_2)} dr = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{dr}{dt} = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{b_u^2 \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + b_v^2 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + b_w^2 \left(\frac{dw}{dt}\right)^2}$$

Volumenelement: $dV = dx dy dz$
 $= ds_u ds_v ds_w = b_u b_v b_w du dv dw$

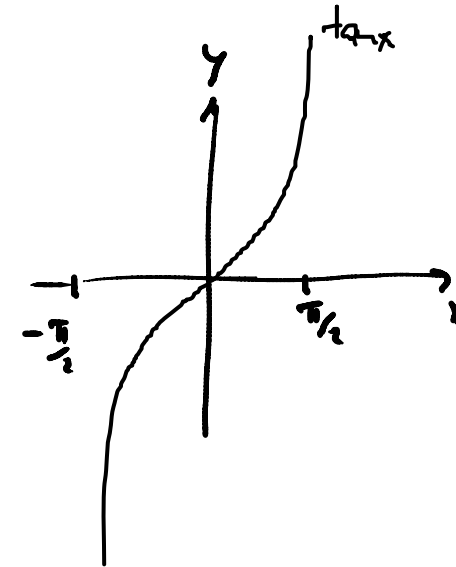
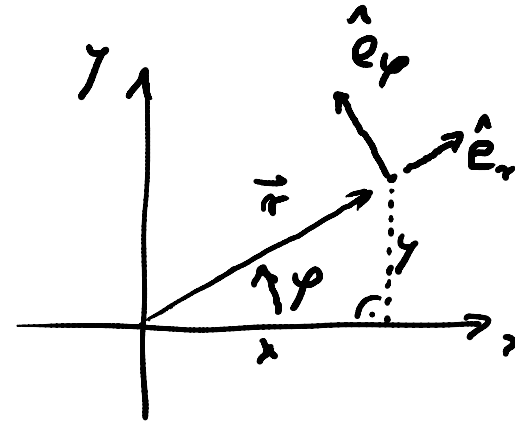
1.3.1 Ebene Polarkoordinaten

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad r \geq 0$$

$$\tan \varphi = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0) \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

$$\varphi = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2} \quad (x, y > 0) \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & \frac{\pi}{2} \leq \varphi < \frac{3}{2}\pi \quad (x < 0) \\ \arctan \frac{y}{x} + 2\pi, & \frac{3}{2}\pi \leq \varphi < 2\pi \quad (y < 0 < x) \end{cases}$$



Ortsvektor $\vec{r} = r \cos \varphi \hat{x} + r \sin \varphi \hat{y} = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = (\cos \varphi, \sin \varphi) \quad , \quad b_r = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right| = 1 \quad \wedge \quad \hat{e}_r = (\cos \varphi, \sin \varphi)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = (-r \sin \varphi, r \cos \varphi) \quad , \quad b_\varphi = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| = r \quad \wedge \quad \hat{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi)$$

$$\hat{e}_r^2 = \hat{e}_\varphi^2 = 1 \quad , \quad \hat{e}_r \cdot \hat{e}_\varphi = 0$$

Längenelemente

$$\begin{cases} ds_r = b_r dr = dr \\ ds_\varphi = b_\varphi d\varphi = r d\varphi \end{cases}$$

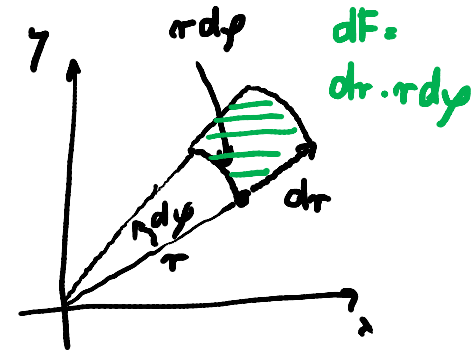
Linienelement

$$d\vec{r} = ds_r \hat{e}_r + ds_\varphi \hat{e}_\varphi$$

Flächenelement

$$\begin{aligned} dF &= dx dy \\ &= ds_r ds_\varphi = r dr d\varphi \end{aligned}$$

$$\vec{r} = r \hat{e}_r$$



Bahnkurve $\vec{r} = \vec{r}(t) = r(t) \hat{e}_r(t)$

$$\dot{\hat{e}}_r = \frac{d}{dt} \hat{e}_r = \underbrace{\frac{\partial \hat{e}_r}{\partial r}}_0 \frac{dr}{dt} + \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \hat{e}_\varphi \dot{\varphi}$$

Geschwindigkeit: $\vec{v} = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\hat{e}}_r = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi$
 $\equiv v_r \hat{e}_r + v_\varphi \hat{e}_\varphi$

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} & \text{Radialgeschwindigkeit} \\ v_\varphi = r \dot{\varphi} & \text{Winkelgeschwindigkeit} \end{cases}$$

$$\dot{\hat{e}}_\varphi = \frac{\partial \hat{e}_\varphi}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial \hat{e}_\varphi}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = -\dot{\varphi} \hat{e}_r$$

Beschleunigung: $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{r} \hat{e}_r + \dot{r} \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi + \dot{r} \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi + r \ddot{\varphi} \hat{e}_\varphi - r \dot{\varphi}^2 \hat{e}_r$
 $= (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \hat{e}_r + (r \ddot{\varphi} + 2 \dot{r} \dot{\varphi}) \hat{e}_\varphi$
 $\equiv a_r \hat{e}_r + a_\varphi \hat{e}_\varphi$

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 & \text{Radialbeschleunigung} \\ a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} & \text{Winkelbeschleunigung} \end{cases}$$

1.3.2 Zylinderkoordinaten

$$x = \rho \cos \varphi \quad \rho \geq 0$$

$$y = \rho \sin \varphi \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

$$z = z$$

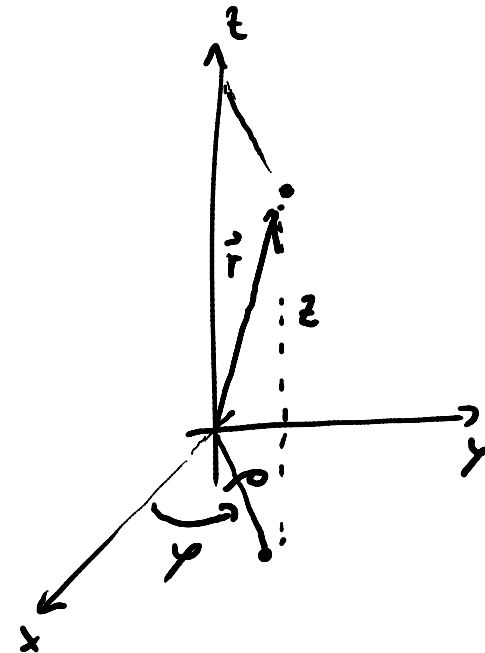
$$\hat{e}_\rho = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$$

$$\hat{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$$

$$\hat{e}_z = (0, 0, 1)$$

$$\hat{e}_\rho^2 = \hat{e}_\varphi^2 = \hat{e}_z^2 = 1, \quad \hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_\varphi = \hat{e}_\varphi \cdot \hat{e}_z = \hat{e}_z \cdot \hat{e}_\rho = 0$$

$$\hat{e}_\rho \times \hat{e}_\varphi = \hat{e}_z \text{ et cycl.}$$



$$d\vec{r} = d\rho \hat{e}_\rho + \rho d\varphi \hat{e}_\varphi + dz \hat{e}_z$$

$$dV = d\rho \rho d\varphi dz$$

$$\vec{v} = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi + \dot{z} \hat{e}_z$$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \hat{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}) \hat{e}_\varphi + \ddot{z} \hat{e}_z$$

1.3.3 Kugelkoordinaten (sphärische Polarkoordinaten)

$$z = r \cos \vartheta$$

$$\rho = r \sin \vartheta$$

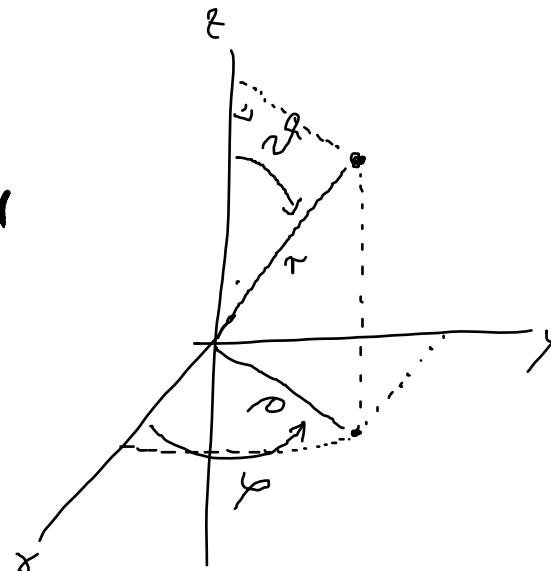
$$x = \rho \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \varphi$$

$$\begin{cases} x = r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y = r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z = r \cos \vartheta \end{cases}$$

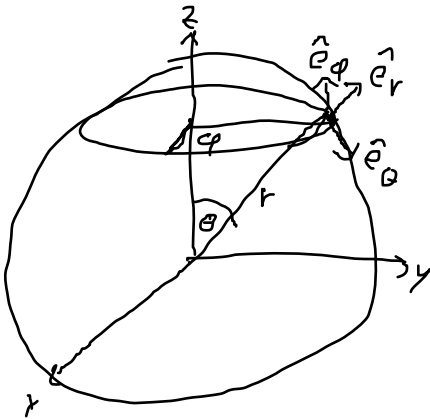
ϑ = Polwinkel
 $0 \leq \vartheta \leq \pi$

φ = Azimutalwinkel
 $0 \leq \varphi < 2\pi$



1.3.3. Kugelkoordinaten

(r, θ, φ) beschreibt jeden Punkt im Raum. ($0 \leq r < \infty, 0 < \theta < \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$)



$$\vec{r}(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

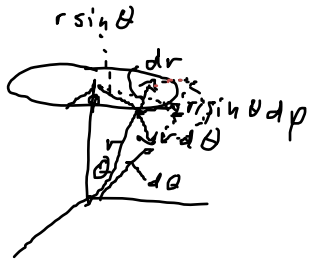
Einheitsvektoren: $\hat{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} / \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \right|$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad \hat{e}_r$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = r \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \quad \hat{e}_\theta$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = r \sin \theta \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{e}_\varphi$$

Differentielles Linienelement: $d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} dr + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} d\varphi = dr \hat{e}_r + r d\theta \hat{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \hat{e}_\varphi$



Anwendung: Geschwindigkeit in Kugelkoordinaten:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \hat{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \hat{e}_\theta + r \sin \theta \frac{d\varphi}{dt} \hat{e}_\varphi = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta + r \sin \theta \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi$$

Differentielles Volumenelement: $dV = dr \cdot r d\theta \cdot r \sin \theta d\varphi = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$

Beispiel: Berechnung Volumen einer Kugel mit Radius R ;

$$V = \int_{\substack{\text{innere} \\ \text{Kugel}}} dV = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{3} R^3 \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Anmerkung: Wir schreiben oft: $dV = r^2 dV d\Omega$ mit $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$
 „Raumwinkel element“

$$\int_{\substack{\text{alle} \\ \text{Richtungen}}} d\Omega = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi$$

2. Vector analysis

Übersicht:

1. Skalarfelder $f(\vec{r})$: Ordnen jedem Punkt im Raum einen Skalar (eine Zahl) zu.
Beispiele: Temperaturverteilung, Dichteverteilungen, elektrisches Potential

2. Vektorfelder $\vec{F}(\vec{r})$: Ordnen jedem Punkt im Raum einen Vektor zu.
Beispiele: Kraftfeld, elektrisches Feld, Geschwindigkeitsfeld

3. Nabla-Operator $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$

Nabla-Operator kann auf drei Arten auf Skalar-/Vektorfelder wirken:

1. Als Gradient: $\text{grad } f(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla} f(\vec{r}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$
Abbildung: Skalarfeld $\rightarrow$ Vektorfeld

2. Als Divergenz: $\text{div } \vec{F}(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (F_x, F_y, F_z) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$
Abbildung: Vektorfeld $\rightarrow$ Skalarfeld

3. Als Rotation: $\text{rot } \vec{F}(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$
Abbildung: Vektorfeld $\rightarrow$ Vektorfeld

2.1. Der Gradient

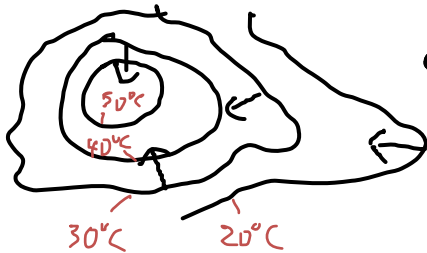
Das totale Differenzial eines Skalarfeldes $f(\vec{r})$:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = (\vec{\nabla} f(\vec{r})) \cdot d\vec{r} \quad \text{mit} \quad \vec{\nabla} f(\vec{r}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Wie ändert sich $f(\vec{r})$ entlang einer Kurve, die durch $\vec{r}(s)$ parametrisiert wird?

$$\frac{df(\vec{r}(s))}{ds} = (\vec{\nabla} f(\vec{r})) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial s}$$

Bedeutung: Der Gradient steht immer senkrecht auf den Flächen mit $f(\vec{r}) = \text{const.}$ („Äquipotentialflächen“, „Isothermenflächen“) und zeigt in die Richtung, in der $f(\vec{r})$ am schnellsten wächst.



$\text{grad } f$

Denn: Betrachte eine Kurve $\vec{r}(s)$ entlang einer Äquipotentialfläche.

$$\text{Dann: } 0 = \frac{df(\vec{r}(s))}{ds} = (\vec{\nabla} f(\vec{r})) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \Rightarrow \vec{\nabla} f(\vec{r}) \perp d\vec{r}$$

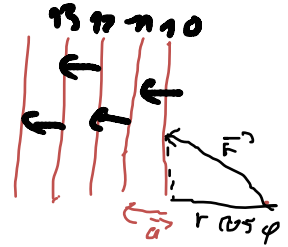
Allgemein für $d\vec{r}$ in verschiedenen Richtungen:

$$df = |\vec{\nabla} f(\vec{r})| |d\vec{r}| \cdot \cos(\angle(\vec{\nabla} f(\vec{r}), d\vec{r}))$$

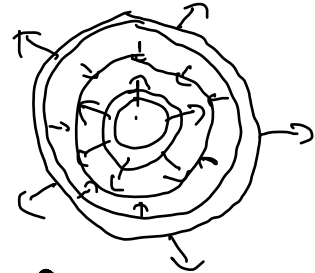
$\Rightarrow df$ maximal, wenn $\cos(\angle(\vec{\nabla} f(\vec{r}), d\vec{r})) = 1$, f am schnellsten
also $\vec{\nabla} f(\vec{r}) \parallel d\vec{r} \Rightarrow \text{grad } f$ zeigt in die Richtung, in der f am schnellsten wächst

Rechenregeln: $\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$
 $\vec{\nabla}(fg) = (\vec{\nabla}f)g + f(\vec{\nabla}g)$

Beispiele: 1) $f(\vec{r}) = \vec{a} \cdot \vec{r} = a_x x + a_y y + a_z z$
 $\vec{\nabla}f(\vec{r}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (a_x, a_y, a_z) = \vec{a}$



2) $f(\vec{r})$ radialsymmetrisch, also $f(\vec{r}) = f(r)$ mit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
 $\vec{\nabla}f(\vec{r}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \left(\frac{df}{dr} \frac{\partial r}{\partial x}, \frac{df}{dr} \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{df}{dr} \frac{\partial r}{\partial z} \right) = f'(r) \left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z} \right)$
 $= f'(r) \frac{1}{r}(x, y, z) = f'(r) \frac{\vec{r}}{r} = f'(r) \hat{e}_r$



Insbesondere: $\vec{\nabla} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \hat{e}_r$

3) $f(\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{(x-a_x)^2 + (y-a_y)^2 + (z-a_z)^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2a_x x + a_x^2 + y^2 - 2a_y y + a_y^2 + z^2 - 2a_z z + a_z^2}}$
 $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{2} |\vec{r} - \vec{a}|^{-3} (2x - 2a_x) = -\frac{x - a_x}{|\vec{r} - \vec{a}|^3}$
 $\vec{\nabla}f(\vec{r}) = -\frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|^3} (x - a_x, y - a_y, z - a_z) = -\frac{\vec{r} - \vec{a}}{|\vec{r} - \vec{a}|^3}$

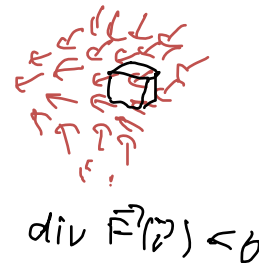
2.2. Die Divergenz

$$\operatorname{div} \vec{F}(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

wirkt auf ein Vektorfeld und gibt die „Quelldichte“ des Vektorfeldes an (Beweis später beim „Gaußschen Satz“)

Vorstellung: infinitesimal kleine Box bei $\vec{r}$. Dann:

$$\operatorname{div} \vec{F}(\vec{r}) \begin{cases} > 0, & \text{wenn mehr raus- als reinfließt} \\ = 0, & \text{wenn gleichviel rein- wie rausfließt} \\ < 0, & \text{wenn mehr rein- als rausfließt} \end{cases}$$



Rechenregeln:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} + \vec{G}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{\nabla} \cdot \vec{G}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (g \vec{F}) = \underbrace{g (\vec{\nabla} \cdot \vec{F})}_{\operatorname{div} \vec{F}} + \underbrace{(\vec{\nabla} g) \cdot \vec{F}}_{\operatorname{grad} g \cdot \vec{F}}$$

Nabla-Operator $\vec{\nabla} = \hat{e}_i \partial_i$, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ ($i=1,2,3$)

Gradient $\vec{\nabla} f = \hat{e}_i \partial_i f$

Divergenz $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \hat{e}_i \partial_i \cdot (\hat{e}_j F_j) = \underbrace{\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j}_{=\delta_{ij}} \partial_i F_j = \partial_i F_i$

Zeige $\text{div}(g \vec{F}) = g \text{div} \vec{F} + \text{grad} g \cdot \vec{F}$.

