

[http://unith.desy.de/research/pheno/lecture\\_notes](http://unith.desy.de/research/pheno/lecture_notes)

## 1. Komplexe Zahlen

$x^2 = -1$  besitzt keine Lösung  $x \in \mathbb{R}$ .

Imaginäre Einheit  $i$ , mit  $i^2 = -1$ .

Komplexe Zahl  $z = a + ib$ .

$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$  Menge der komplexen Zahlen.

$a = \operatorname{Re} z$  Realteil

$b = \operatorname{Im} z$  Imaginärteil

## Addition

$$z + w = a + ib + (c + id) = a + c + i(b + d)$$

## Multiplikation

$$zw = (a + ib)(c + id) = ac - bd + i(bc + ad)$$

## Kehrwert

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib) \cdot (a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

## Rechenregeln:

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + z_2 + z_3 \quad \text{Assoziativität der Addition}$$

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad \text{Kommutativität der Addition}$$

$$z + 0 = z; \quad 1 \cdot z = z \quad \text{Neutrale Elemente}$$

$$z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3 = z_1 z_2 z_3 \quad \text{Assoziativität der Multiplikation}$$

$$z_1 z_2 = z_2 z_1 \quad \text{kom. d. Mult.}$$



Zu jedem  $z \neq 0$  gibt es  $w$  mit  $zw = 1$ , d.h.  $w = \frac{1}{z}$ .

Inverses Element

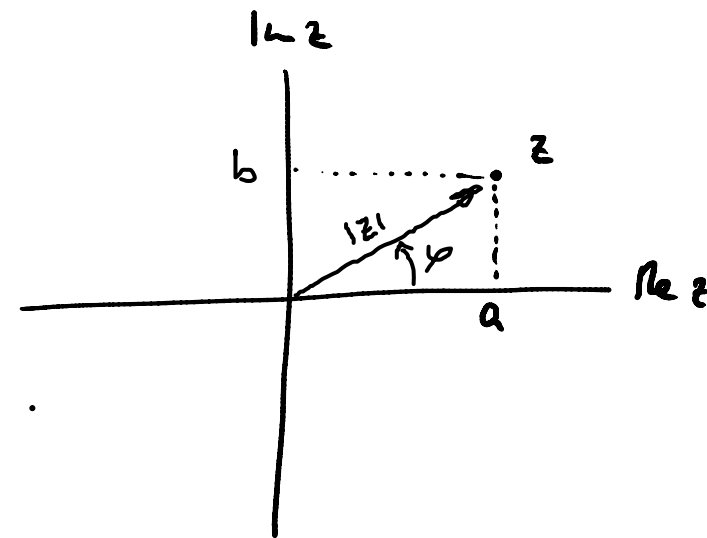
$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3 \quad \text{Distributivität}$$

Komplexe Zahlenebene

$$\text{Betrag } |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{Argument (Phase) } \text{Arg } z = \varphi$$

$$\text{z.B. } \text{Arg } z = \arctan \frac{b}{a} \text{ für } a, b > 0.$$



## 1.1 Konjugiert komplexe Zahlen

$$z = a + ib$$

$$z^* = a - ib \quad \text{komplex konjugierte Zahl zu } z.$$

Spiegelung an reeller Achse.

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$$

$$(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$$

$$(z^n)^* = (z^*)^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$z = z^* : z \text{ rein reell}$$

$$z = -z^* : z \text{ rein imaginär}$$

$$|z| = \sqrt{zz^*}$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \text{Dreiecksungleichung}$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$|z^n| = |z|^n$$

## 1.2 Polardarstellung

$$|z|=1 : \quad z = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (\text{Einheitskreis})$$

$$= e^{i\varphi} \quad \text{Eulersche Formel}$$

Bew. durch Potenzreihen.

$$z^* = \cos \varphi - i \sin \varphi = \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi) = e^{i(-\varphi)} = e^{-i\varphi}$$

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{1}{2} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) \\ \sin \varphi = \frac{1}{2i} (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) \end{cases}$$

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = (e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi} = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi) \quad \text{Formel von Moivre}$$

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} e^{i\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(\alpha+\beta) = \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta \\ \cos(\alpha+\beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{cases}$$

$$z = a + ib$$

$$r = |z|$$

$$\leadsto \begin{cases} a = r \cos \varphi \\ b = r \sin \varphi \end{cases}$$

$$z = r e^{i\varphi} \quad \text{Polarform}$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

### 1.3 Komplexe Wurzeln

$$z = r e^{i\varphi}$$

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{z} &= \sqrt[n]{r e^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} e^{i\varphi/n} \\ &= w = |w| e^{i\gamma}\end{aligned}$$

$$\leadsto |w| = \sqrt[n]{r}$$

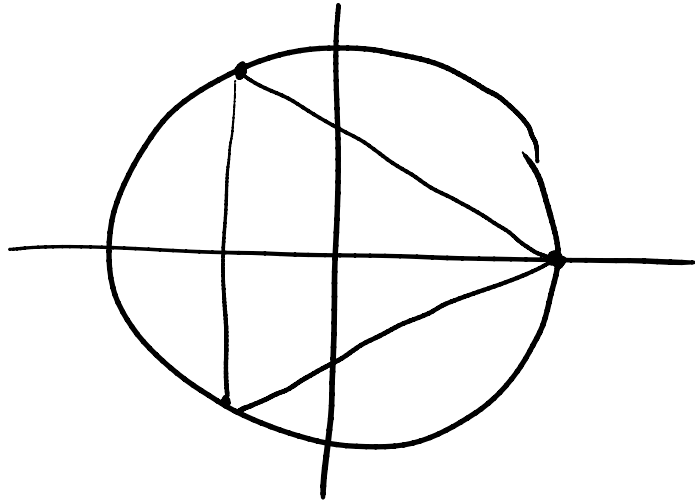
$$w^n = z : \quad n\gamma = \varphi + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\leadsto \gamma = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$\begin{aligned}\text{n-te Wurzel von } z : \quad w_k &= \sqrt[n]{r} e^{i\gamma_k}, \quad \gamma_k = \frac{\varphi}{n} + 2\pi \frac{k}{n} \\ & \quad k = 0, \dots, n-1\end{aligned}$$

Betrachte  $|w|=1$ ,  $\varphi=0$ , d.h.  $z=1$

$$n=3: \quad w_0=1, \quad w_1=e^{i2\pi/3}, \quad w_2=e^{i4\pi/3}$$



## 2 Delta-Funktion

Distribution, verallgemeinerte Funktion

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x=0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) = 1$$

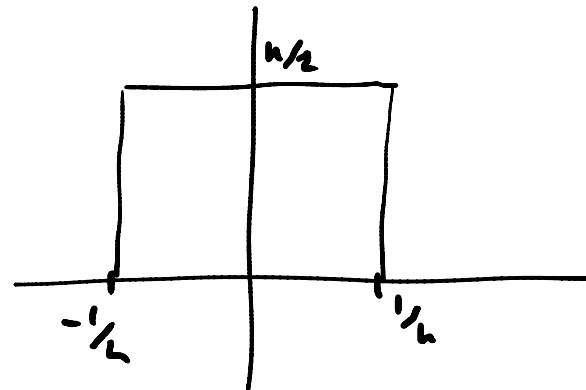
$$\text{Def.: } \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) f(x) = f(0)$$