Bew.: $\partial_i (g F_i) = (\partial_i g) F_i + g \partial_i F_i = \text{grad} g \cdot \vec{F} + g \text{div} \vec{F}$

Beispiele: $\text{div} \vec{r} = \partial_i x_i = \delta_{ii} = 3$

$\text{div} (\vec{L} \times \vec{r}) = \partial_i (\epsilon_{ijk} L_j x_k) = \epsilon_{ijk} L_j \underbrace{\partial_i x_k}_{=\delta_{ik}} = \epsilon_{ijj} L_j = 0$

$\text{div} (r^n \vec{r}) = r^n \underbrace{\text{div} \vec{r}}_{=3} + \text{grad} r^n \cdot \vec{r}$
 $= 3 r^n + n r^{n-2} \underbrace{\vec{r} \cdot \vec{r}}_{=r^2} = (n+3) r^n$

$n = -3$: $\vec{F} = \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\hat{r}}{r^2}$

NB: Gravitationsfeld einer Punktladung bzw. Coulomb-Feld einer Punktladung divergenzfrei für $r \neq 0$.

$$\begin{aligned} \operatorname{divgrad} f &= \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \partial_i \partial_i f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f && \text{Divergenzgradient} \\ &= \vec{\nabla}^2 f = \Delta f \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{Laplace-Operator} \end{aligned}$$

2.3 Rotation

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F} &= \vec{\nabla} \times \vec{F} = \hat{e}_i \partial_i \times (\hat{e}_j F_j) = \underbrace{\hat{e}_i \times \hat{e}_j}_{= \varepsilon_{ijk} \hat{e}_k} \partial_i F_j = \varepsilon_{kij} \hat{e}_k \partial_i F_j \\ &= \hat{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j F_k \end{aligned}$$

$$\leadsto (\operatorname{rot} \vec{F})_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j F_k$$

Rechenregeln

$$\operatorname{rot}(\vec{F} + \vec{G}) = \operatorname{rot} \vec{F} + \operatorname{rot} \vec{G}$$

$$\operatorname{rot}(g \vec{F}) = g \operatorname{rot} \vec{F} + \operatorname{grad} g \times \vec{F}$$

$$\begin{aligned} \text{Bew.: } (\operatorname{rot}(g \vec{F}))_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j (g F_k) = \varepsilon_{ijk} ((\partial_j g) F_k + g \partial_j F_k) \\ &= (g \operatorname{rot} \vec{F} + \operatorname{grad} g \times \vec{F})_i \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Beispiele: } \operatorname{rot}(f(\vec{r}) \vec{r}) &= f \underbrace{\operatorname{rot} \vec{r}}_{=\vec{0}} + \underbrace{\operatorname{grad} f \times \vec{r}}_{=f' \frac{\vec{r}}{r}} = \vec{0} \\ &= f' \frac{\vec{r}}{r} \end{aligned}$$

$$\text{NR: } (\operatorname{rot} \vec{r})_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j x_k = \varepsilon_{ijk} \delta_{jk} = \varepsilon_{ijj} = 0$$

2.4 Divergenz und Rotation

$$\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \operatorname{rot} \vec{F} - \vec{F} \cdot \operatorname{rot} \vec{G}$$

$$\operatorname{rot}(\vec{F} \times \vec{G}) = (\vec{G} \cdot \vec{\nabla}) \vec{F} - \vec{G} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - (\vec{F} \cdot \vec{\nabla}) \vec{G} + \vec{F} (\vec{\nabla} \cdot \vec{G})$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{F} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \vec{\nabla}^2 \vec{F} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{F} - \Delta \vec{F}$$

$\text{rot grad } f = \vec{0}$ Gradientenfeld ist wirbelfrei

$\text{div rot } \vec{F} = 0$ Wirbelfeld ist quellenfrei

Beewe: $(\text{rot}(\vec{F} \times \vec{G}))_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j (\varepsilon_{klm} F_l G_m)$

$$= \underbrace{\varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm}}_{\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{jl} \delta_{im}} ((\partial_j F_l) G_m + F_l \partial_j G_m)$$

$$= \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{jl} \delta_{im}$$

$$= (\partial_j F_i) G_j - (\partial_j F_j) G_i + F_i \partial_j G_j - F_j \partial_j G_i$$

$$= \vec{G} \cdot \vec{\nabla} F_i - G_i \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + F_i \vec{\nabla} \cdot \vec{G} - \vec{F} \cdot \vec{\nabla} G_i$$

$$= ((\vec{G} \cdot \vec{\nabla}) \vec{F} - \vec{G} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{F} \vec{\nabla} \cdot \vec{G} - (\vec{F} \cdot \vec{\nabla}) \vec{G})_i$$

$$(\text{rot grad } f)_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k f = \varepsilon_{ijk} \frac{1}{2} (\partial_j \partial_k f + \partial_k \partial_j f)$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k f - \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \partial_k \partial_j f$$

$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ j & k & j & k \end{matrix}$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k f - \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k f = 0$$

2.4 Integrale über Vektorfelder

lokal

$\operatorname{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ Quellstärke

$\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$ Wirbelung

global

Fluß des Feldes aus Oberfläche
eines Volumens

Zirkulation des Feldes längs geschlossener
Kurve

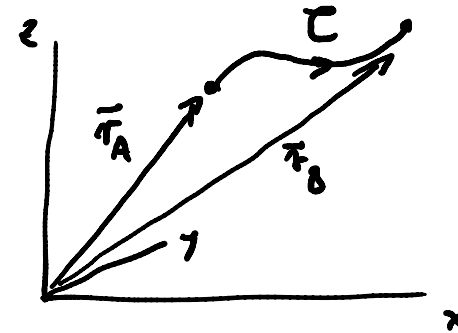
2.4.1 Kurvenintegrale

$\vec{r} = \vec{r}(t)$ Bahnkurve

Kurve $\mathcal{C} = \{ \vec{r} = \vec{r}(t) \mid t_A \leq t \leq t_B \}$

$\vec{r}_A = \vec{r}(t_A)$, $\vec{r}_B = \vec{r}(t_B)$

Wähle Zerlegung $t_0 = t_A < t_1 < t_2 < \dots < t_{N-1} < t_N = t_B$



Riemannsche Summe $S_N = \sum_{i=1}^N \Delta \vec{r}_i \cdot \vec{F}(\vec{r}_i)$, $\Delta \vec{r}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}$

$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \max |\Delta \vec{r}_i| \rightarrow 0}} S_N = \int_C d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r})$ Kurvenintegral

$$= \int_{t_A}^{t_B} dt \underbrace{\frac{d\vec{r}(t)}{dt} \cdot \vec{F}(\vec{r}(t))}_{\text{skalare Funktion der Zeit}}$$

Eigenschaften:

1) $\int_{-C} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = - \int_C d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r})$

2) $C = C_1 \cup C_2$: $\int_C d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \int_{C_1} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) + \int_{C_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r})$

3) unabhängig von Parametrisierung der Bahnkurve.

Bew.: $\int_{t_A}^{t_B} dt \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \cdot \vec{F}(\vec{r}(t)) = (*)$

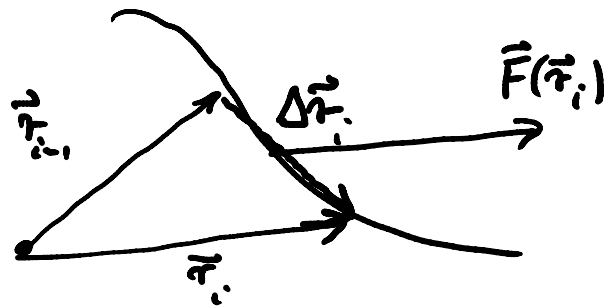
Wechsel der Parametrisierung $t = t(s)$, $t_A = t(s_A)$, $t_B = t(s_B)$

$$dt = \frac{dt(s)}{ds} ds$$

$$\frac{d\vec{r}(t(s))}{ds} = \frac{d\vec{r}(t(s))}{dt} \frac{dt(s)}{ds}$$

$$\vec{r}(s) = \vec{r}(t(s))$$

$$(*) = \int_{s_A}^{s_B} ds \underbrace{\frac{dt(s)}{ds} \frac{d\vec{r}(t(s))}{dt}}_{= \frac{d\vec{r}(t(s))}{ds}} \cdot \vec{F}(\vec{r}(t(s))) = \int_{s_A}^{s_B} ds \frac{d\vec{r}(s)}{ds} \cdot \vec{F}(\vec{r}(s))$$



Arbeit $\Delta \vec{r}_i \cdot \vec{F}(\vec{r}_i)$

Beispiel:

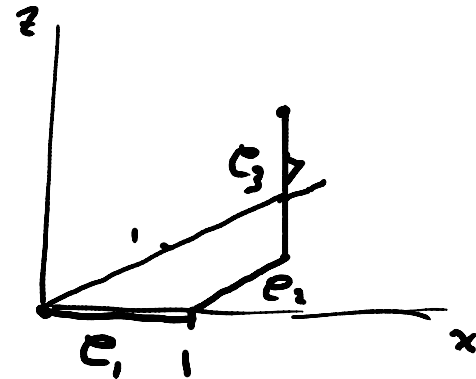
1) Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r}) = (3x^2 + 6y)\hat{e}_x - 14yz\hat{e}_y + 20xz^2\hat{e}_z$
 $= (3x^2 + 6y, -14yz, 20xz^2)$

Weg $\mathcal{C}_a = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$

$\mathcal{C}_1: (0,0,0) \rightarrow (1,0,0) : d\vec{r} = \hat{e}_x dx$

$\mathcal{C}_2: (1,0,0) \rightarrow (1,1,0) : d\vec{r} = \hat{e}_y dy$

$\mathcal{C}_3: (1,1,0) \rightarrow (1,1,1) : d\vec{r} = \hat{e}_z dz$



$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{C_1} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) + \int_{C_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) + \int_{C_3} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) \\
&= \int_0^1 dx (3x^2 + 6 \cdot 0) + \int_0^1 dy (-14y \cdot 0) + \int_0^1 dz (20 \cdot 1 \cdot z^2) \\
&= x^3 \Big|_0^1 + \frac{20}{3} z^3 \Big|_0^1 = \frac{23}{3}
\end{aligned}$$

Weg C_b : $\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$, $0 \leq t \leq 1$

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = (1, 2t, 3t^2)$$

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = (3t^2 + 6t^2, -14t^5, 20t^7)$$

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} \cdot \vec{F}(\vec{r}(t)) = 9t^2 - 28t^6 + 60t^9$$

$$\begin{aligned}
I_b &= \int_0^1 dt (9t^2 - 28t^6 + 60t^9) = \left[3t^3 - \frac{28}{7}t^7 + 6t^{10} \right]_0^1 \\
&= 3 - 4 + 6 = 5 \quad \text{Kurrenintegral Wegabhängig!}
\end{aligned}$$

$$2) \quad \vec{F}(\vec{r}) = (2x^2 + 2xy + 2xz^2, x^2, 2x^2z)$$

$$I_a = I_b = \frac{8}{3} \quad \text{Kurvenintegral wegunabhängig?}$$

$$3) \quad \mathcal{C}: \text{Kreis, um } \vec{r} = (0, 0, 0) \text{ in } x, y\text{-Ebene mit Radius } R$$

$$\vec{r}(t) = R(\cos t, \sin t, 0), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

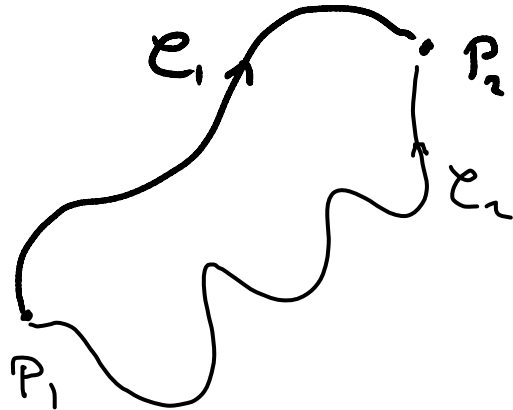
$$\frac{d\vec{r}}{dt} = R(-\sin t, \cos t, 0)$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}_0 = \text{const.}$$

$$\text{Zirkulation} \quad \oint_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \int_0^{2\pi} dt \, R(-\sin t, \cos t, 0) \cdot \vec{F}_0 = 0$$

2.4 Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen

Kurvenintegral ist Wegunabhängig $\Leftrightarrow$ Zirkulation verschwindet



$$\oint_{C_1 \cup C_2} d\vec{r} \cdot \vec{F} = \int_{C_1} d\vec{r} \cdot \vec{F} - \int_{C_2} d\vec{r} \cdot \vec{F} = 0$$

2D.

Differentialform $u(x,y)dx + v(x,y)dy$

Gibt es $f(x,y)$ mit $df = udx + vdy$?

totales Differential $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$

$$\wedge \quad \begin{cases} u = \frac{\partial f}{\partial x} \\ v = \frac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$

Satz von Schwarz: $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \wedge \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$

$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \Leftrightarrow$ es gibt f mit $df = udx + vdy$.

Beispiel: $u dx + v dy = (x^2 + 2xy) dx + (y^4 + 2x^2) dy$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x \stackrel{!}{=} \frac{\partial v}{\partial x} = 2Ax \quad \wedge \quad A=1$$

Suche f .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = u = x^2 + 2xy \quad \wedge \quad f = \frac{x^3}{3} + x^2 y + g(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + g'(y) = v = y^4 + x^2 \quad \wedge \quad g'(y) = y^4 \quad \wedge \quad g = \frac{y^5}{5} + c$$

$$\wedge \quad f = \frac{x^3}{3} + x^2 y + \frac{y^5}{5} + c$$

3D.