### 2.1 Elementare Definition

Betrachte Funktionenfolge, z.B. Kastenfunktion

$$g_n = \begin{cases} 0, & |x| > \frac{1}{n} \\ \frac{n}{2}, & |x| \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx g_n(x) = 1$$



# Mittelwertsatz

$$\int_{-\infty}^a dx g_n(x) f(x) = \frac{n}{2} \int_{-1/n}^{1/n} dx f(x)$$

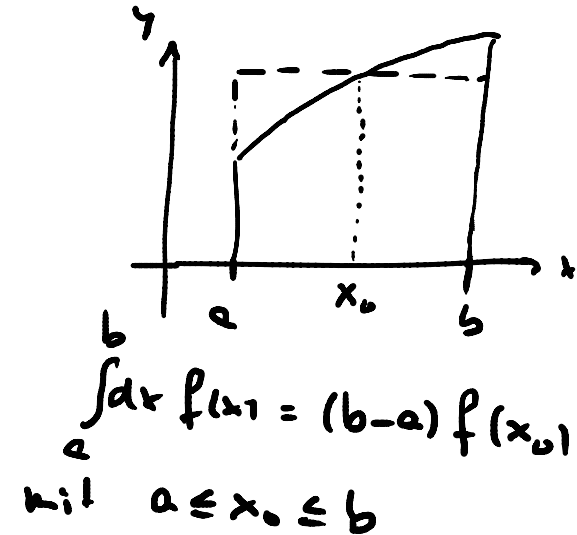
$$\stackrel{\text{MWS}}{=} \frac{n}{2} \cdot \frac{2}{n} f(x_n) = f(x_n) \text{ mit}$$

$$|x_n| \leq \frac{1}{n}$$

$$n \rightarrow \infty : x_n \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx g_n(x) f(x) &= f(0) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) f(x) \end{aligned}$$

NB:  $\lim$  &  $\int$  vertauschen nicht!





Weitere Beispiele:

$$g_L(x) = \frac{h}{\pi} \frac{1}{1+h^2 x^2} \quad \text{Lorentz-Kurve}$$

$$g_G(x) = \sqrt{\frac{h}{\pi}} e^{-hx^2} \quad \text{Gauss'sche Glockenkurve}$$

$$g_S(x) = \frac{\sin hx}{\pi x}$$

## 2.2 Eigenschaften

$$(1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \delta(x-x_0) f(x) = f(x_0)$$

$$(1') \quad \int dx \, \delta(x-x_0) = 1$$

$$(2) \quad \int_a^b dx \, \delta(x-x_0) f(x) = \begin{cases} f(x_0), & a \leq x_0 \leq b \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(3) \quad \delta(-x) = \delta(x)$$

$$(4) \quad \delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x), \quad a \neq 0$$

$$(5) \quad \delta(h(x)) = \frac{1}{|h'(x_0)|} \delta(x - x_0) \quad \text{mit} \quad h(x_0) = 0 \neq h'(x_0)$$

$$(5') \quad \delta(L(x)) = \sum_{\nu=1}^N \frac{1}{|h'(x_\nu)|} \delta(x - x_\nu) \quad \text{mit} \quad h(x_\nu) = 0 \neq h'(x_\nu)$$

$$(6) \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \delta'(x - x_0) f(x) = -f'(x_0)$$

$$(7) \quad \theta'(x) = \delta(x) \quad \text{mit} \quad \theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$



Bew. von (5).

Annahme  $h'(x_0) > 0$ .

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \, \delta(h(x)) f(x) = \int_a^b dx \, \delta(h(x)) f(x) \quad \text{so dass } h(x) \text{ umkehrbar,} \\ \text{für } a \leq x \leq b.$$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Substitution } y = h(x) \quad dy = dx h'(x) \\ x = h^{-1}(y) \\ h(x_0) = 0 \quad \leadsto \quad x_0 = h^{-1}(0) \end{array} \right]$$

$$* \int_{h(a)}^{h(b)} \frac{dy}{h'(h^{-1}(y))} \delta(y) f(h^{-1}(y)) = \frac{f(h^{-1}(0))}{h'(h^{-1}(0))} = \frac{f(x_0)}{h'(x_0)}$$

$$= \frac{1}{h'(x_0)} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \delta(x - x_0) f(x)$$

$$\leadsto \delta(h(x)) = \frac{1}{h'(x_0)} \delta(x - x_0)$$

Fall  $h'(x_0) < 0$  folgt aus \* durch Vertauschen von  $h(a), h(b)$ .

Bew. von (6).

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta'(x) f(x) = \delta(x) f(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) f'(x) = -f'(0)$$

Bew. von (7).

Se:  $a < 0 < b$ .

$$\begin{aligned} \int_a^b dx \theta'(x) f(x) &= \theta(x) f(x) \Big|_a^b - \int_a^b dx \theta(x) f'(x) \\ &= f(b) - \int_a^b dx f'(x) = f(b) - f(x) \Big|_a^b = f(a) \\ &= \int_a^b dx \delta(x) f(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \theta'(x) = \delta(x)$$

# 3. Fourier-Reihen und -Integrale

## 3.1 Fourier-Reihen

Darstellung  $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$

Wellenlängen  $\frac{2\pi}{k}$

$f(x + 2\pi) = f(x).$

Orthogonalitätsrelationen:

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \sin kx \sin k'x = \pi \delta_{kk'}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos kx \cos k'x = \pi \delta_{kk'}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos kx = \int_{-\pi}^{\pi} dx \sin kx = \int_{-\pi}^{\pi} dx \cos kx \sin k'x = 0$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \cos kx f(x), \quad k \neq 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \sin kx f(x)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) = a_k \Big|_{k=0} \quad \text{s.o.}$$

Komplexe Darstellung

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_k e^{ikx}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx e^{ikx} e^{-ik'x} = \int_{-\pi}^{\pi} dx e^{i(k-k')x} = \begin{cases} 2\pi, & k=k' \\ \dots \end{cases}$$

$$\frac{e^{i(k-k')x}}{i(k-k')} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad k \neq k'$$

$$\text{insgesamt} = 2\pi \delta_{kk'}$$

$$g_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx e^{-ikx} f(x)$$

### 3.1.2 Allgemeine Eigenschaften

$f(x) = f(x+L)$  Welle bei  $t = \text{const.}$

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_k e^{2\pi i k x / L}, \quad g_k = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx e^{-2\pi i k x / L} f(x)$$

$f(t) = f(t+T)$  Schwingung

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e^{i k \omega t} \quad (\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ Kreisfrequenz})$$

$$g_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{-i k \omega t} f(t)$$

Spektralanalyse des Signals

Entwicklung von  $f(t)$  nach harmonischen Schwingungen  $e^{i\omega_k t}$ ,  
 $\omega_k = k\omega$ ,  $\omega = \text{Grundfrequenz}$ .