Differentialform $u(x,y,z)dx + v(x,y,z)dy + w(x,y,z)dz$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y} \Leftrightarrow \text{es gibt } f(x,y,z)$$

mit $df = udx + vdy + wdz$

$$\vec{\nabla} \times (u, v, w) = \vec{0}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

$$(\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, \dots)$$

Beispiele:

$$1) \quad (3x^2 + 6y) dx - 14yz dy + 20xz^2 dz$$

$$\vec{\nabla} \times (u, v, w) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 3x^2+6y & -14yz & 20xz^2 \end{vmatrix} = (14y, -20z^2, -6) \neq \vec{0}$$

$\wedge$ es gibt keine Funktion f mit $df = udx + vdy + wdz$.

$$2) \quad (2x^2 + 2xy + 2xz^2) dx + x^2 dy + 2x^2 z dz$$

$$\vec{\nabla} \times (u, v, w) = \vec{0}$$

$$\text{Lösung: } f(x, y, z) = \frac{2}{3} x^3 + x^2 y + x^2 z^2 + c$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = d\vec{r} \cdot \vec{F}, \quad \vec{F} = \vec{\nabla} f$$

$$= d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} f$$

$$\int_{\mathcal{C}_{AB}} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} df = f(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} = f(\vec{r}_B) - f(\vec{r}_A) \quad \text{unabhängig von } \mathcal{C}_{AB}$$

Probe: $\int_C d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = f(1,1,1) - f(0,0,0) = \frac{8}{3} + c - c = \frac{8}{3}$

Allgemein.

Sei: $f(\vec{r})$ skalare Funktion.

$\leadsto df = d\vec{r} \cdot \vec{F}$, mit $\vec{F} = \vec{\nabla} f$

Sei: C_{AB} Kurve von $\vec{r}_A$ nach $\vec{r}_B$, dann $\int_{C_{AB}} d\vec{r} \cdot \vec{F} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} df = f(\vec{r}_B) - f(\vec{r}_A)$.

ist Wegunabhängig.

Sei: $\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r})$ Wegunabhängig. Dann

skalare Funktion $f(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) \leadsto$

$df = d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}).$

$\int_C d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r})$ wegunabhängig $\Leftrightarrow d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r})$ totales Differential

$$\Leftrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$$

$\Leftrightarrow \oint_C d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = 0$ für beliebige geschlossene Kurve.

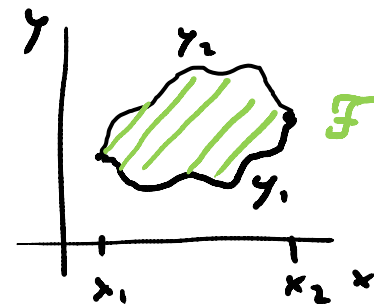
2.5 Flächen- und Volumenintegrale

1D: $I = \int_{x_1}^{x_2} dx g(x)$ Fläche



2D: Betrachte $g(x, y)$ über Bereich

$$F = \{ (x, y) \mid x_1 \leq x \leq x_2, y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \}$$



Volumen unter gekrümmter Fläche

$$I = \iint_F \underbrace{dx dy g(x, y)}_{\text{Volumen des infinitesimalen Quaders}} = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy g(x, y)$$

3D: Volume

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z) \mid x_1 \leq x \leq x_2, y_1(x) \leq y \leq y_2(x), z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$$

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V dx dy dz g(x, y, z) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} dz g(x, y, z) \end{aligned}$$

3. Kegelschnitte

Schnittmenge von Doppelkegel und Ebene:

Kreis, Ellipse, Parabel, Hyperbel

3.1 Ellipse

2 Brennpunkte F_1, F_2

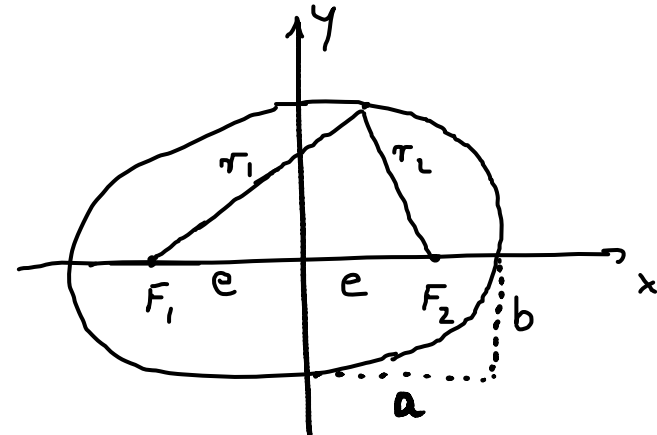
Ellipse: Ortslinie aller Punkte mit gleicher Abstandssumme von F_1, F_2 (Gärtnerkonstruktion)

$$r_1 + r_2 = \text{const}$$

e : Exzentrizität

a : gr. Halbachse

b : kl. Halbachse



$$P = (a, 0) : r_1 + r_2 = a + e + a - e = 2a$$

$$P = (0, b) : r_1 = r_2 = a \leadsto a^2 = e^2 + b^2 \quad (\text{Pythagoras})$$

$$\leadsto e = \sqrt{a^2 - b^2}$$

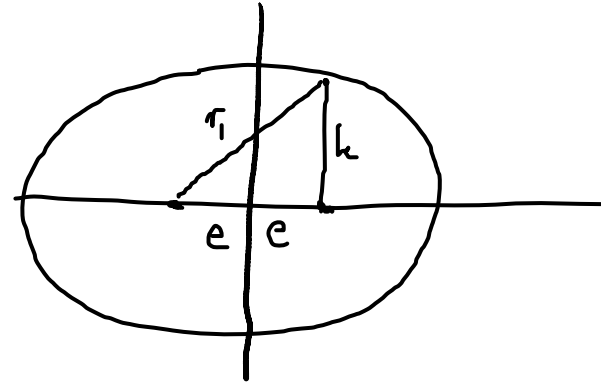
$e = \frac{e}{a}$ numerische Exzentrizität, mißt Gestalt

$P = (e, k) : r_2 = k$ Parameter, Höhe über dem Brennpunkt

$$r_1 + k = 2a \leadsto r_1 = 2a - k$$

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (2a - k)^2 = 4a^2 - 4ak + k^2 \\ &= 4e^2 + k^2 \end{aligned}$$

$$\leadsto k = \frac{a^2 - e^2}{a} = \frac{b^2}{a}$$



$$P = (x, y)$$

$$r_1^2 = (x+e)^2 + y^2 \quad (*)$$

$$r_2^2 = (x-e)^2 + y^2$$

$$r_1^2 - r_2^2 = 4ex$$

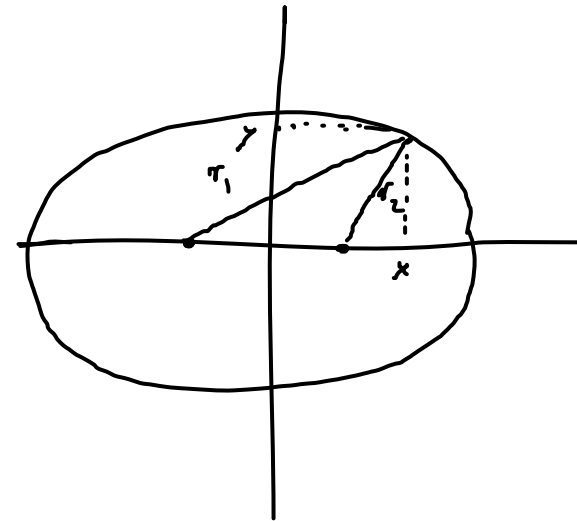
$$= 2a(r_1 - r_2) \quad \leadsto \quad r_1 - r_2 = \frac{2e}{a} x$$

$$\begin{cases} r_1 = a + \frac{e}{a} x & (**) \\ r_2 = a - \frac{e}{a} x \end{cases}$$

Setze $(**) \text{ in } (*)$ ein: $\left(a + \frac{e}{a} x\right)^2 = (x+e)^2 + y^2$

$$\leadsto \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{Ellipsengl.}$$

Spezialfall: $e = \varepsilon = 0$, $a = b = r = R$ Kreis



ebene Polarkoordinaten

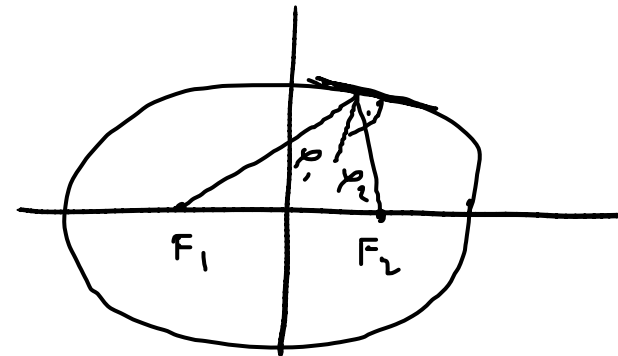
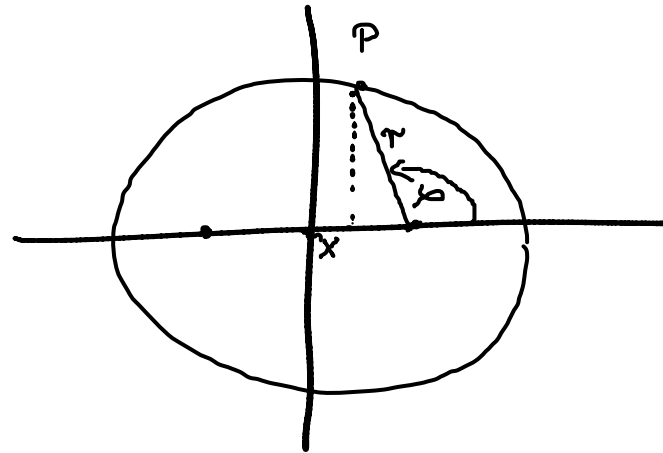
$$r = r_2 = a - \frac{e}{a} x = a - \frac{e}{a} (e + r \cos \varphi) \\ = \frac{a^2 - e^2}{a} - \frac{e}{a} r \cos \varphi = k - e r \cos \varphi$$

$$\leadsto r = \frac{k}{1 + e \cos \varphi} \quad \text{Polardarstellung}$$

Brennpunkteigenschaft: Normale halbiert Winkel zwischen Brennpunkten

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

Flächeninhalt: $F = \pi a b$



3.2. Hyperbel

Def.: $|\tau_1 - \tau_2| = \text{const} = 2a$ 2 Äste

$$b^2 = e^2 - a^2$$

$$e = \frac{e}{a} > 1$$

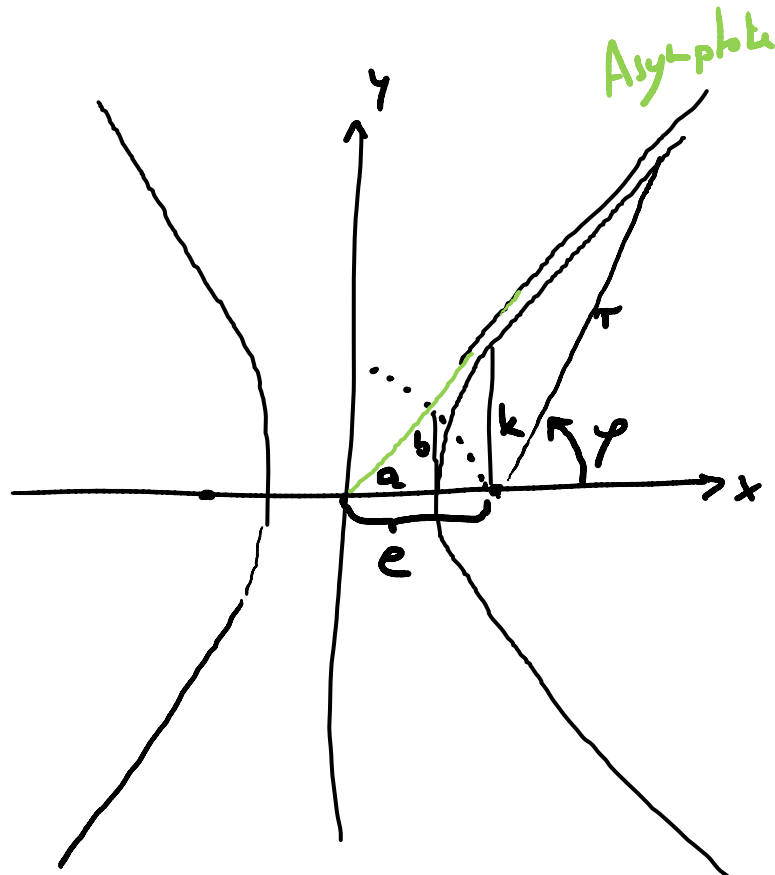
$$k = \frac{b^2}{a}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{Hyperbelgleichung}$$

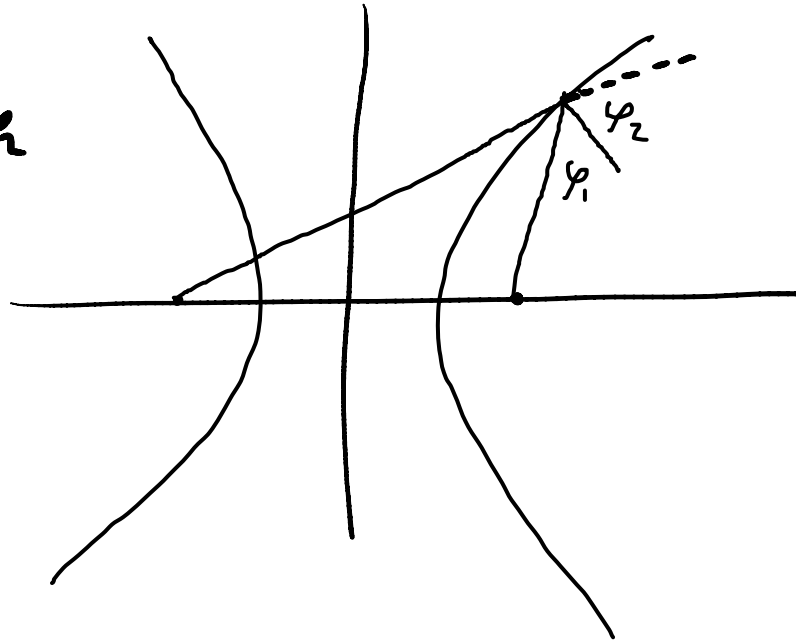
$$r = \frac{k}{1 + e \cos \varphi}$$

$$y = \pm b \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \approx \pm \frac{b}{a} x \quad x \gg a$$

Gl. d. Asymptoten



Beispiel: $\varphi_1 = \varphi_2$



3.3 Parabel

Def.: Ortslinie aller Punkte mit gleichem Abstand zum Brennpunkt und Geraden

$$\left(x + \frac{k}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{k}{2}\right)^2 + y^2$$

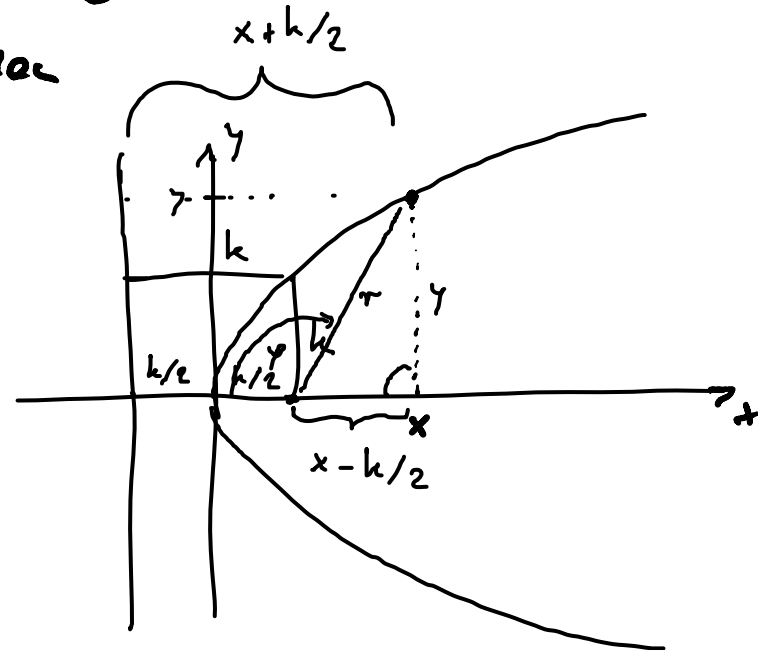
$$\leadsto y^2 = 2kx$$

$$r = x + \frac{k}{2}$$

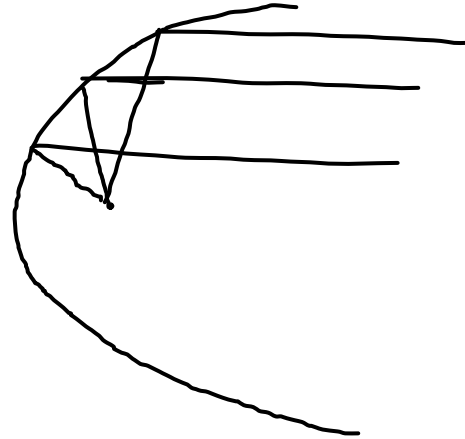
$$x - \frac{k}{2} = r \cos(\pi - \varphi) = -r \cos \varphi$$

$$\leadsto r = k - r \cos \varphi$$

$$\leadsto r = \frac{k}{1 + \cos \varphi} \quad \left(= \frac{k}{1 + e \cos \varphi} \text{ mit } e=1 \right) \text{ Polar Darstellung}$$



Brennpunktschiff:



4. Grundprobleme der Dynamik

Dynamik: Beschreibung der Bewegung eines Massenpunktes unter Einfluss einer Kraft.