Parseval-Identität

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T dt |f(t)|^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T dt f^*(t) f(t) = \frac{1}{T} \sum_{k, k'=-\infty}^{\infty} g_{k'}^* g_k \int_0^T dt e^{i(k-k')\omega t} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |g_k|^2 \end{aligned}$$



## 3.2 Fourier-Transformation

Spektralanalyse der per. Funktion  $f(x)$

$$f(x) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} g_h e^{2\pi i h x / L} \quad \text{mit} \quad g_h = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx e^{-2\pi i h x / L} f(x)$$

Betrachte  $L \rightarrow \infty$ , d.h.  $f(x)$  nicht periodisch.

$$p = \frac{2\pi h}{L}, \quad h(p) = \frac{L g_h}{2\pi}$$

$$\Delta h = 1 \leadsto \Delta p = 2\pi \frac{\Delta h}{L}$$

$$L \rightarrow \infty : \Delta p \rightarrow 0$$

$$f(x) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \Delta h g_h e^{2\pi i h x / L}$$

$$= \sum_{p=-\infty}^{\infty} \Delta p e^{ipx} h(p) \xrightarrow{\Delta p \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{ipx} h(p)$$

Riemannsche Summe

$$h(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} dx e^{-ipx} f(x) \quad \text{Fourier-Transformierte}$$

Wegen Faktor  $2\pi$ , schreibe  $h(k) = g(k)/\sqrt{2\pi}$ .

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} g(k)$$

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ikx} f(x) \quad \text{Fourier-Transformierte}$$

$$g = \mathcal{F}[f] \quad , \quad f = \mathcal{F}^{-1}[g]$$

## 3.2.1 Eigenschaften der Fourier-Transformation

1) Linearität  $\mathcal{F}[c_1 f_1 + c_2 f_2] = c_1 \mathcal{F}[f_1] + c_2 \mathcal{F}[f_2]$

2) Skalengesetz  $\mathcal{F}[f(\alpha x)] = \frac{1}{|\alpha|} g\left(\frac{k}{\alpha}\right)$

$$\left[ f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk e^{ikx} g(k) \quad , \quad g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx e^{-ikx} f(x) \right]$$

3) Verschiebungseigenschaft  $\mathcal{F}[f(x-x_0)] = e^{-ikx_0} \mathcal{F}[f(x)]$

4) Ableitungseigenschaft  $\mathcal{F}[f'(x)] = ik \mathcal{F}[f(x)]$

5) Integraldarstellung der Deltafunktion  $\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ikx}$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk e^{ikx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx' e^{-ikx'} f(x')$$

$$= \int dx' \left[ \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ik(x-x')} \right] f(x')$$

$$= \int dx' \delta(x'-x) f(x') \quad \leadsto \quad \delta(x'-x) = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ik(x-x')} \quad \checkmark$$

6) Parseval-Identität  $\int dx f_1^*(x) f_2(x) = \int dk g_1^*(k) g_2(k)$

$$\int dx \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk e^{ikx} g_1(k) \right]^* \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk' e^{ik'x} g_2(k')$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk e^{-ikx} g_1^*(k)$$

$$= \int dk g_1^*(k) \int dk' g_2(k') \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int dx e^{i(k'-k)x}}_{= \delta(k'-k)} = \int dk g_1^*(k) g_2(k)$$

Spezialfall:  $\int dx |f(x)|^2 = \int dk |g(k)|^2$

7) Faltungssatz

Def. Faltung  $(f \otimes g)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx f(x) g(y-x)$

$$\begin{aligned}
(f_1 \otimes f_2)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx' f_1(x') f_2(x-x') \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx' \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk e^{ikx'} g_1(k) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk' e^{ik'(x-x')} g_2(k') \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk g_1(k) \int dk' g_2(k') e^{ik'x} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int dx' e^{i(k-k')x'}}_{=\delta(k-k')} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk e^{ikx} g_1(k) g_2(k)
\end{aligned}$$

$$\mathcal{F}[f_1 \otimes f_2] = \mathcal{F}[f_1] \mathcal{F}[f_2]$$

### 3.2.2 Beispiele

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega e^{i\omega t} g(\omega), \quad g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt e^{-i\omega t} f(t)$$

1) Rechteckpuls

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -T \leq t \leq T \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^T dt e^{-i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left. \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right|_{-T}^T$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\omega T} - e^{-i\omega T}}{i\omega} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \omega T}{\omega}$$

$$g(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} T \quad (\text{l'Hôpital})$$

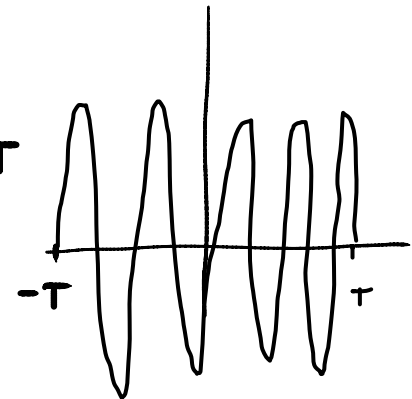
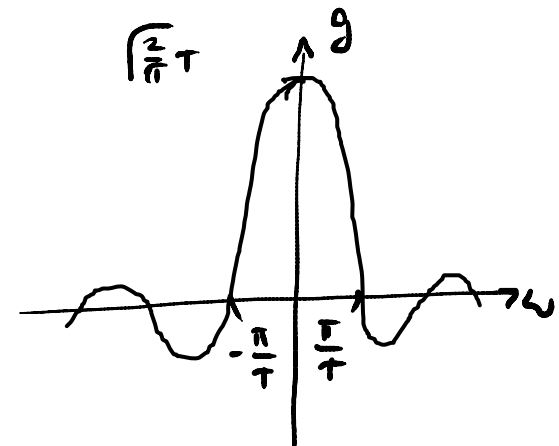
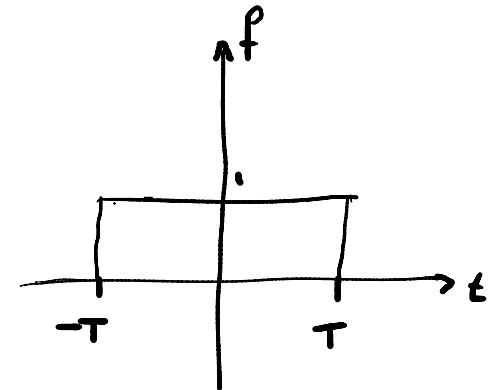
erste Nullstellen bei  $\omega = \pm \frac{\pi}{T}$

Reziprozität  $\Delta t = 2T$   
 $\Delta \omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\Delta \omega \sim \frac{1}{\Delta t}$$

2) endlicher Wellenzug

$$f(t) = \begin{cases} e^{i\omega_0 t}, & -T \leq t \leq T \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

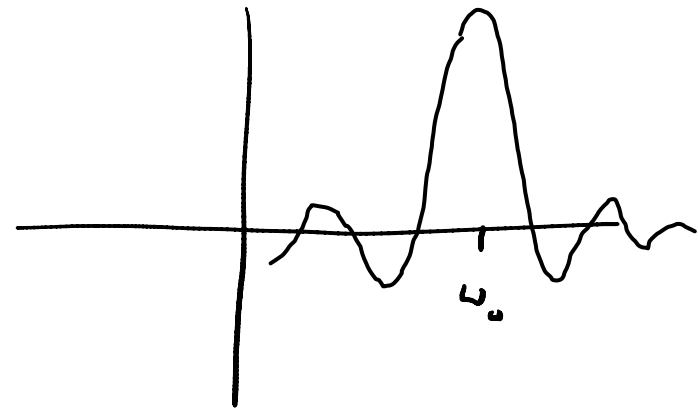


$$g(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\omega - \omega_0)T}{\omega - \omega_0}$$

3) Gauß-Puls

$$f(t) = f_0 e^{-\lambda t^2}$$

$$g(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{2\lambda}} e^{-\omega^2/4\lambda}$$



## 4. Schwingungen

### 4.1. Periodisch angetriebener, gedämpfter harmonischer Oszillator

Bewegungsgleichung:  $\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$

$\nearrow$   $\uparrow$   $\uparrow$   $\nwarrow$   
 Impulsänderung Reibung Rückstellkraft Zwangskraft

$f(t+T) = f(t)$  sonst beliebig.