4.1 Newtonsche Axiome

Lex Prima: Galileisches Trägheitsgesetz

Jeder Körper beharrt im Zustand der R.L. oder gleichförmigen geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.

Impuls (Größe der Bewegung) : $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

Lex Secunda: dynamische Grundgleichung

$$\dot{\vec{p}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad , \quad \vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

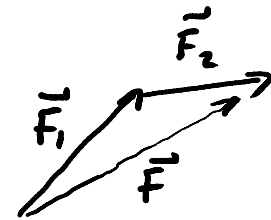
Lex Tertia: Wechselwirkungsgesetz

„actio = reactio“

Näherungen: kleine Geschwindigkeiten ($\rightarrow$ Relativitätstheorie)
nicht allzu kleine Abstände ($\rightarrow$ Quantenmechanik)

Superpositionsprinzip für Kräfte: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

Inertialsystem: Bezugssystem, in dem
Galileisches Trägheitsgesetz gilt.

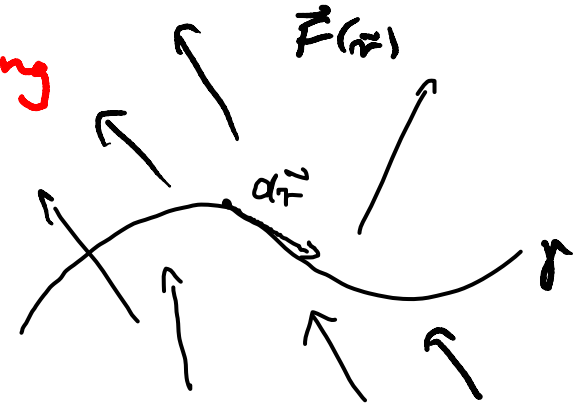


4.2 Gradientenfelder und Energieerhaltung

Arbeit: $dA = d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r})$

$$A = \int_{\gamma} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \int_{t_a}^{t_e} dt \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{F}(\vec{r}(t))$$

Lsg $\nearrow \gamma$



Verwende: $\vec{p} = m \dot{\vec{r}} \quad \wedge \quad \vec{F} = \dot{\vec{p}} = m \ddot{\vec{r}} + m \dot{\vec{r}}$

$m = \text{const} \quad \wedge \quad \dot{m} = 0$

$$\vec{F} = m \ddot{\vec{r}}$$

$$A = \int_{t_a}^{t_e} dt \dot{\vec{r}} \cdot m \ddot{\vec{r}} = \left. \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 \right|_{t_a}^{t_e} = T_e - T_a$$

= T kinetische Energie

A hängt i.d. von γ ab.

Konservatives Kraftfeld:

$$\int_{\gamma} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) \text{ unabhängig von } \gamma$$

$$\Leftrightarrow \text{rot } \vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = \vec{0}$$

$\Leftrightarrow$ es gibt Potential (potentielle Energie) $V(\vec{r})$:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\text{grad } V(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$$

$$A = \int_{\gamma} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = - \int_{\gamma} d\vec{r} \cdot \text{grad } V(\vec{r}) = - V(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_e} = V_a - V_e$$

$$\hookrightarrow V_a + T_a = V_e + T_e = E = \text{const.} \quad \text{mechanische Energie}$$

Energiesatz der Mechanik: Für zeitunabhängige, konservative Kräfte ist die mechanische Energie eine Erhaltungsgröße.

Allgemeiner Fall des konservativen Kraftfeldes: $V(\vec{r}, t)$

$$\begin{aligned}
 \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} (T + V) = m \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} + \frac{\partial V}{\partial \dot{\vec{r}}} \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{\partial V}{\partial t} \\
 &= \dot{\vec{r}} \cdot \left(m \ddot{\vec{r}} + \underbrace{\text{grad} V}_{= -\vec{F}} \right) + \frac{\partial V}{\partial t} \\
 &= \frac{\partial V}{\partial t} \neq 0
 \end{aligned}$$

4.2.1 Eindimensionale Bewegung des Massenpunktes

$$p = m\dot{x}, \quad m = \text{const}$$

Ziel: Berechne $x(t)$.

$$F = \dot{p} = m\ddot{x}$$

$$F = F(x, \dot{x}, t)$$

4.2.1.1 $F = F(t)$

$$F(t) = m \frac{d\dot{x}}{dt} \quad \wedge \quad dt F(t) = m d\dot{x} \quad \text{Separation der Variablen}$$

$$\int_{t_0}^t dt' F(t') = m \int_{t_0}^t dt' \frac{d\dot{x}}{dt'} = m \int_{\dot{x}(t_0)}^{\dot{x}(t)} d\dot{x} = m \dot{x} \Big|_{\dot{x}(t_0)}^{\dot{x}(t)}$$

$$= m (\dot{x}(t) - \dot{x}(t_0))$$

$$\dot{x}_0 = \dot{x}(t_0) \text{ vorgegeben}$$

$$\leadsto \dot{x}(t) = \dot{x}_0 + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt' F(t')$$

$$\leadsto \int_{t_0}^t dt' \frac{dx}{dt'}(t') = x(t) - x(t_0)$$

$$= \dot{x}_0 (t - t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' F(t'')$$

$x_0 = x(t_0)$ vorgegeben

$$x(t) = x_0 + \dot{x}_0 (t - t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' F(t''), \quad \text{Bahnkurve}$$

Beispiel: Freier Fall, $x_0 = h$, $\dot{x}_0 = 0$, $t_0 = 0$

$$F(t) = -mg$$

$$\frac{1}{m} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' (-mg) = -g \int_0^t dt' t' = -\frac{g}{2} t^2$$

$$\leadsto x(t) = h - \frac{g}{2} t^2$$

4.2.1.2 $F = F(x)$

NB: 1D Kraftfeld stets konservativ.

Potential $V(x) = - \int dx F(x)$ hängt nicht explizit von t ab.

Energiesatz: $E = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + V(x) = \text{const.}$

$$\leadsto \frac{dx}{dt} = \dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E - V(x))}$$

Separation der Variablen $dt = \pm \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - V(x))}}$

$$\leadsto t - t_0 = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{E - V(x')}} \quad , \quad x = x(t), \quad x_0 = x(t_0)$$

Wähle Vorzeichen $\pm$, so dass beide Seiten gleiches Vorzeichen haben.

$t = t(x) \leadsto x = x(t)$ durch Auflösen

NB: 1 Integration gespart, da E Bewegungsintegral
(= Erhaltungsgroße)

Beispiel: Harmonischer Oszillator, z.B. Federschwingen

$$F(x) = -kx, \quad k = \text{Federkonstante}$$

$$V(x) = - \int_0^x dx' F(x') = \frac{k}{2} x^2$$

$$\text{Energiesatz: } m\dot{x}^2 + kx^2 = 2E = \text{const.}$$

$$t=0: x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad \leadsto \quad E = \frac{k}{2} x_0^2$$

$$\pm t = \sqrt{\frac{m}{k}} \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{k}{2}(x_0^2 - x'^2)}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \int_1^{x/x_0} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \left(\arcsin \frac{x}{x_0} - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$y = \frac{x}{x_0}$$

$$x > x_0: \quad \omega t = \arcsin \frac{x}{x_0} - \frac{\pi}{2}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ Kreisfrequenz}$$

$$\leadsto x = x_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = x_0 \cos(\omega t)$$

Anwendung: Schwingungsdauer T

$$\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}$$

4.2.1.3 $F = F(x)$

$$v = \dot{x}$$

$$F(v) = m \frac{dv}{dt}$$

Separation der Variable $dt = m \frac{dv}{F(v)}$

$$\leadsto t - t_0 = m \int_{v_0}^v \frac{dv'}{F(v')} \quad \leadsto t = f(v) = t_0 + m \int_{v_0}^v \frac{dv'}{F(v')}$$

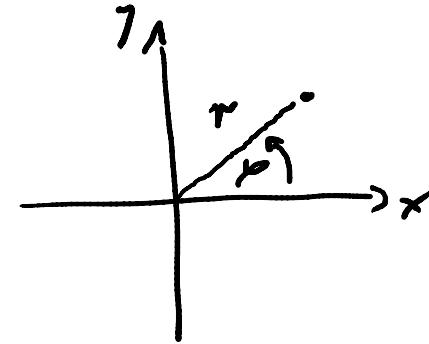
$$\leadsto v = f^{-1}(t) \quad \leadsto x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t dt' f^{-1}(t')$$

$= \frac{dx}{dt}$

4.2.2 Bewegungsgleichungen in Polarkoordinaten

$$\vec{r} = r \cos \varphi \hat{x} + r \sin \varphi \hat{y}$$

$$= r \hat{r}$$



$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\varphi} \hat{\varphi} \quad \leadsto \quad d\vec{r} = dr \hat{r} + r d\varphi \hat{\varphi}$$

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \hat{r} + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) \hat{\varphi}$$

$f = f(r, \varphi)$ sei vorgegeben

Gradient in Polarkoordinaten $\vec{\nabla} f = \alpha \hat{r} + \beta \hat{\varphi}$ (Ansatz)

Totales Differential $df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi$

$$= \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}$$

$$= \alpha dr + \beta r d\varphi \quad \leadsto \quad \begin{cases} \alpha = \frac{\partial f}{\partial r} \\ \beta = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{cases}$$

$$\leadsto \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\varphi}$$

Gegeben $V(\vec{r})$.

$$m \ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) \leadsto \begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -\frac{\partial V}{\partial r} \\ m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Newtonsche Bewegungsgleichung in} \\ \text{Polarkoordinaten} \end{array}$$

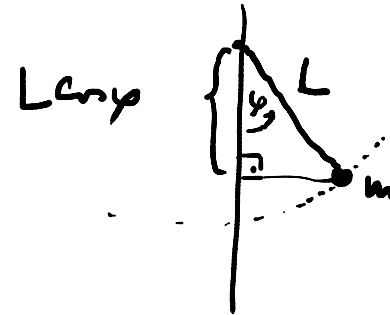
Spezialfälle: 1) $r = L$, z.B. mathematisches Pendel

$$mL\ddot{\varphi} = -\frac{1}{L}\frac{\partial V}{\partial \varphi}, \quad V = mgl(1 - \cos\varphi)$$

$$\leadsto \ddot{\varphi} = -\frac{g}{L}\sin\varphi \quad \leadsto \quad \dot{\varphi}\ddot{\varphi} = -\frac{g}{L}\sin\varphi\dot{\varphi}$$

$$\leadsto \frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{g}{L}\cos\varphi + c \quad \leadsto \quad \frac{d\varphi}{dt} = \pm \sqrt{2\left(\frac{g}{L}\cos\varphi + c\right)}$$

$$\leadsto \pm dt = \frac{d\varphi}{\sqrt{\quad}} \quad \text{Separation der Variable}$$



2) $V(\vec{r}) = V(r)$ rotationsymmetrisch

$$r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0 \quad \leadsto \quad \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}} = -2\frac{\dot{r}}{r} \quad \leadsto \quad \ln \dot{\varphi} = -2 \ln r + c$$

$$\leadsto \ln(r^2 \dot{\varphi}) = \text{const} \quad \leadsto \quad r^2 \dot{\varphi} = \text{const} \quad (\text{Drehimpulserhaltung, s.u.})$$

4.3 Impulssatz und Drehimpulssatz

Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \vec{r} \times \vec{\dot{r}} \quad (v = \text{const})$

hängt von der Wahl des Ursprungs ab.

$$\dot{\vec{L}} = m \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + m \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{N} \quad \text{Drehmoment}$$

hängt auch von der Wahl des Ursprungs ab.

Betrachte Vielteilchensystem

$$m_i, \vec{r}_i \quad (i = 1, \dots, N)$$

$$r_{jk} = |\vec{r}_j - \vec{r}_k| = r_{kj} \quad \text{Abstände}$$

Paarwechselwirkung $\vec{F}_{jk} = F_{jk}(r_{jk}) \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_k}{r_{jk}} \quad \text{Zentralkraft}$

erfährt Kraft $\nearrow$ $\nwarrow$ übt Kraft aus $= -\vec{F}_{kj}$

Gesamtimpuls $\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$

$$\dot{\vec{p}}_i = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \quad (2. \text{ Newtonsches Axiom})$$

$$\dot{\vec{P}} = \sum_i \dot{\vec{p}}_i = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \vec{F}_{ij} = \vec{0} \quad \text{Erhaltung des Gesamtimpulses}$$

Schwerpunkt $\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$

Gesamtmasse $M = \sum_i m_i$

$\vec{V} = \dot{\vec{R}} = \frac{\vec{P}}{M} = \text{const.}$, d.h. Schwerpunkt ruht oder bewegt sich
geradlinig gleichförmig

Gesamtdrehimpuls $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$

$$\dot{\vec{L}} = \sum_i \vec{r}_i \times \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} = \sum_{\substack{i,j \\ j \neq i}} \frac{F_{ij}(\vec{r}_{ij})}{r_{ij}} \vec{r}_i \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = \vec{0}$$

wg. $\vec{F}_i \times \vec{r}_j = -\vec{r}_j \times \vec{r}_i$

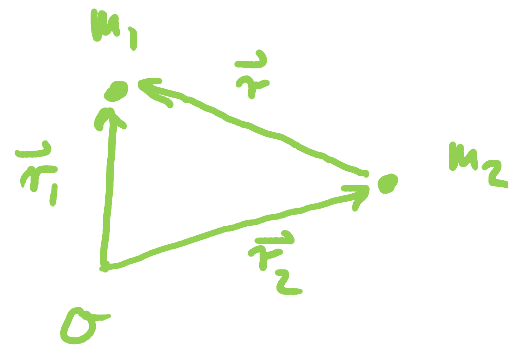
Erhaltung des Gesamtdrehimpulses

NB: Zentralkräfte ändern den Gesamtdrehimpuls nicht.

4.4 Zweiteilchensystem

$$M = m_1 + m_2$$

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad \leadsto \quad m = \frac{m_1 m_2}{M} \quad \text{reduzierte Masse}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) \quad \text{Schwerpunkt} \\ \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M} \vec{r} \\ \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M} \vec{r} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{P} = M \vec{R} \\ \vec{p} = m \vec{r} \quad (\text{künstlich}) \quad \text{Relativimpuls} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{p}_1 = \frac{m_1}{M} \vec{P} + \vec{p} \\ \vec{p}_2 = \frac{m_2}{M} \vec{P} - \vec{p} \end{array} \right.$$

Annahme: Zentralkraft $\vec{F}_{12} = F(r)\hat{r} = -\vec{F}_{21} \equiv \vec{F}$

$$\dot{\vec{P}} = M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \vec{0}$$

$$\dot{\vec{P}} = m\ddot{\vec{r}} = \frac{1}{M} (m_2 \vec{F}_{12} - m_1 \vec{F}_{21}) = \vec{F}$$

$$\vec{L}_{\text{ges}} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 = \dots = \underbrace{\vec{R} \times \vec{P}}_{=\vec{L}_S} + \underbrace{\vec{r} \times \vec{p}}_{=\vec{L}}$$

Schwerpunktdrehimpuls

↑ Relativedrehimpuls

NB: Triviale Kinematik des Schwerpunktes separat

4.5 Zentralkraftfelder und Drehimpulserhaltung

Zentralkraft: $\vec{F}(\vec{r}) = F(r) \hat{r} = \frac{F(r)}{r} \vec{r}$

$$\begin{aligned} (\text{rot } \vec{F}(\vec{r}))_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j \left(\frac{F(r)}{r} x_k \right) \\ &= \varepsilon_{ijk} \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{F(r)}{r} \frac{x_j}{r} x_k + \frac{F(r)}{r} \delta_{jk} \right)}_{\text{symmetrisch in } j \text{ \& } k} = 0 \end{aligned}$$

NB: $\varepsilon_{ijk} T_{jh} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} (T_{jh} + T_{kh}) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} T_{jh} + \frac{1}{2} \varepsilon_{i'k'j'} T_{j'h'}$
 $T_{kh} = T_{jh}$ $\nearrow$ $k'=j, j'=h$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} T_{jh} + \frac{1}{2} \underbrace{\varepsilon_{ikh}}_{=-\varepsilon_{ijk}} T_{jh} = 0 \end{aligned}$$

$\hookrightarrow \vec{F}(\vec{r})$ konservatives Kraftfeld

$$\leadsto \vec{F}(\vec{r}) = -\text{grad } V(\vec{r})$$

$$V(\vec{r}) = V(r) \quad \text{wg. Rotations-symmetrie}$$

$$\begin{aligned} (\text{grad } V(\vec{r}))_i &= \partial_i V(r) = V'(r) \frac{x_i}{r} \\ &= -F_i(r) = -\frac{F(r)}{r} x_i \end{aligned}$$

$$\leadsto V'(r) = -F(r) \quad \leadsto V(r) = -\int dr F(r)$$

D.h. Zentralkräfte sind konservativ.