Lösungsidee: Fourier-Synthese

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ik\omega t}, \quad f_k = \frac{1}{T} \int_0^T dt e^{-ik\omega t} f(t)$$

Behälter ebenfalls periodisch, d.L.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{ik\omega t}$$



$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

$$f(t) = \sum_k f_k e^{ik\omega t}, \quad x(t) = \sum_k b_k e^{ik\omega t}$$

$$\sum_k \left( -(k\omega)^2 + 2\gamma i k\omega + \omega_0^2 \right) b_k e^{ik\omega t} = \sum_k f_k e^{ik\omega t}$$

Koeffizientenvergleich wg. Orthogonalitätsrelationen.

$$\left( -(k\omega)^2 + 2i\gamma k\omega + \omega_0^2 \right) b_k = f_k$$

$$\leadsto b_k = \frac{f_k}{\omega_0^2 - (k\omega)^2 + 2i\gamma k\omega}, \quad f_k = \frac{1}{T} \int_0^T dt e^{-ik\omega t} f(t)$$

$$|b_k|^2 = \frac{|f_k|^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2}$$

$$= \frac{|f_k|^2}{[\Omega^2 - (\omega_0^2 - \gamma^2)]^2 + 4\gamma^2 (\omega_0^2 - \gamma^2)}$$

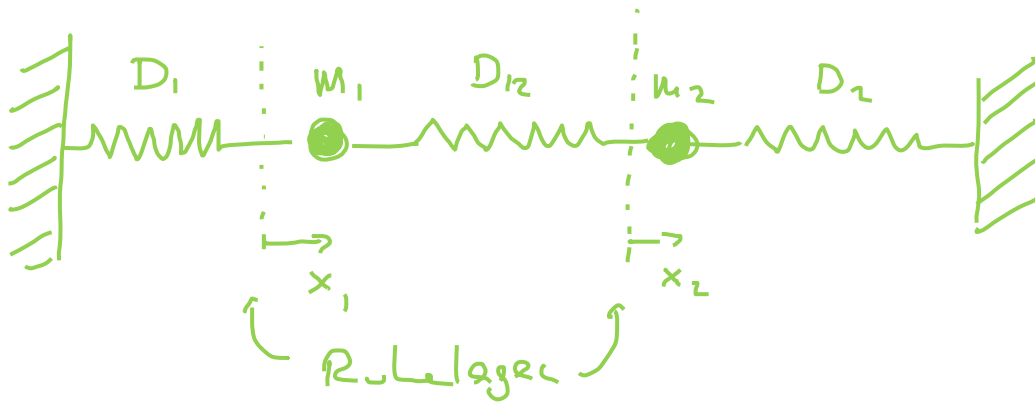
$$\Omega = k\omega$$

Lorentz-Kurve  $\hookrightarrow$  Maximum bei  $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

und Breite

$$\Delta = 2\gamma \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

## 4.2 Gekoppelte Schwingungen



Bewegungsgleichungen:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -(D_1 + D_{12}) x_1 + D_{12} x_2$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = D_{12} x_1 - (D_2 + D_{12}) x_2$$

[Verallgemeinerung auf  $n$  Freiheitsgrade]

Matrixform:

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_1 + D_{12} & -D_{12} \\ -D_{12} & D_2 + D_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

diagonal

symmetrisch

$$M \ddot{\vec{x}} + K \vec{x} = \vec{0}, \text{ mit } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_L \end{pmatrix}, M = (m_i \delta_{ij}), K = (k_{ij})$$

$$k_{ij} = k_{ji}$$

symmetrisch wg. actio=reactio

$$m_i \ddot{x}_i + \sum_{j=1}^L k_{ij} x_j = 0 \quad (i=1, \dots, L)$$

Vereinfachung  $\sqrt{m_i} \ddot{x}_i + \sum_{j=1}^L \frac{k_{ij}}{\sqrt{m_i m_j}} \sqrt{m_j} x_j = 0$

$$y_i = \sqrt{m_i} x_i, \quad (\Omega^2)_{ij} = \frac{k_{ij}}{\sqrt{m_i m_j}} = (\Omega^2)_{ji}$$

$$\ddot{y}_i + \sum_{j=1}^L (\Omega^2)_{ij} y_j = 0 \quad (i=1, \dots, L)$$

$$\ddot{\vec{y}} + \Omega^2 \vec{y} = \vec{0}$$

Lösungsansatz:  $\vec{y} = e^{i\omega t} \vec{a}$   
 $\uparrow$  zeitunabhängig

$$\leadsto \underbrace{\Omega^2}_{\text{Matrix}} \vec{a} = \underbrace{\omega^2}_{\text{Zahl}} \vec{a} \quad \text{Eigenwertgl.}$$

$$(\Omega^2 - \omega^2 \mathbf{1}) \vec{a} = \vec{0}$$

Nichttriviale Lösungen <sup>( $\vec{a} \neq \vec{0}$ )</sup> nur für  $|\Omega^2 - \omega^2 \mathbf{1}| = 0$ .  
 charakteristische Gleichung

$\leadsto$  Eigenfrequenzen  $\omega_1, \dots, \omega_n$

$\leadsto$  Normalkoordinaten  $\vec{a}^{(1)}, \dots, \vec{a}^{(n)}$

a)  $(\Omega^2)$  symmetrisch  $\leadsto \omega_i$  reell

b)  $\vec{a}$  können reell gewählt werden, da mit  $\vec{a}$  auch  $\vec{a}^*$  Lsg. ist.

c)  $\vec{a}^{(i)} \perp \vec{a}^{(j)} \quad (i \neq j)$

Wähle  $\vec{a}^{(i)} \cdot \vec{a}^{(i)} = 1$

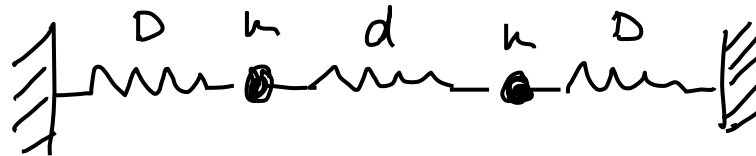
Eigenlösungen  $\vec{y}_{\pm}^{(i)} = \vec{a}^{(i)} e^{\pm i\omega_i t}$  ( $i=1, \dots, n$ )

Allg. Lsg:

$$\vec{y}(t) = \sum_{i=1}^n (c_+^{(i)} \vec{y}_+^{(i)} + c_-^{(i)} \vec{y}_-^{(i)})$$