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}}_{\text{ges}} &= \vec{0} \quad \text{wg. Zentralkraft (s.o.)} \\ &= \dot{\vec{L}}_S + \dot{\vec{L}} \end{aligned}$$

Wähle $\vec{R} = \vec{0}$, d.h. lege Ursprung in den Schwerpunkt.

$$\leadsto \dot{\vec{L}}_S = \vec{0} \quad \leadsto \dot{\vec{L}} = \vec{0} \quad \leadsto \vec{L} = m \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \text{const}$$

△ Bewegung verläuft in Ebene $\perp \vec{L}$

Wähle Polarkoordinaten: $\vec{r} = r \hat{r}$, $\dot{\vec{r}} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\varphi} \hat{\varphi}$

$$\vec{L} = m r^2 \dot{\varphi} \hat{r} \times \hat{\varphi} = m r^2 \dot{\varphi} \hat{z} \quad (\text{Zylinderkoordinaten})$$

NB: $r^2 \dot{\varphi} = \text{const}$ (wie gehabt)

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= \frac{m_1}{2} \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\vec{r}}_2^2 = \dots = \frac{M}{2} \dot{\vec{R}}^2 + \frac{I}{2} \dot{\varphi}^2 \\ &= \frac{I}{2} \dot{\varphi}^2 \quad \text{wg. } \vec{R} = \vec{0} \\ &= \frac{I}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) \end{aligned}$$

Verwende $\dot{\varphi} = \frac{L}{m r^2}$

$$\curvearrowright E_{\text{kin}} = \underbrace{\frac{m}{2} \dot{r}^2}_{\text{kin. Energie der Radialbewegung}} + \underbrace{\frac{L^2}{2 m r^2}}_{\text{Rotationsenergie}}$$

$$E = E_{\text{kin}} + V(r) = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r)$$

Effektivpotential $V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$

Löse Bewegungsgl. durch Sep. der Variablen.

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E - V_{\text{eff}}(r))}$$

$$\pm \int_{t_0}^t dt' = \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - V_{\text{eff}}(r'))}}$$

$$= \pm (t - t_0)$$

$$\hookrightarrow t = t(r) \quad \hookrightarrow r = r(t)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{mr^2}, \quad r(t) \text{ bereits bekannt}$$

$$\leadsto d\varphi = dt \frac{L}{mr^2} \quad \leadsto \varphi - \varphi_0 = \frac{L}{m} \int_{t_0}^t \frac{dt'}{r^2(t')} \quad \text{zu kompliziert}$$

$$\text{Alternativ: } \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E - V_{\text{eff}}(r))} \quad \text{Funktion von } r$$

$$d\varphi = \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{\dot{r}} = \pm \frac{L}{r^2 m} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - V_{\text{eff}}(r))}}$$

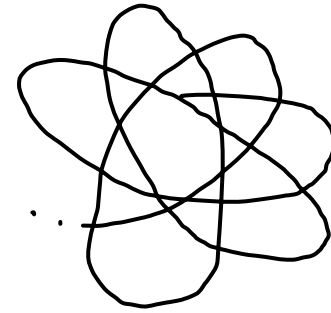
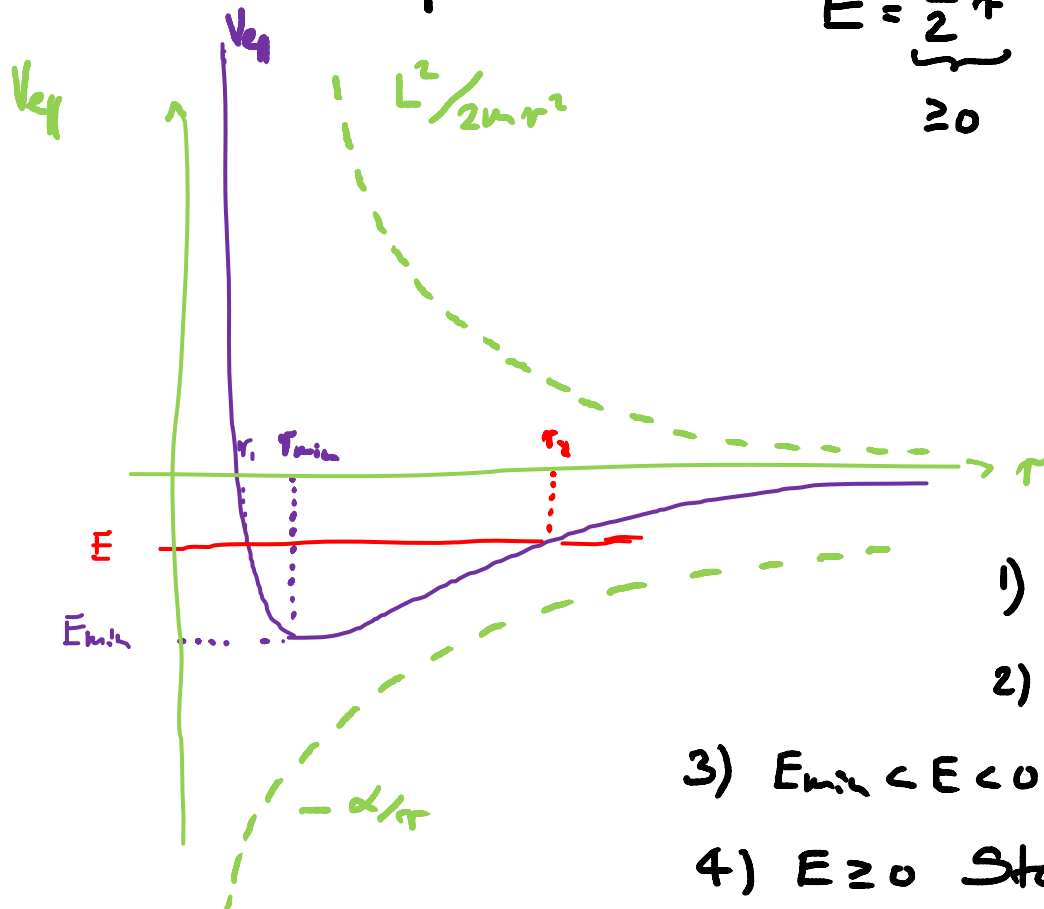
$$\leadsto \pm (\varphi - \varphi_0) = \frac{L}{r^2 m} \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{E - V_{\text{eff}}(r')}}$$

$$\leadsto \varphi = \varphi(r) = \varphi(r(t)) = \varphi(t)$$

Effektivpotential $V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r)$

Sei $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$.

$$E = \underbrace{\frac{\mu}{2} \dot{r}^2}_{\geq 0} + V_{\text{eff}}(r) = \text{const}$$



1) $E < E_{\text{min}}$ ausgeschlossen

2) $E = E_{\text{min}}$ Kreisbewegung $r = r_{\text{min}}$

3) $E_{\text{min}} < E < 0$ Rosettenbahn $r_1 \leq r \leq r_2$

4) $E \geq 0$ Stoß gegen Potentialbarriere

2+3: gebundener Zustand, 4: ungebundener (Streu-)Zustand

Periode der Radialbewegung: $T = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - V_{\text{eff}}(r))}}$

Während T überstrichener Umlauf:

$$\Delta\varphi = 2 \frac{L}{\sqrt{2m}} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - V_{\text{eff}}(r)}}$$

Bedingung für geschlossene Bahn: $n \Delta\varphi = m \cdot 2\pi$ ($n, m \in \mathbb{Z}$) (*)
 $\nearrow$
 $\neq$ Radialperioden

Periode der Gesamtbewegung: nT

Falls (*) nicht erfüllbar: keine geschlossene Bahn.

4.5.1 Keplerproblem

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad \alpha > 0: \text{attraktiv}, \quad \alpha < 0: \text{repulsiv}$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(r) = -V'(r) \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\alpha}{r^3} \vec{r}$$

$$\text{Gravitation: } \alpha = GmM, \quad G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \text{ Gravitationskonstante}$$

$$\text{Coulomb-Feld: } \alpha = -q_1 q_2 / (4\pi\epsilon_0), \quad \epsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \\ \text{Dielektrizitätskonstante}$$

Erhaltungsgrößen:

0) Impuls $\leadsto$ Schwerpunktbewegung abgepaart

1) Energie $E = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - \frac{\alpha}{r}$

2) Drehimpuls $\vec{L} = m \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$

3) Lenz-Runge-Vektor $\vec{A} = \dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \frac{\alpha}{r} \vec{r}$

$$\dot{E} = 0, \quad \dot{\vec{L}} = \dot{\vec{A}} = \vec{0}$$

Richtung von $\vec{A}$:

Wähle Umkehrpunkt, d.h. $\vec{r} \perp \dot{\vec{r}}$ ($\dot{r}=0$)

$$\text{NR: } \dot{\vec{r}} \times \vec{L} = m \dot{\vec{r}} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = m \dot{\vec{r}} \dot{\vec{r}}^2 \sim \dot{\vec{r}}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

D.h. $\vec{A} = (m \dot{\vec{r}}^2 - \frac{\alpha}{r}) \vec{r}$ zeigt zu einem der Umkehrpunkte

Betrag von $\vec{A}$:

$$\text{NR: } (\dot{\vec{r}} \times \vec{L}) \cdot \vec{r} = (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \cdot \vec{L} = \frac{\vec{L}^2}{m}$$

$$(\dot{\vec{r}} \times \vec{L})^2 = \dot{\vec{r}}^2 L^2$$

$$\begin{aligned} A^2 &= \underbrace{\dot{\vec{r}}^2 L^2 - 2 \frac{\alpha}{r} \frac{L^2}{m}}_{= \frac{2L^2}{m} \left(\frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - \frac{\alpha}{r} \right)} + \alpha^2 = \frac{2L^2}{m} E + \alpha^2 \\ &= \frac{2L^2}{m} \left(\frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - \frac{\alpha}{r} \right) \end{aligned}$$

$$A = \alpha \varepsilon, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{m \alpha^2}} \quad \text{numerische Exzentrizität}$$

$$\vec{A} = \dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \frac{\alpha}{r} \vec{r} \quad \text{Lenz-Runge-Vektor}$$

Berechne Bahnkurve (ohne Integration)

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = \frac{L^2}{m} - \alpha r$$

$$= A r \cos \varphi = \alpha \varepsilon r \cos \varphi$$

$$\leadsto r(\varphi) = \frac{k}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad k = \frac{L^2}{m \alpha} \quad \text{Parameter (Höhe über den Brennpunkt)}$$

$$\text{Kegelschnitt!} \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{m \alpha^2}}$$

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} \quad \leadsto \quad E_{\text{min}} = -\frac{m \alpha^2}{2L^2}, \quad r_{\text{min}} = \frac{L^2}{m \alpha}$$

Fälle:

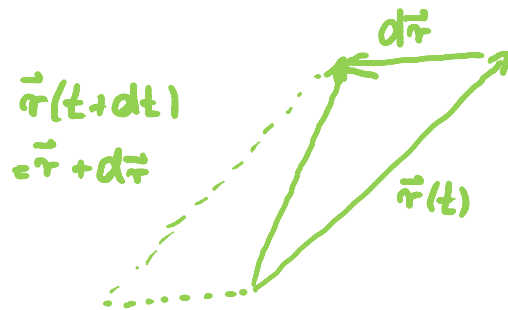
- 1) $\varepsilon = 0$: $E = E_{\min}$ Kreisbewegung mit $r = r_{\min}$
- 2) $0 < \varepsilon < 1$: $E_{\min} < E < 0$ Ellipsenbahn
- 3) $\varepsilon = 1$: $E = 0$ Parabelbahn
- 4) $\varepsilon > 1$: $E > 0$ Hyperbelbahn

4.5.2 Gebundene Bewegung ($E_{\min} \leq E < 0$)

1. **Keplersches Gesetz:** Planetenbahnen sind Ellipsen mit Sonne in einem der Brennpunkte.

Näherung: $M_{\odot} \gg m_{\text{Planet}}$

$$\left. \begin{array}{l} a^2 = e^2 + b^2 \\ \varepsilon = \frac{a}{b} \\ k = \frac{a}{b^2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = \frac{k}{1 - \varepsilon^2} = \frac{\alpha}{-2E} \quad \text{hängt nur von } E \text{ ab!} \\ b = \sqrt{ak} = \frac{L}{\sqrt{-2\mu E}} \sim L \text{ für } E = \text{const.} \end{array}$$



$$d\vec{F} = \frac{1}{2} \vec{r} \times d\vec{r} \quad \text{Normalenvektor des Flächenelements}$$

$$\frac{d\vec{F}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{L}}{2\mu} = \text{const}$$

2. Keplersches Gesetz (Flächensatz):

Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Flächeninhalt der Ellipse: $F = \pi ab = \pi a \frac{L}{\sqrt{2\mu E}}$

$$= \int_0^T dt \frac{dF}{dt} = \frac{L}{2\mu} T$$

$$\leadsto T = \pi a \sqrt{\frac{2\mu}{-E}} = 2\pi a \sqrt{\frac{\mu a}{\alpha}}$$

$$\leadsto \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 \mu}{\alpha} = \text{const}$$

Gravitation: $\alpha = G m M$ $\leadsto \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$

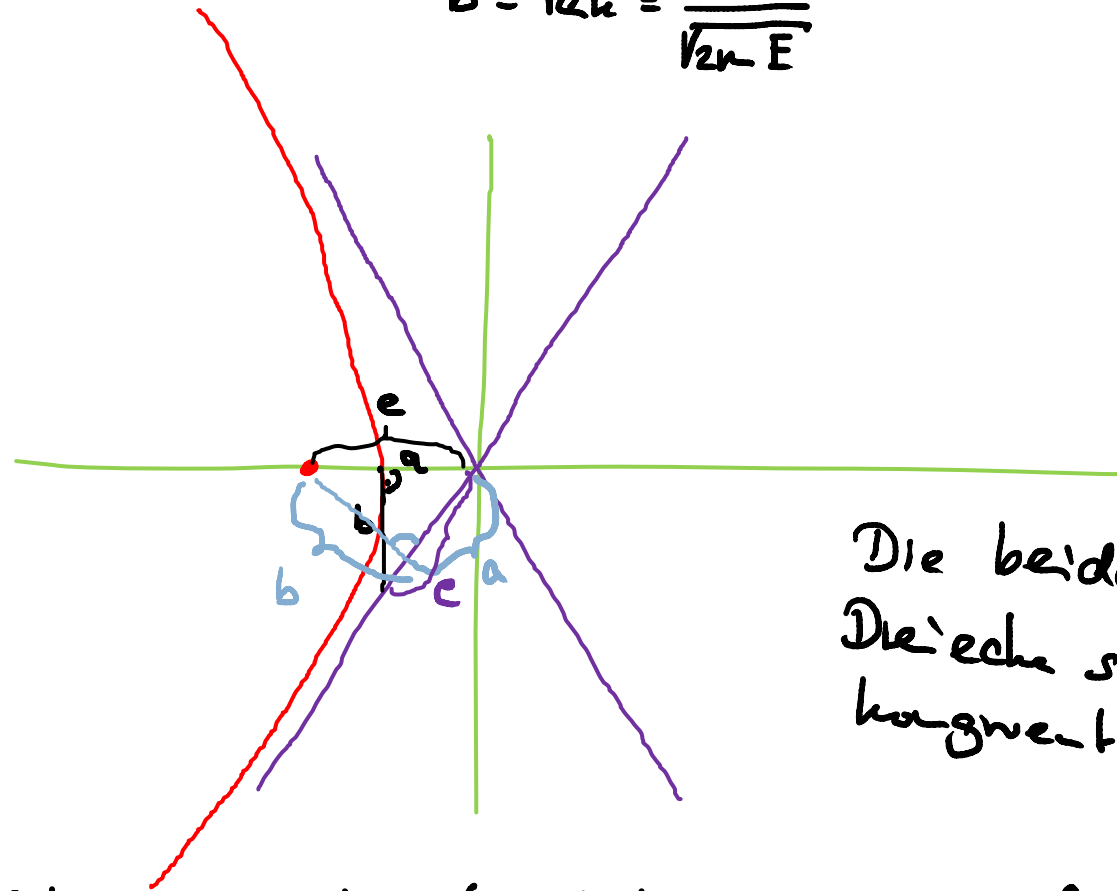
Planet $\nearrow$ $\nwarrow$ Sonne

$$\leadsto \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \quad \text{für Planeten 1, 2}$$

3. Keplersches Gesetz: 2. Potenzen der Umlaufzeiten verhalten sich wie 3. Potenzen der gr. Halbachsen.

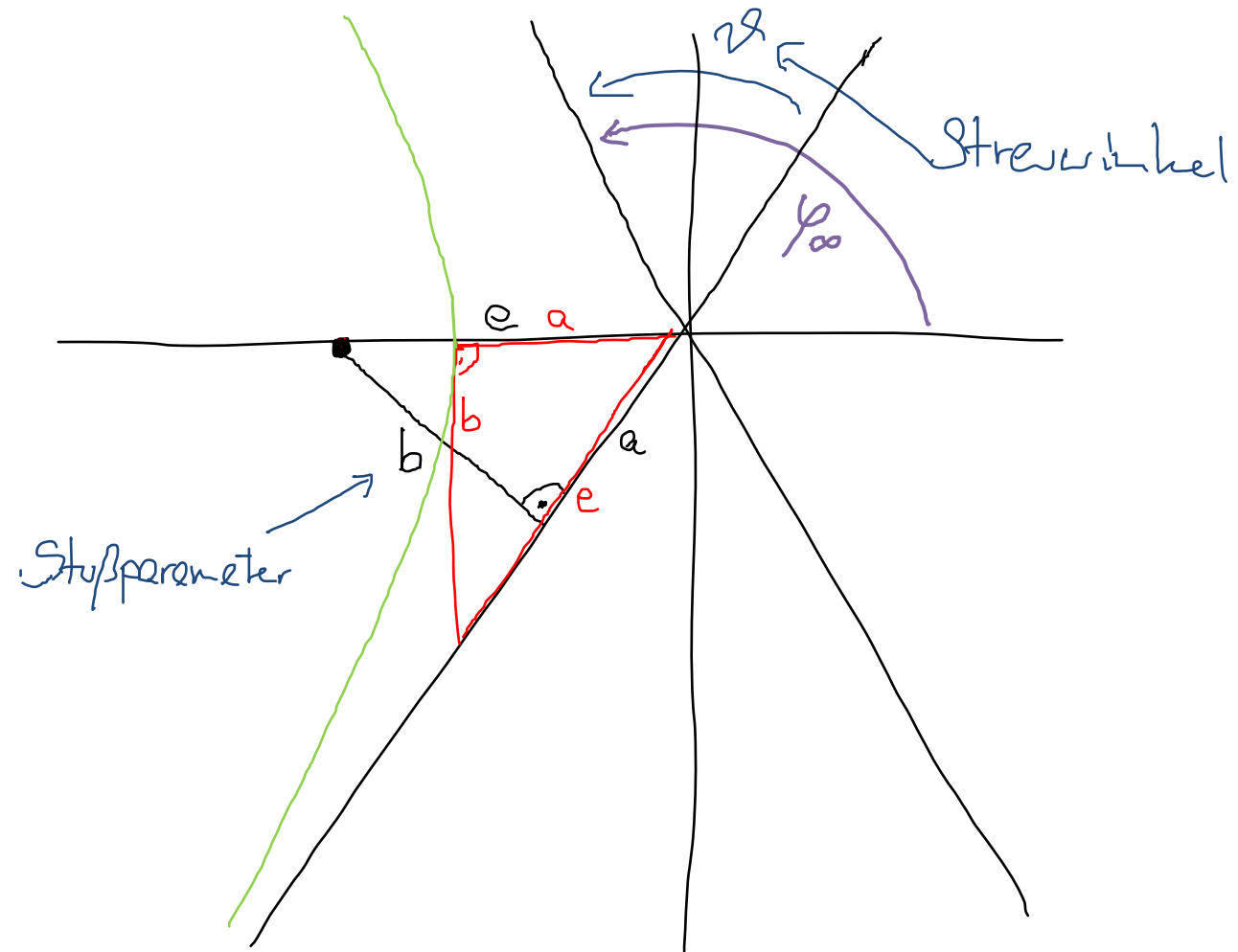
4.5.3 Ungebundene Bewegung ($E > 0$)

$$\left. \begin{aligned} b^2 = e^2 - a^2 &= a^2(\varepsilon^2 - 1) \\ &= ak \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} a &= \frac{k}{\varepsilon^2 - 1} = \frac{\alpha}{2E} \\ b &= \sqrt{ak} = \frac{L}{\sqrt{2mE}} \end{aligned}$$



Die beiden
Dreiecke sind
kongruent

↪ Stoppparameter (= Abstand zwischen Asymptote
und Brennpunkt) = b



Problem: Finde $\vartheta(b)$.

$$1 + \varepsilon \cos \varphi_\infty = 0 \quad \leadsto \quad \cos \varphi_\infty = -\frac{1}{\varepsilon}$$

$$\pi - \varphi_\infty = \frac{\pi - \vartheta}{2} \quad \leadsto \quad \varphi_\infty = \frac{\pi + \vartheta}{2}$$

$$-\frac{1}{\varepsilon} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta}{2}\right) = \sin \frac{\vartheta}{2} = -\sin \frac{\vartheta}{2}$$

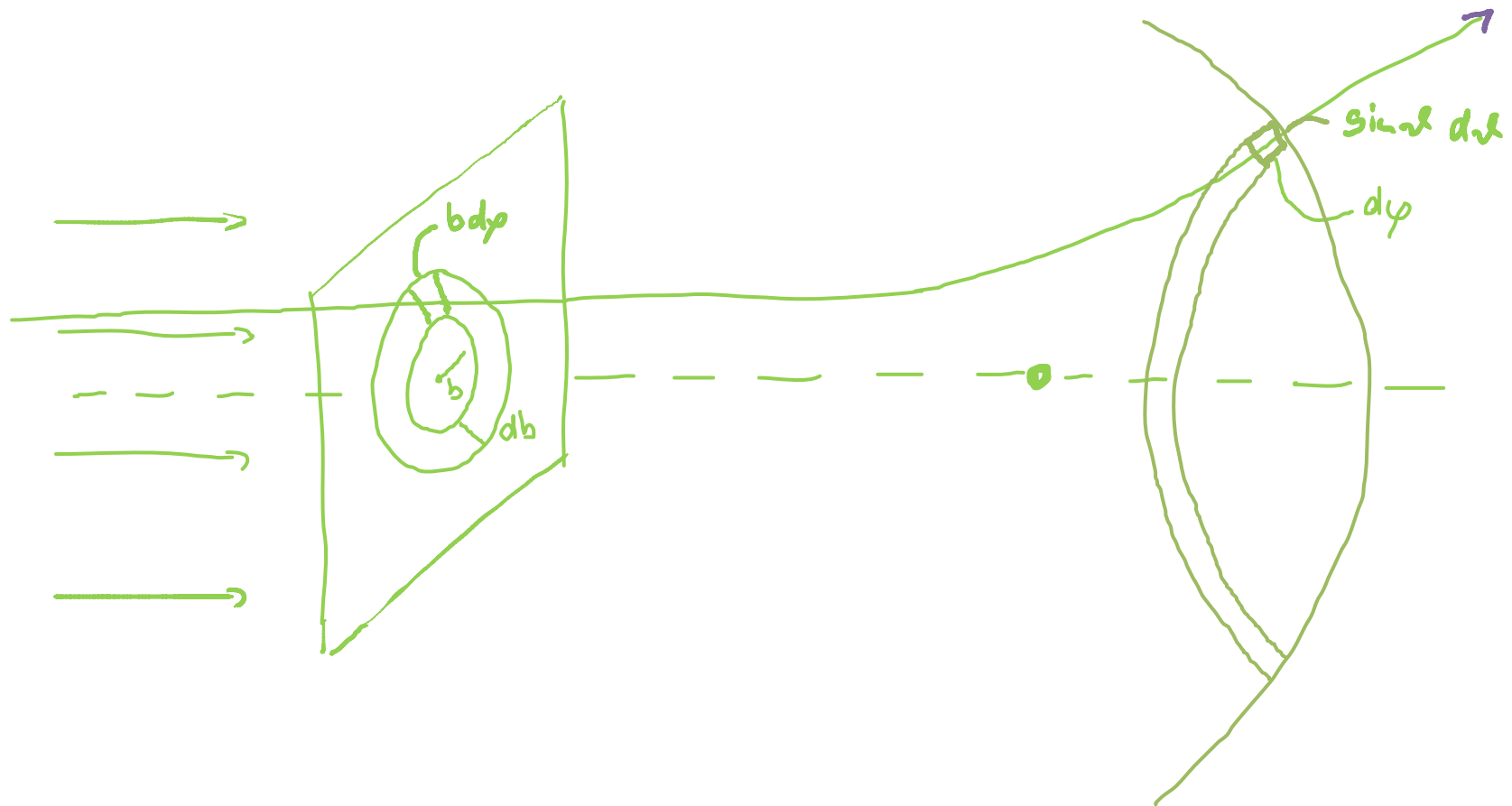
$$\tan \frac{\vartheta}{2} = \frac{\sin \frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}} = \frac{1/\varepsilon}{\sqrt{1 - 1/\varepsilon^2}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} = \frac{a}{b} = \frac{\alpha}{2Eb}$$

$$\leadsto \vartheta(b) = 2 \arctan \frac{\alpha}{2Eb}$$

$$b(\vartheta) = \frac{\alpha}{2E} \cot \frac{\vartheta}{2}$$

Strahldichte $j = \#$ der einfallenden Teilchen pro Zeit-
und Flächeneinheit

Raumwinkelelement $d\Omega = \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$



Wirkungsquerschnitt (Dimension einer Fläche)

$$\begin{aligned}
 d\sigma &= \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \\
 &= \frac{\# \text{ Teilchen in } d\Omega \text{ pro Zeiteinheit}}{j} \\
 &= \frac{j \, db \, b \, d\varphi}{j} = b \, db \, d\varphi
 \end{aligned}$$

↪ differentieller Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b \, db \, d\varphi}{\sin^2 \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi} = \frac{b}{\sin^2 \vartheta} \frac{db}{d\vartheta}$$

NB: $b \uparrow \leadsto \vartheta \downarrow$, d.h. $\frac{db}{d\vartheta} < 0$

$$\leadsto \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{-b}{\sin^2 \vartheta} \frac{db}{d\vartheta}$$

hier: $b = \frac{\alpha}{2E} \cot \frac{\vartheta}{2} \leadsto \frac{db}{d\vartheta} = -\frac{\alpha}{4E} \frac{1}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}}$

$$\sin \vartheta = 2 \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2}$$

$$\leadsto \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{16E^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}} \quad \text{Rutherford'sches Streugesetz} \\ (\text{in Schwerpunktsystem})$$

$$\vartheta \text{ fest: } d\sigma/d\Omega \sim 1/E^2$$

$$E \text{ fest, } |\vartheta| \ll 1 : d\sigma/d\Omega \sim 1/\vartheta^4$$

5 Matrizen und Tensoren

$(m \times n)$ -Matrix : rechteckiges Zahlenschema

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

Zeilen zuerst, Spalten später.

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \text{ für } i=1, \dots, m, \quad j=1, \dots, n.$$

Beispiele:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5.1 Rechnen mit Matrizen

$$A = (a_{ij}), \quad B = (b_{ij}), \quad C = (c_{ij})$$

1) Addition $C = A + B$: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

2) Multiplikation mit Zahl λ $\lambda A = (\lambda a_{ij})$

3) Matrixmultiplikation $C = AB$: $c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & c_{ij} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots & b_{1j} & \dots \\ \dots & b_{2j} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & b_{nj} & \dots \end{pmatrix}$$

Beispiel: $A + B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$$

Rechenregeln:

(a) $A + B = B + A$

(b) $A(B + C) = AB + AC$

(c) $A(BC) = (AB)C = ABC$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \neq A \cdot B$ ist nicht kommutativ.

Kommutator $[A, B] = AB - BA$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$= (a_{ij})$

$A \vec{x} = \vec{b}$, $A, \vec{b}$ gegeben, $\vec{x}$ gesucht (lineares Gleichungssystem)
 n Gleichungen für n Unbekannte.

Transponierte $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ji})$

Zeilen und Spalten vertauschen

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Beweis: $((AB)^T)_{ij} = (AB)_{ji} = A_{jk} B_{ki} = (A^T)_{kj} (B^T)_{ik}$

$\nearrow$
 Einskeln

$$= (B^T)_{ik} (A^T)_{kj} = (B^T A^T)_{ij}$$

5.2 Quadratische Matrizen

A, B $n \times n$ -Matrizen

$\alpha A + \beta B$ $n \times n$

$A \cdot B$ $n \times n$

$E = (\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ Einheitsmatrix

$$EA = AE = A$$

$n \times n$ -Matrizen bilden Algebra.

Determinante $|A| = \det A$

$$A = (a_{ij}), \quad A^T = (a_{ji}), \quad A^* = (a_{ij}^*), \quad A^+ = (A^*)^T = (A^T)^* = (a_{ji}^*)$$

$\uparrow$ transponiert $\uparrow$ komplex konjugiert $\uparrow$ hermitesch konjugiert

$$|A^T| = |A|, \quad |A^*| = |A^\dagger| = |A|^*$$

$$|AB| = |A| |B|$$

$|A| \neq 0 \Rightarrow$ Inverse A^{-1} existiert und ist eindeutig.

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E$$

$$|A^{-1}| |A| = |E| = 1 \quad \wedge \quad |A^{-1}| = |A|^{-1}$$

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$|A| \neq 0 \quad \wedge \quad A^{-1} \text{ existiert} \quad \wedge \quad A^{-1}A\vec{x} = E\vec{x} = \underline{\underline{\vec{x}}} \\ = \underline{\underline{A^{-1}\vec{b}}}$$

$$A^T = A \quad \text{symmetrisch}$$

$$A^* = A \quad \text{reell}$$

$$A^\dagger = A \quad \text{hermitesch}$$

$$\text{Sp } A = \sum_{i=1}^n a_{ii} \quad \text{Spur}$$

$$\text{Beispiel: } \text{Sp} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 5$$

$$\text{Sp } A^T = \text{Sp } A$$

$$\begin{aligned} \text{Sp } A^* &= (\text{Sp } A)^* \\ &= \text{Sp } A^T \end{aligned}$$

$$\text{Sp } A = 0 : A \text{ spurlos}$$

5.2.2 Eigenwerte und Eigenvektoren

$$A \vec{x} = \lambda \vec{x}, \quad \vec{x} \neq \vec{0}$$

$\nwarrow$ Eigenvektor $\nwarrow$ Eigenwert

NB: Auch $\alpha \vec{x}$ ($\alpha \neq 0$) ist Eigenvektor.

$\leadsto$ Eigenvektoren dürfen auf 1 normiert werden.

$$(A - \lambda E) \vec{x} = \vec{0}$$

$|A - \lambda E| \neq 0$: $\vec{x} = (A - \lambda E)^{-1} \vec{0} = \vec{0}$ eindeutige Lösung, trivial.
kein Eigenvektor.