$c_{\pm}^{(i)}$  komplexe Konstanten

Beispiel:



$$\ddot{y}_1 + \frac{D+d}{m} y_1 - \frac{d}{m} y_2 = 0$$

$$\ddot{y}_2 - \frac{d}{m} y_1 + \frac{D+d}{m} y_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{D+d}{m} & -\frac{d}{m} \\ -\frac{d}{m} & \frac{D+d}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{D+d}{m} - \omega^2 & -\frac{d}{m} \\ -\frac{d}{m} & \frac{D+d}{m} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \wedge \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{D}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{D+2d}{m}}$$

# 5. Vektoranalysis II

## 5.1 Oberflächenintegrale

Oberfläche  $\mathcal{F} = \{ \vec{r} = \vec{r}(u, v) \mid u, v \in \text{Definitionsbereich} \}$

Linielement

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv$$

$$= \hat{e}_u ds_u + \hat{e}_v ds_v$$

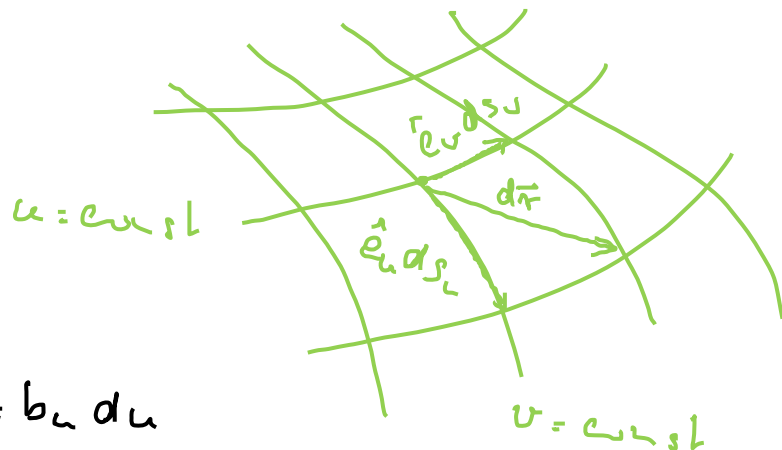
$$b_u = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right|, \quad \hat{e}_u = \frac{1}{b_u} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \quad ds_u = b_u du$$

analog für  $v$ .

$$\text{Flächenelement} \quad d\vec{F} = \hat{e}_u ds_u \times \hat{e}_v ds_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv$$

$$dF = |d\vec{F}| = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| du dv = dF \hat{n}$$

$$\hat{n} = \frac{d\vec{F}}{dF} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} / \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| \quad \text{Normalenheitsvektor}$$



Beispiel: Kugeloberfläche

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} = r \hat{e}_\vartheta, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = r \sin \vartheta \hat{e}_\varphi, \quad \hat{e}_\vartheta \times \hat{e}_\varphi = \hat{e}_r$$

$$d\vec{F} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} d\vartheta \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} d\varphi = \hat{e}_r r^2 d\Omega, \quad d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

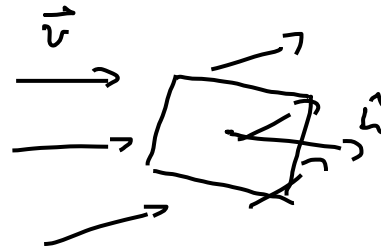
↑  
Raumwinkelelement.

Fluß eines Teilchenstroms durch Oberfläche.

$\rho$  = Dichte

$\vec{v}$  = Geschwindigkeit

$\vec{j} = \rho \vec{v}$  Stromdichte



Fluß durch Fläche  $d\Phi = d\vec{F} \cdot \vec{j}$  (infinitesimal)

Globale Fluß  $\Phi = \int_{\mathcal{F}} d\vec{F} \cdot \vec{j}$  durch Fläche  $\mathcal{F}$ .

Berechnung der Flächeninhalte einer gekrümmten Oberfläche

$$\text{Wähle } \vec{j} = \hat{n} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|}$$

$$F = \int_{\mathcal{F}} d\vec{F} \cdot \hat{n} = \int_{\mathcal{F}} dF = \int du dv \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|$$

## 5.2. Integraldarstellung von Divergenz und Rotation

lokale Eigenschaften

$$\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$



$$\text{rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$



integrale Eigenschaften

Fluß durch Oberfläche eines  
infinitesimalen Volumenele-  
ments

Zirkulation längs Rand  
eines infinitesimalen  
Oberflächenelements



## 5.2.1 Divergenz als Quellenfeld

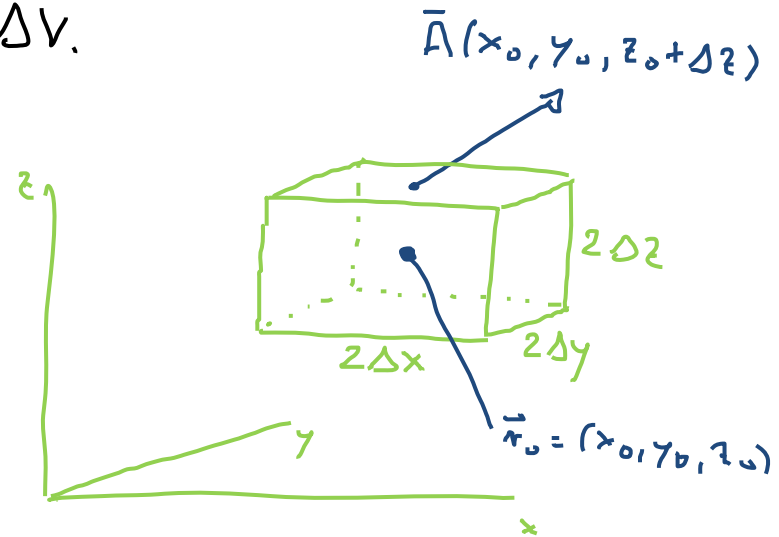
4

$$\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}_0) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\partial(\Delta V)} d\vec{F} \cdot \vec{A}$$

Volumenelement  $\Delta V$  schrumpft auf Punkt  $\vec{r}_0$  zusammen.

$\partial(\Delta V)$  = Rand (Oberfläche) von  $\Delta V$ .

$$\begin{aligned} \oint_{\partial(\Delta V)} d\vec{F} \cdot \vec{A} &= \\ &= \iint dy dz [A_x(x_0 + \Delta x, y, z) - A_x(x_0 - \Delta x, y, z)] \\ &+ \iint dx dz [A_y(x, y_0 + \Delta y, z) - A_y(x, y_0 - \Delta y, z)] \\ &+ \iint dx dy [A_z(x, y, z_0 + \Delta z) - A_z(x, y, z_0 - \Delta z)] \end{aligned}$$



Grenzfall  $dV = dx dy dz \rightarrow 0$ .

$$A_z(x, y, z_0 + \Delta z) - A_z(x, y, z_0 - \Delta z) = 2 \frac{\partial A_z}{\partial z}(x, y, z_0) \Delta z + \mathcal{O}(\Delta z^2)$$

Mittelwertsatz,  $\Delta V = 8 \Delta x \Delta y \Delta z$

$$\frac{1}{\Delta V} \iint dx dy [\dots] = \frac{\partial A_z}{\partial z}(\tilde{x}, \tilde{y}, z_0) \frac{2 \Delta z}{8 \Delta x \Delta y \Delta z} \underbrace{\iint dx dy}_{= 4 \Delta x \Delta y} + \mathcal{O}(\Delta z^2)$$

mit  $x_0 - \Delta x \leq \tilde{x} \leq x_0 + \Delta x$ ,  $y_0 - \Delta y \leq \tilde{y} \leq y_0 + \Delta y$

Insgesamt:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\partial(\Delta V)} d\vec{F} \cdot \vec{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial A_y}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial A_z}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \\ &= \operatorname{div} \vec{A}(x_0, y_0, z_0) \end{aligned}$$

da  $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \rightarrow x_0, y_0, z_0$  für  $\Delta V \rightarrow 0$ .

**NB:**  $\oint$  Oberflächenintegral über geschlossene Oberfläche.  
Normalenvektor zeigt stets nach außen (Konvention).

## 5.2.2 Rotation als Wirbelfeld

Zirkulation  $Z_c = \oint_C d\vec{r} \cdot \vec{A}$

$$Z_{\square} = \int d\vec{r} \cdot \vec{A}$$

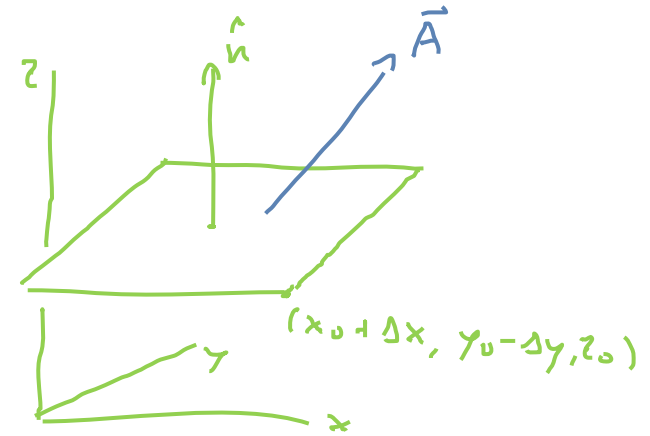
$$= \int_{x_0 - \Delta x}^{x_0 + \Delta x} dx \left[ A_x(x, y_0 - \Delta y, z_0) - A_x(x, y_0 + \Delta y, z_0) \right] \\ + \int_{y_0 - \Delta y}^{y_0 + \Delta y} dy \left[ A_y(x_0 + \Delta x, y, z_0) - A_y(x_0 - \Delta x, y, z_0) \right]$$

$$A_y(x_0 + \Delta x, y, z_0) - A_y(x_0 - \Delta x, y, z_0) = \frac{\partial A_y}{\partial x}(x_0, y, z_0) 2\Delta x + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

Mittelwertsatz  $x_0 - \Delta x \leq \tilde{x} \leq x_0 + \Delta x, \quad y_0 - \Delta y \leq \tilde{y} \leq y_0 + \Delta y.$

$$Z_{\square} = - \frac{\partial A_x}{\partial y}(\tilde{x}, y_0, z_0) 2\Delta y \underbrace{\int_{x_0 - \Delta x}^{x_0 + \Delta x} dx}_{= 2\Delta x} + \frac{\partial A_y}{\partial x}(x_0, \tilde{y}, z_0) 2\Delta x \int_{y_0 - \Delta y}^{y_0 + \Delta y} dy + \dots$$

$$\Delta F = 2\Delta x \cdot 2\Delta y$$

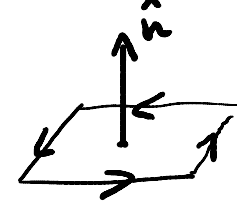


$$\lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_{\partial(\Delta F)} d\vec{r} \cdot \vec{A} = (\text{rot } \vec{A})_z, \quad \text{wobei: Normale}$$

von  $\Delta F$  in positive  $z$ -Richtung zeigt (Rechte-Hand-Regel)

$$\text{Koordinatenfrei: } \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_{\partial(\Delta F)} d\vec{r} \cdot \vec{A} = \hat{n} \cdot \text{rot } \vec{A}, \quad \text{wobei:}$$

$\hat{n}$  Normaleinheitsvektor von  $\Delta F$ .



## 5.3 Integralsätze von Gauß und Stokes

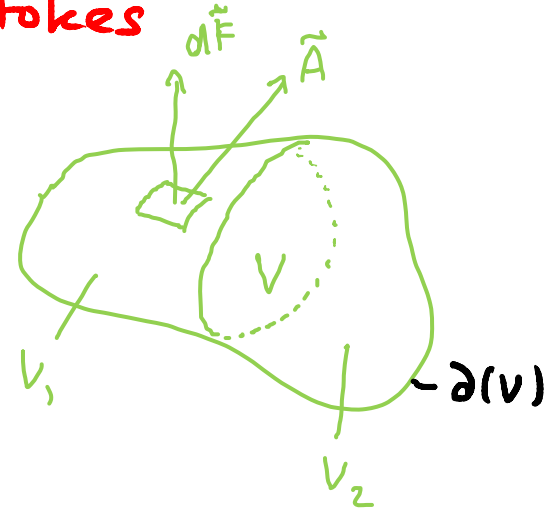
$$\oint_{\partial V} d\vec{F} \cdot \vec{A}$$

$$= \oint_{\partial V_1} d\vec{F} \cdot \vec{A} + \oint_{\partial V_2} d\vec{F} \cdot \vec{A}$$

$$V = V_1 \cup V_2, \quad V_1 \cap V_2 = \{\}$$

da  $d\vec{F}_1 = -d\vec{F}_2$  für gemeinsame Trennfläche.

$$= \sum_{i=1}^N \oint_{\partial V_i} d\vec{F} \cdot \vec{A}, \quad \text{wobei: } V = V_1 \cup \dots \cup V_N \text{ und } V_1 \cap V_2 = \dots = \{\}.$$



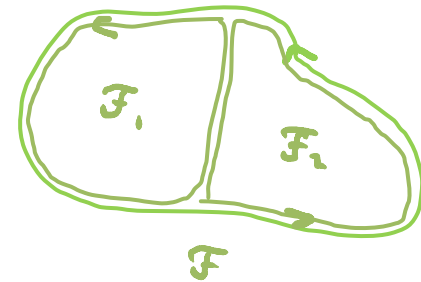
$$\oint_{\partial \mathcal{F}} d\vec{r} \cdot \vec{A}$$

$$\oint_{\partial \mathcal{F}_1} d\vec{r} \cdot \vec{A} + \oint_{\partial \mathcal{F}_2} d\vec{r} \cdot \vec{A}$$

Wegen  $d\vec{r}_1 = -d\vec{r}_2$  auf Trennlinie.

$$= \sum_{i=1}^N \oint_{\partial \mathcal{F}_i} d\vec{r} \cdot \vec{A}$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \dots \cup \mathcal{F}_N, \quad \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \dots = \{\}$$



$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2, \quad \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \{\}$$