Verlange $|A - \lambda E| = 0$ (charakteristische Gleichung)

$$= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Polynom nter} \\ \text{Grades in } \lambda \end{array}$$

$$= a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \dots + a_{n-1} \lambda^{n-1} + (-1)^n \lambda^n = \chi_n(\lambda)$$

charakteristisches Polynom

hat n (komplexe) Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

$$\chi_n(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda)$$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$0 = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4$$

$$\leadsto \lambda_{\pm} = 1 \pm 2$$

$$\lambda_+ = 3: \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leadsto \begin{cases} -2x_1 + 4x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\leadsto x_1 = 2x_2$$

$$1 = |\vec{x}_+| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = |x_2| \sqrt{5}$$

$$\vec{x}_+ = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_- = -1: \vec{x}_- = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_+ \cdot \vec{x}_- = -\frac{3}{5} \neq 0, \text{ d.h. } \vec{x}_+, \vec{x}_- \text{ nicht senkrecht aufeinander.}$$

Satz 1: Die EW einer reellen, symmetrischen Matrix sind reell.

Bew.: $(a_{ij} - \lambda \delta_{ij}) x_j = 0$, $A = (a_{ij})$, $E = (\delta_{ij})$

$$\begin{aligned}
 &\leadsto (a_{ij} - \lambda \delta_{ij}) x_i^* x_j = 0 \\
 &\leadsto (a_{ij} - \lambda^* \delta_{ij}) x_i x_j^* = 0 \\
 &\leadsto (a_{ji} - \lambda^* \delta_{ji}) x_i x_j^* = 0 \\
 &\leadsto (a_{ij} - \lambda^* \delta_{ij}) x_j x_i^* = 0
 \end{aligned}
 \quad \rightarrow \quad (\lambda - \lambda^*) \delta_{ij} x_i^* x_j = (\lambda - \lambda^*) \underbrace{\sum_i |x_i|^2}_{>0} = 0$$

$\Rightarrow \lambda^* = \lambda$, d.h. λ reell.

Satz 2: Die EV einer reellen, symmetrischen Matrix zu verschiedenen EW sind orthogonal.

Bew.: $A_{ij} x_j = \alpha x_i$, $A_{ij} y_j = \beta y_i$ $\alpha \neq \beta$

$$\wedge \quad A_{ij} y_i x_j = \alpha y_i x_i \quad , \quad A_{ij} x_i y_j = \beta x_i y_i$$

$$= A_{ji} y_i x_j$$

$$= A_{ij} y_j x_i$$

$$\Rightarrow (\alpha - \beta) x_i y_i = 0 \Rightarrow x_i y_i = 0 \text{ d.h. } \vec{x}, \vec{y} \text{ orthogonal.}$$

5.3 Drehung des Koordinatensystems

$\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ ursprüngliches Koordinatensystem

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}, \quad \hat{e}_i \cdot (\hat{e}_j \times \hat{e}_k) = \epsilon_{ijk}$$

$\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3$ gedrehtes K.S.

$$\hat{e}'_i \cdot \hat{e}'_j = \delta_{ij}, \quad \hat{e}'_i \cdot (\hat{e}'_j \times \hat{e}'_k) = \epsilon_{ijk}$$

$$\hat{e}'_i = d_{ij} \hat{e}_j$$

$$\hat{e}'_i \cdot \hat{e}_j = d_{ik} \hat{e}_k \cdot \hat{e}_j = d_{ij} = \cos \varphi_{ij}, \quad \varphi_{ij} = \angle(\hat{e}'_i, \hat{e}_j)$$

Matrix $D = (d_{ij})$ Drehmatrix

$$1) \delta_{ij} = \hat{e}'_i \cdot \hat{e}'_j = d_{ik} \hat{e}_k \cdot d_{jl} \hat{e}_l = d_{ik} d_{jl} \delta_{kl} = d_{ik} d_{jk}$$

$$\leadsto E = D D^T$$

$$\leadsto D^{-1} E = D^{-1} \\ = D^{-1} D D^T = E D^T = D^T \leadsto \boxed{D^{-1} = D^T}$$

$$\begin{aligned}
2) \quad \varepsilon_{ijk} &= \hat{e}'_i \cdot (\hat{e}'_j \times \hat{e}'_k) = \det \hat{e}'_l \cdot (d_{jn} \hat{e}_n \times d_{kn} \hat{e}_n) \\
&= \det d_{jn} d_{kn} \varepsilon_{lmn} \\
&= \varepsilon_{ijk} \det D \\
&\Rightarrow \boxed{\det D = 1}
\end{aligned}$$

Beispiel: $D(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$

$$DD^T = I, \det D = 1 \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned}
D(\varphi_2) D(\varphi_1) &= \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & \sin \varphi_2 \\ -\sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 \\ -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) & \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \\ -\sin(\varphi_1 + \varphi_2) & \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \end{pmatrix} = D(\varphi_1 + \varphi_2)
\end{aligned}$$

$$D(0) = E$$

$\leadsto$ Drehgruppe

$$D(\varphi_2) D(\varphi_1) = D(\varphi_1 + \varphi_2) = D(\varphi_1) D(\varphi_2)$$

Drehgruppe kommutativ in 2D.

5.3.1 Transformation von Vektoren

Betrachte festen Vektor in ursprünglichen und gekehrten Koordinatensystem,

$$\vec{r} = x_i \hat{e}_i$$

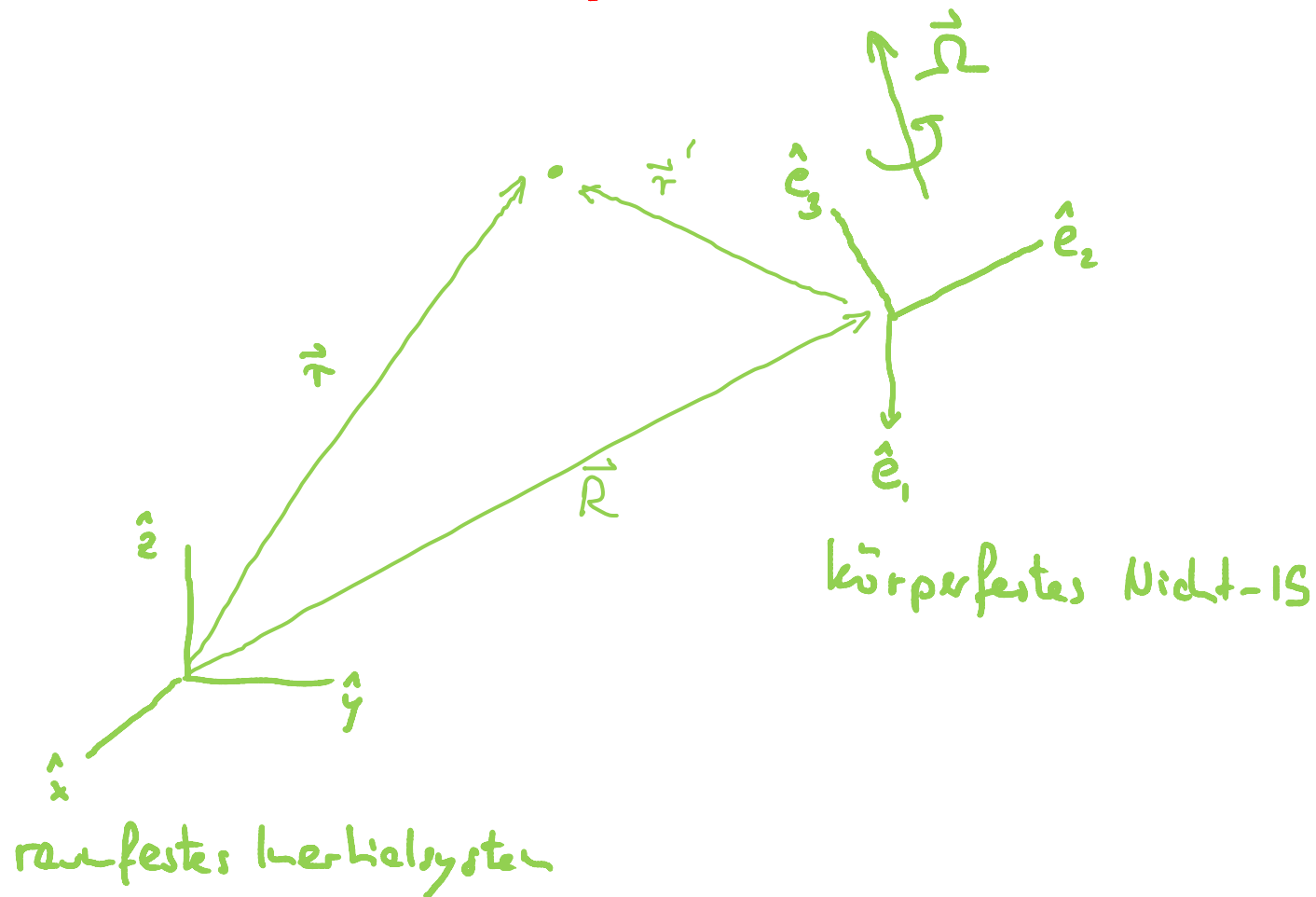
$$= x'_i \hat{e}'_i$$

$$\hat{e}'_i \cdot \vec{r} = x'_i$$

$$= x_j \underbrace{\hat{e}'_i \cdot \hat{e}_j}_{= d_{ij}}$$

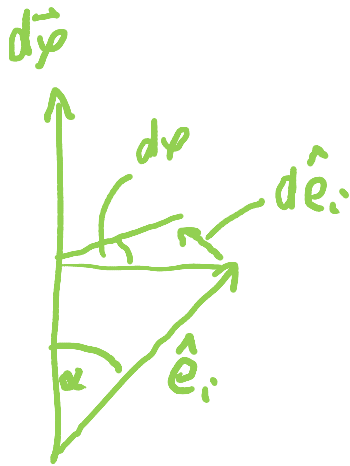
$$\leadsto \boxed{x'_i = d_{ij} x_j}$$

6. Beschleunigte Bezugssysteme



$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}', \quad \vec{r}' = \hat{e}_i r'_i \quad \text{wobei} \quad \hat{e}_i = \hat{e}_i(t)$$

$\vec{R}(t), \vec{\Omega}(t)$ vorgegeben



$$d\vec{\varphi} = \hat{n} d\varphi$$

$$|\hat{n} \times \hat{e}_i| = 1 \cdot 1 \cdot \sin \alpha$$

$$\begin{aligned} |d\hat{e}_i| &= d\varphi \sin \alpha \\ &= d\varphi |\hat{n} \times \hat{e}_i| \\ &= |d\vec{\varphi} \times \hat{e}_i| \end{aligned}$$

$$d\hat{e}_i = d\vec{\varphi} \times \hat{e}_i$$

$$\frac{d\hat{e}_i}{dt} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \hat{e}_i$$

$$\boxed{\dot{\hat{e}}_i = \vec{\Omega} \times \hat{e}_i}$$

NB: $\vec{R}$ liefert nur Parallelverschiebung des bewegten Dreiecks $\leadsto$ kein Einfluss auf $\dot{\hat{e}}_i$.

$$\vec{r} = \vec{R} + \hat{e}_i r'_i$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \vec{\Omega} \times \hat{e}_i r'_i + \hat{e}_i \dot{r}'_i$$

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} = & \ddot{\vec{R}} + \dot{\vec{\Omega}} \times \hat{e}_i r'_i + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \hat{e}_i) r'_i + \vec{\Omega} \times \hat{e}_i \dot{r}'_i \\ & + \dot{\vec{\Omega}} \times \hat{e}_i \dot{r}'_i + \hat{e}_i \ddot{r}'_i \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{l} \dot{\vec{r}}'_i = \hat{e}_i \dot{r}'_i \\ \ddot{\vec{r}}'_i = \hat{e}_i \ddot{r}'_i \end{array} \right\} \text{ wie im körperfesten Bezugssystem rechnen}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}} + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}' + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') + 2 \vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}}' + \ddot{\vec{r}}'$$

Betrachte äußeres Kraftfeld, z.B. Gravitation

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} = - \frac{\partial}{\partial \vec{r}} V(\vec{r}) \quad , \quad V(\vec{r}) = \text{Potential}$$

$$V(\vec{r}) = V(\vec{r}) = V(\vec{R} + \vec{r}')$$

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} V'(\vec{r}') = \frac{\partial}{\partial x'_i} V(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x_j} V(\vec{r}) \underbrace{\frac{\partial x_j}{\partial x'_i}}_{=\delta_{ij}} = \frac{\partial}{\partial x_i} V(\vec{r})$$

D.h. äußere Kraft in beiden Systemen gleich.

$$m \ddot{\vec{r}} = - \frac{\partial}{\partial \vec{r}} V(\vec{r}) = - \frac{\partial}{\partial \vec{r}'} V'(\vec{r}')$$

$$m \ddot{\vec{r}}' = - \frac{\partial V'(\vec{r}')}{\partial \vec{r}'}$$

äußere Kraft

$$- m \ddot{\vec{R}}$$

Trägheitskraft der Translation

$$- 2m \vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}}'$$

Coriolis-Kraft

$$- m \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}')$$

Zentrifugalkraft

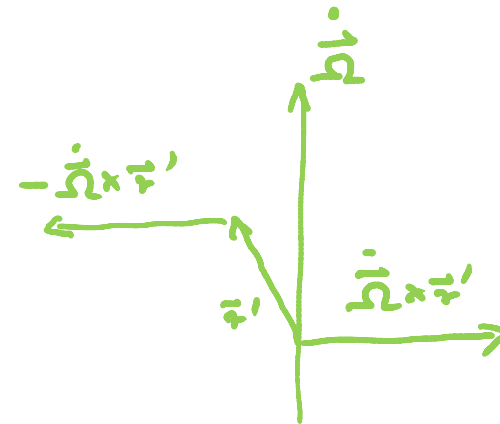
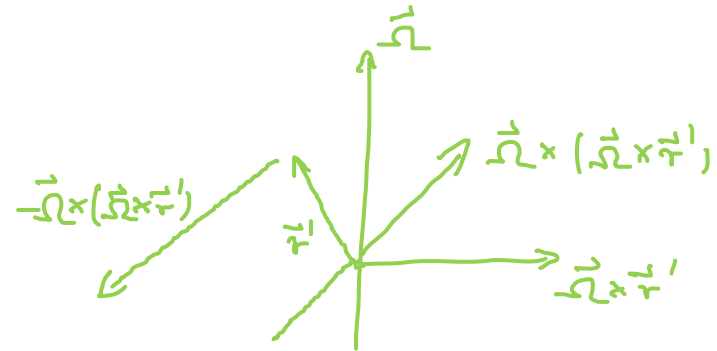
$$- m \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}'$$

Trägheitskraft der Rotation (Azimutalkraft)

Beschleunigter Beobachter sieht neben äußere Kraft noch 4 Scheinkräfte.

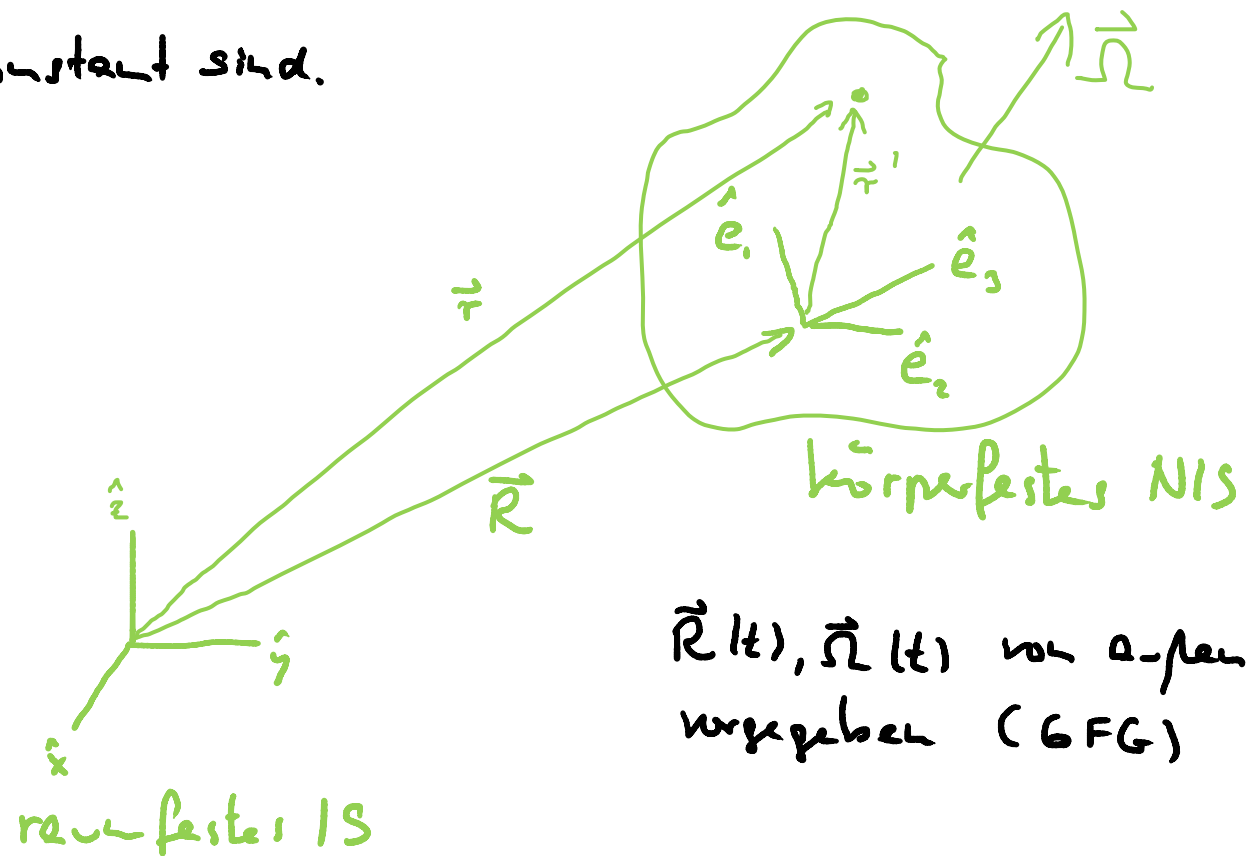
Richtungen:

- 1) $-\kappa \ddot{\vec{R}}$ entgegen Beschleunigung des NIS
- 2) $-2\kappa \vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}}' \perp \vec{\Omega}, \vec{v}'$
- 3) $-\kappa \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}')$ senkrecht zur Drehachse weg
- 4) $-\kappa \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}'$ entgegen der Azimutalrichtung



7 Starrer Körper

System von N Massenpunkten m_α , deren Relativabstände $|\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta|$ konstant sind.



$\vec{R}(t), \vec{\Omega}(t)$ von a-priori
vorgegeben (6 FG)

$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}'(t), \quad \vec{r}'(t) = \hat{e}_i(t) r'_i$$

$$\dot{\hat{e}}_i(t) = \vec{\Omega}(t) \times \hat{e}_i(t)$$

Berechne kinetische Energie.

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \underbrace{\dot{\hat{e}}_i \cdot \vec{r}'_i}_{\vec{\Omega} \times \hat{e}_i} = \dot{\vec{R}} + \vec{\Omega} \times \vec{r}'$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\dot{\vec{R}} + \vec{\Omega} \times \vec{r}'_{\alpha})^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} \right) \dot{\vec{R}}^2 + \dot{\vec{R}} \cdot \left(\vec{\Omega} \times \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}'_{\alpha} \right) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \underbrace{(\vec{\Omega} \times \vec{r}'_{\alpha})^2}_{= \vec{\Omega}^2 \vec{r}'_{\alpha}^2 - (\vec{\Omega} \cdot \vec{r}'_{\alpha})^2} \end{aligned}$$

Gesamtmasse $M = \sum_{\alpha} m_{\alpha}$

Lege Ursprung des körperfesten NIS in Schwerpunkt des starren Körpers. $\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}'_{\alpha} = \vec{0}$.

$$T = \underbrace{\frac{M}{2} \dot{\vec{R}}^2}_{= T_S} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} [\vec{\Omega}^2 \vec{r}'_{\alpha}^2 - (\vec{\Omega} \cdot \vec{r}'_{\alpha})^2]}_{= T_{\text{rot}}}$$

kin. En. d. Schwerpunkth. Bewegung $= T_S$ Rotationsenergie $= T_{\text{rot}}$

7.2 Trägheitskennsur

$$\begin{aligned}
 T_{rot} &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \left(\underbrace{\Omega_i \Omega_i}_{= \Omega_i \Omega_j \delta_{ij}} \tau'_{\alpha i} \tau'_{\alpha i} - \Omega_i \Omega_j \tau'_{\alpha i} \tau'_{\alpha j} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \Omega_i \Omega_j \underbrace{\sum_{\alpha} m_{\alpha} (\delta_{ij} \tau'^2_{\alpha} - \tau'_{\alpha i} \tau'_{\alpha j})}_{= I_{ij} \text{ Trägheitskennsur}} = \frac{1}{2} \vec{\Omega}^T \mathbf{I} \vec{\Omega}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\tau'^2_{\alpha 1} + \tau'^2_{\alpha 3}) & - \sum_{\alpha} m_{\alpha} \tau'_{\alpha 1} \tau'_{\alpha 2} & - \sum_{\alpha} m_{\alpha} \tau'_{\alpha 1} \tau'_{\alpha 3} \\ & \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\tau'^2_{\alpha 1} + \tau'^2_{\alpha 3}) & - \sum_{\alpha} m_{\alpha} \tau'_{\alpha 2} \tau'_{\alpha 3} \\ \text{sym.} & & \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\tau'^2_{\alpha 1} + \tau'^2_{\alpha 2}) \end{pmatrix}$$

I_{11}, I_{22}, I_{33} Trägheitsmomente, $I_{11} + I_{22} \geq I_{33}$ et cycl.

I_{12}, I_{23}, I_{31} Deviationsmomente, Trägheitsprodukte

$$I_{ji} = I_{ij}^* = I_{ij} \quad \wedge \quad \text{EU reell: } I_{ij}^* = I_{ij} \\ \text{EV paarweise } \perp: \vec{n}_i^T \vec{n}_j = \delta_{ij} \quad (\text{nach Normierung})$$

$$I \vec{n}_i = I_i \vec{n}_i \quad (\text{keine Lineation})$$

$$\vec{n}_i^T I \vec{n}_j = I_j \vec{n}_i^T \vec{n}_j = I_i \delta_{ij}$$

Skalare $\vec{n}_i^T I \vec{n}_j$ sind Elemente einer 3×3 -Matrix.

$$(\vec{n}_i^T I \vec{n}_j) = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \quad (*)$$

$$\text{Definiere } D = \begin{pmatrix} \vec{n}_1^T \\ \vdots \\ \vec{n}_2^T \\ \vdots \\ \vec{n}_3^T \end{pmatrix}, \quad D^T = \begin{pmatrix} \vec{n}_1 & \vec{n}_2 & \vec{n}_3 \end{pmatrix}$$

$$D D^T = E \quad \wedge \quad D^{-1} = D^T, \text{ d.h. } D \text{ orthogonal (Drehmatrix)}$$

$$\text{Schreibe } (*) \text{ als } D I D^T = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \quad \text{Diagonalisierung}$$

$\vec{\Omega}_i$ definieren Hauptachsen des starren Körpers

DID^T Hauptachsentransformation
keine Lineation

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \vec{\Omega}_i^T I \vec{\Omega}_i \overset{\text{keine Lineation}}{\leftarrow} = \frac{1}{2} I : \vec{\Omega}_i^2, \text{ falls } \vec{\Omega}_i \text{ Hauptachsen}$$

EW I_1, I_2, I_3 Hauptträgheitsmomente

Jeder starrer Körper hat 3 Hauptträgheitsmomente.

Klassifizierung

- (1) $I_1 \neq I_2 \neq I_3 \neq I_1$: unsymmetrischer Körper
- (2) $I_1 = I_2 \neq I_3$: symmetrischer Körper
- (3) $I_1 = I_2 = I_3$: Kugelsymmetrie
- (4) $I_1 = I_2, I_3 = 0$: Rotationskörper, Hantel

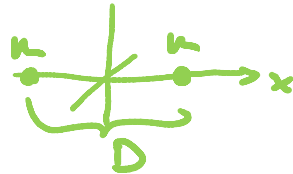
NB: I hängt vom Bezugssystem ab.

Bisher Ursprung des körperfesten Bezugssystems im Schwerpunkt

Verlege Ursprung um $\vec{a}$: $\vec{r}_\alpha^* = \vec{r}_\alpha' + \vec{a}$, $\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha' = \vec{0}$

$$\begin{aligned}
 I_{ij}^* &= \sum_\alpha m_\alpha (\delta_{ij} \vec{r}_\alpha^{*2} - r_{\alpha,i}^* r_{\alpha,j}^*) \\
 &= \sum_\alpha m_\alpha (\delta_{ij} (\vec{r}_\alpha'^2 + 2 \cancel{\vec{r}_\alpha' \cdot \vec{a}} + \vec{a}^2) - (\cancel{r_{\alpha,i}' r_{\alpha,j}'} + \cancel{r_{\alpha,i}' a_j} + \cancel{a_i r_{\alpha,j}'} + a_i a_j)) \\
 &= I_{ij} + M (\delta_{ij} \vec{a}^2 - a_i a_j) \quad \text{Satz von Steiner}
 \end{aligned}$$

Beispiele: 1) Hohlzylinder $I_{22} = I_{33} = \frac{M R^2}{2}$, $I_{ij} = 0$ sonst



2) Homogene Vollkugel $I_{ij} = \frac{2}{5} R^2 M \delta_{ij}$
 Radius R , Masse M

7.3 Impuls, Drehimpuls und Eulersche Kreisgleichungen

Gesamtimpuls $\vec{P} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\dot{\vec{R}} + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{\alpha}') =$
 $= M \dot{\vec{R}} + \vec{\Omega} \times \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}'$

Setze $\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}' = \vec{0}$: $\vec{P} = M \dot{\vec{R}}$

Gesamtkraft $\vec{F} = \sum_{\alpha} \left(\underbrace{\vec{F}_{\alpha}^e}_{\text{extern}} + \sum_{\beta \neq \alpha} \underbrace{\vec{F}_{\alpha\beta}^i}_{\text{intern}} \right)$

$$= \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^e = \vec{F}^e$$

$$= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \ddot{\vec{r}}_{\alpha} = \dot{\vec{P}} = M \ddot{\vec{R}}$$

Gesamt Drehimpuls $\vec{L} = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{R} + \vec{r}'_{\alpha}) \times (\dot{\vec{R}} + \vec{\Omega} \times \vec{r}'_{\alpha})$

$$= M \vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \vec{R} \times (\vec{\Omega} \times \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}'_{\alpha}) + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}'_{\alpha} \times \dot{\vec{R}} + \underbrace{\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}'_{\alpha} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}'_{\alpha})}_{= \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \vec{I}' \cdot \vec{\Omega} - \vec{r}'_{\alpha} (\vec{r}'_{\alpha} \cdot \vec{\Omega})}$$

Setze $\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}'_{\alpha} = \vec{0}$.

$$\vec{L} = \underbrace{\vec{R} \times M \dot{\vec{R}}}_{= \vec{L}_S} + \underbrace{\sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{r}'_{\alpha}{}^2 \vec{\Omega} - \vec{r}'_{\alpha} (\vec{r}'_{\alpha} \cdot \vec{\Omega}))}_{= \vec{L}'}$$

$\uparrow$ Drehimpuls des Schwerpunktes $\uparrow$ Relativdrehimpuls

$$L'_i = \left[\sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{r}'_{\alpha}{}^2 \delta_{ij} - r'_{\alpha,i} r'_{\alpha,j}) \right] \Omega_j = I_{ij} \Omega_j$$

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \Omega_i I_{ij} \Omega_j = \frac{1}{2} \Omega_i L'_i = \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \vec{L}'$$

Nach Hauptachsentransformation $I_{ij} = I_i \delta_{ij}$

$$L'_i = I_i \Omega_i \quad (i \text{ fest})$$

$$T_{\text{rot}} = \sum_i \frac{I_i}{2} \Omega_i^2 = \sum_i \frac{L_i'^2}{2I_i} \quad \text{vgl. } T_{\text{trans.}} = \frac{p^2}{2m}$$

$$\dot{\vec{L}}_S = \dot{\vec{R}} \times M \dot{\vec{R}} + \vec{R} \times M \ddot{\vec{R}} = \vec{R} \times \vec{F}^e$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}}' &= \sum_\alpha m_\alpha \left\{ 2 \vec{r}'_\alpha \cdot (\vec{r}'_\alpha \times \dot{\vec{r}}'_\alpha) \dot{\vec{r}}'_\alpha + \vec{r}'_\alpha{}^2 \dot{\vec{r}}'_\alpha \right. \\ &\quad \left. - \dot{\vec{r}}'_\alpha \times \vec{r}'_\alpha (\dot{\vec{r}}'_\alpha \cdot \dot{\vec{r}}'_\alpha) - \vec{r}'_\alpha \left[(\dot{\vec{r}}'_\alpha \times \dot{\vec{r}}'_\alpha) \cdot \dot{\vec{r}}'_\alpha + \dot{\vec{r}}'_\alpha \cdot \dot{\vec{r}}'_\alpha \right] \right\} \\ &= \sum_\alpha m_\alpha \left\{ \vec{r}'_\alpha{}^2 \dot{\vec{r}}'_\alpha - \vec{r}'_\alpha (\dot{\vec{r}}'_\alpha \cdot \dot{\vec{r}}'_\alpha) \right. \\ &\quad \left. + \dot{\vec{r}}'_\alpha \times \left[\vec{r}'_\alpha{}^2 \dot{\vec{r}}'_\alpha - \vec{r}'_\alpha (\dot{\vec{r}}'_\alpha \cdot \dot{\vec{r}}'_\alpha) \right] \right\} \\ &= \vec{I} \cdot \dot{\vec{r}}' + \dot{\vec{r}}' \times (\vec{I} \cdot \dot{\vec{r}}') \end{aligned}$$

$$\dot{L}'_i = I_{ij} \dot{\Omega}_j + \epsilon_{ijk} \Omega_j I_{kl} \Omega_l$$

Gesamt Drehmoment

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha} = \sum_{\alpha} (\vec{R} + \vec{r}'_{\alpha}) \times (\vec{F}_{\alpha}^e + \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{F}_{\alpha\beta}^i) \\ &= \underbrace{\vec{R} \times \vec{F}^e}_{= \vec{N}_s} + \underbrace{\sum_{\alpha} \vec{r}'_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha}^e}_{= \vec{N}'} + \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ \alpha < \beta}} (\vec{r}'_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha\beta}^i + \vec{r}'_{\beta} \times \vec{F}_{\beta\alpha}^i) \\ &\quad = (\vec{r}'_{\alpha} - \vec{r}'_{\beta}) \times \vec{F}_{\alpha\beta}^i = 0 \\ &\quad \text{wg. Zentralkraft} \\ &= \vec{N}_s + \vec{N}' \end{aligned}$$

$$\vec{N}_s = \dot{\vec{L}}_s$$

$$\vec{N}' = \dot{\vec{L}}' = \mathbf{I} \cdot \dot{\vec{\Omega}} + \vec{\Omega} \times (\mathbf{I} \cdot \vec{\Omega})$$

$$N'_i = I_{ij} \dot{\Omega}_j + \epsilon_{ijk} \Omega_j I_{kl} \Omega_l$$

Richte körperfestes Bezugssystem an Hauptträgheitsachsen aus. ↷

$$I_{ij} = I_i \delta_{ij}$$

$$N'_i = \underbrace{I_i}_{\text{fest}} \dot{\Omega}_i + \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \Omega_j I_k \Omega_k \quad \text{Eulersche Kreisgleichungen}$$

$$\begin{cases} N'_1 = I_1 \dot{\Omega}_1 + (I_3 - I_2) \Omega_2 \Omega_3 \\ N'_2 = I_2 \dot{\Omega}_2 + (I_1 - I_3) \Omega_1 \Omega_3 \\ N'_3 = I_3 \dot{\Omega}_3 + (I_2 - I_1) \Omega_1 \Omega_2 \end{cases}$$