### 5.3.1 Satz von Gauß

$$\oint_{\partial V} d\vec{F} \cdot \vec{A} = \sum_{i=1}^N \Delta V_i \underbrace{\frac{1}{\Delta V_i} \oint_{\partial V_i} d\vec{F} \cdot \vec{A}}_{\substack{\Delta V_i \rightarrow 0 \\ \text{div } \vec{A}(\vec{r}_i)}} \xrightarrow[\Delta V_i \rightarrow 0]{N \rightarrow \infty} \iiint_V dV \text{div } \vec{A}$$

Satz von Gauß  $\oint_{\partial V} d\vec{F} \cdot \vec{A} = \iiint_V dV \text{div } \vec{A}$

## 5.3.2 Satz von Stokes

$$\oint_{\partial \mathcal{F}} d\vec{r} \cdot \vec{A} = \sum_{i=1}^N \Delta F_i \underbrace{\frac{1}{\Delta F_i} \oint_{\partial \mathcal{F}_i} d\vec{r} \cdot \vec{A}}_{\substack{\Delta F_i \rightarrow 0 \\ \hat{n}_i \cdot \text{rot } \vec{A}}} \xrightarrow[\Delta F_i \rightarrow 0]{N \rightarrow \infty} \iint_{\mathcal{F}} d\vec{F} \cdot \text{rot } \vec{A}$$

Satz von Stokes  $\oint_{\partial \mathcal{F}} d\vec{r} \cdot \vec{A} = \iint_{\mathcal{F}} d\vec{F} \cdot \text{rot } \vec{A}$

NB:  $\partial \mathcal{F}$  eindeutig für gegebene Fläche  $\mathcal{F}$ , aber nicht umgekehrt.

$$\partial \mathcal{F} = \partial \mathcal{F}' \text{ obwohl } \mathcal{F} \neq \mathcal{F}'$$





## 5.4 Krümmungige Koordinaten II

Betrachte krümmungige, lokal orthogonale Koordinaten  $y_i$  ( $i=1,2,3$ )

$$\hat{u}_i = \frac{1}{b_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_i}, \quad b_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_i} \right| \quad \text{krümmungig}$$

$$\hat{u}_i \cdot \hat{u}_j = \delta_{ij} \quad \text{lokal orthogonal}$$

$$\hat{u}_i \cdot (\hat{u}_j \times \hat{u}_k) = \varepsilon_{ijk} \quad \text{rechtshändig}$$

### 5.4.1 Gradient

$$df = d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} f \quad \text{koordinatenfrei} \quad (*)$$

↑  
Skalarfeld

$$df = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial y_i} dy_i \quad \text{totales Differenzial}$$

$$d\vec{r} = \sum_i \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_i} dy_i = \sum_i b_i dy_i \hat{u}_i$$

Ansatz:  $\vec{\nabla} f = \sum_i (\vec{\nabla} f)_{y_i} \hat{u}_i$

Einsetzen in (\*):

$$\begin{aligned} df &= \sum_{i,j} b_i dy_i \hat{u}_i - (\vec{\nabla} f)_{y_j} \hat{u}_j = \sum_i b_i (\vec{\nabla} f)_{y_i} dy_i \\ &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial y_i} dy_i \end{aligned}$$

$$\leadsto b_i (\vec{\nabla} f)_{y_i} = \frac{\partial f}{\partial y_i} \leadsto (\vec{\nabla} f)_{y_i} = \frac{1}{b_i} \frac{\partial f}{\partial y_i}$$

$$\vec{\nabla} f = \sum_i \hat{u}_i \frac{1}{b_i} \frac{\partial}{\partial y_i} f \quad \text{für beliebige Felder } f$$

$$\leadsto \boxed{\vec{\nabla} = \sum_i \hat{u}_i \frac{1}{b_i} \frac{\partial}{\partial y_i}}$$

## 5.4.2 Divergenz

$$\vec{A} = \sum_{i=1}^3 A_i \hat{u}_i$$

$$\text{Beh.: } \text{div } \vec{A} = \frac{1}{b_1 b_2 b_3} \left[ \frac{\partial}{\partial y_1} (A_1 b_2 b_3) + \frac{\partial}{\partial y_2} (A_2 b_3 b_1) + \frac{\partial}{\partial y_3} (A_3 b_1 b_2) \right]$$

$$\text{Beh.: } \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial y_i \partial y_j} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial y_j \partial y_i}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial y_i} = b_i \hat{u}_i \quad (\text{keine Funktion})$$

$$\sim \frac{\partial}{\partial y_i} (b_j \hat{u}_j) = \frac{\partial}{\partial y_i} (b_i \hat{u}_i)$$

$$\sim \frac{\partial b_j}{\partial y_i} \hat{u}_j + b_j \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial y_i} = \frac{\partial b_i}{\partial y_i} \hat{u}_i + b_i \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial y_i}$$

$$\text{Multipliziere mit } \hat{u}_i : \frac{\partial b_j}{\partial y_i} \delta_{ij} + b_j \hat{u}_i \cdot \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial y_i} = \frac{\partial b_i}{\partial y_i} + b_i \hat{u}_i \cdot \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial y_i}$$

$$\text{NB: } \hat{u}_i^2 = 1 \quad \wedge \quad 0 = \frac{\partial}{\partial y_j} \hat{u}_i^2 = 2 \hat{u}_i \cdot \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial y_j}$$

$$\wedge \quad b_j \hat{u}_i \cdot \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial y_i} = \frac{\partial b_i}{\partial y_j} - \delta_{ij} \frac{\partial b_j}{\partial y_i} = \begin{cases} 0, & i=j \\ \frac{\partial b_i}{\partial y_j}, & i \neq j \end{cases}$$

$$\text{div } \vec{A} = \sum_i \hat{u}_i \cdot \frac{1}{b_i} \cdot \frac{\partial}{\partial y_i} \cdot \sum_j A_j \hat{u}_j$$

$$= \sum_{i,j} \hat{u}_i \cdot \frac{1}{b_i} \cdot \left( \frac{\partial A_j}{\partial y_i} \hat{u}_j + A_j \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial y_i} \right)$$

$$= \sum_i \frac{1}{b_i} \left( \frac{\partial A_i}{\partial y_i} + \sum_j A_j \underbrace{\hat{u}_i \cdot \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial y_i}} \right)$$

$$= \frac{1}{b_j} \frac{\partial b_i}{\partial y_j} \quad \text{für } j \neq i, \quad 0 \text{ sonst}$$

$$= \sum_i \frac{1}{b_i} \left( \frac{\partial A_i}{\partial y_i} + \sum_{j \neq i} \frac{A_j}{b_j} \frac{\partial b_i}{\partial y_j} \right)$$

$$= \frac{1}{b_1} \left( \frac{\partial A_1}{\partial y_1} + \frac{A_2}{b_2} \frac{\partial b_1}{\partial y_2} + \frac{A_3}{b_3} \frac{\partial b_1}{\partial y_3} \right) + 2 \text{ Terme}$$

$$= \frac{1}{b_1 b_2 b_3} \left( b_2 b_3 \frac{\partial A_1}{\partial y_1} + b_3 A_2 \frac{\partial b_1}{\partial y_2} + b_2 A_3 \frac{\partial b_1}{\partial y_3} \right) + 2 \text{ Terme}$$

$$= \frac{1}{b_1 b_2 b_3} \left[ \frac{\partial}{\partial y_1} (A_1 b_2 b_3) + \frac{\partial}{\partial y_2} (A_2 b_3 b_1) + \frac{\partial}{\partial y_3} (A_3 b_1 b_2) \right] -$$

### 5.4.3 Rotation

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \sum_{i,j} \hat{u}_i \frac{1}{b_i} \frac{\partial}{\partial y_i} \times (\hat{u}_j A_j) = \dots = \\ &= \frac{1}{b_1 b_2 b_3} \begin{vmatrix} b_1 \hat{u}_1 & b_2 \hat{u}_2 & b_3 \hat{u}_3 \\ \frac{\partial}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial y_3} \\ b_1 A_1 & b_2 A_2 & b_3 A_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

### 5.4.4. Laplace-Operator (Divergenzgradient)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \vec{\nabla}^2 f = \Delta f$$

$$[\text{NB: } \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \neq \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \Delta \vec{A} = (\Delta A_x, \Delta A_y, \Delta A_z)]$$

$$\Delta = \vec{\nabla}^2 = \frac{1}{b_1 b_2 b_3} \left[ \frac{\partial}{\partial y_1} \left( \frac{b_2 b_3}{b_1} \frac{\partial}{\partial y_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y_2} \left( \frac{b_1 b_3}{b_2} \frac{\partial}{\partial y_2} \right) + \frac{\partial}{\partial y_3} \left( \frac{b_1 b_2}{b_3} \frac{\partial}{\partial y_3} \right) \right]$$

### 5.4.5 Kugelkoordinaten

$$\vec{\nabla} \phi = \hat{u}_r \frac{\partial \phi}{\partial r} + \hat{u}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} + \hat{u}_\varphi \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial (\sin \vartheta A_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A} = & \hat{u}_r \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial (\sin \vartheta A_\varphi)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \varphi} \right] + \hat{u}_\vartheta \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} \right] \\ & + \hat{u}_\varphi \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (r A_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} \right] \end{aligned}$$

$$\Delta \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}$$

## 5.4.6 Zylinderkoordinaten

$$\vec{\nabla} \phi = \hat{u}_\rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \hat{u}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} + \hat{u}_z \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A} = & \hat{u}_\rho \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) + \hat{u}_\varphi \left( \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \\ & + \hat{u}_z \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right] \end{aligned}$$

$$\Delta \phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

## 6. Grundzüge der Elektrodynamik

$\vec{E}(\vec{r}, t)$  elektrische Feldstärke

$\vec{B}(\vec{r}, t)$  magnetische Induktion (Flusddichte)

Im folgenden: Vakuum, d.h.

Magnetisierung  $\vec{M} = \vec{0} \wedge \vec{B} = \vec{H}$  = magnetische Feldstärke.

### 6.1 Bewegungsgleichung einer Ladung

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B} \quad \text{Lorentz-Kraft}$$

$e$ : elektrische Ladung des Teilchens

$c$ : Lichtgeschwindigkeit



# Gedankenexperiment: Messung des elektromagnetischen Feldes

1) Messung von  $\vec{E}$ :

$$\vec{v} = \vec{0} : \quad \vec{E} = \frac{\vec{F}}{e}$$

Kraft auf beliebige ruhende Punktladung

2) Messung von  $\vec{B}$ :

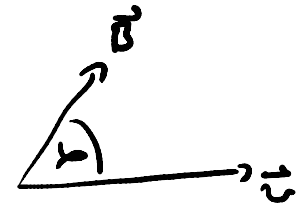
$$\vec{v} \times \vec{B} = c \left( \frac{\vec{F}}{e} - \vec{E} \right)$$

a) Betrag von  $\vec{B}$  :  $v B \sin \varphi = c \left| \frac{\vec{F}}{e} - \vec{E} \right|$

$$B = \max_{\varphi} (B \sin \varphi) = \max_{\varphi} \frac{c}{v} \left| \frac{\vec{F}}{e} - \vec{E} \right|$$

b) Richtung von  $\vec{B}$  :  $\vec{B} \perp \vec{v}_{\max}$  ,  $\vec{B} \perp \left( \frac{\vec{F}}{e} - \vec{E} \right)$

+ Rechte-Hand-Regel



NB:  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  hängen vom Bezugssystem ab.

m Ruhmasse

$$\left[ |\vec{v}| < c \quad , \quad \vec{p} = m\vec{v} \quad \wedge \quad m \frac{d\vec{v}}{dt} = e \vec{E} + \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right]$$

Gesamtenergie:  $E = E_0 + E_{kin}$ ,  $E_0 = mc^2$  Ruheenergie

$$\frac{E^2}{c^2} = \vec{p}^2 + m^2 c^2 \quad , \quad \vec{p} = \frac{E}{c^2} \vec{v}$$

$$\wedge \quad \frac{2}{c^2} E \frac{dE}{dt} = 2 \vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\frac{dE_{kin}}{dt} = \frac{dE}{dt} = \frac{c^2}{E} \vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = e \vec{E} \cdot \vec{v} = e \vec{E} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\text{Arbeit } dA = dE_{kin} = e \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$\wedge$  Nur elektrisches Feld leistet Arbeit an Ladung.

## G.2 Erste Gruppe der Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0\end{aligned}$$

Schlussfolgerung :  $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ ,  $\vec{A}$  = Vektorpotential  
 $\operatorname{div} \operatorname{rot} = 0$

$$\operatorname{rot} \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0} \quad \wedge \quad \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \varphi, \quad \varphi = \text{skalares Potential}$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi$$

NB: Aus Kenntnis von  $\varphi, \vec{A}$  folgen  $\vec{E}, \vec{B}$ .

$\varphi, \vec{A}$  nicht eindeutig (cf. mechanische Potentiale),  
 d.h. nicht messbar.

Suche Integralformen.

Satz von Gauß:  $\int_V dV \operatorname{div} \vec{B} = \oint_{\partial V} d\vec{F} \cdot \vec{B}$

$$\oint_{\partial V} d\vec{F} \cdot \vec{B} = 0$$

Fluß des Magnetfeldes durch jede geschlossene Fläche verschwindet.

Feldlinien des Magnetfeldes haben weder Anfang noch Ende.

Magnetfeld besitzt keine Quellen.

Satz von Stokes:  $\iint_S d\vec{F} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} = \oint_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{E}$

$$\oint_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{E} = - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\iint_S d\vec{F} \cdot \vec{B}}_{\text{Fluß des Magnetfeldes}}$$

elektrische Ringspannung  
(elektromotorische Kraft)

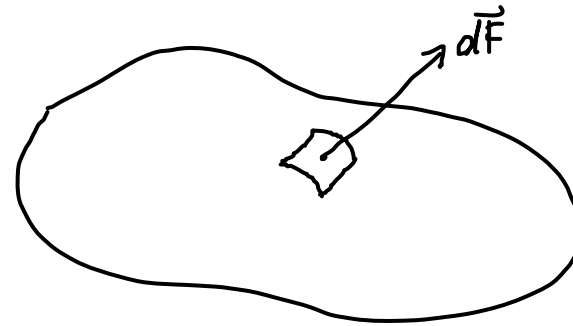
Elektrische Ringspannung ist gleich der negativen zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses.

## 6.3 Kontinuitätsgleichung

Betrachte beliebige mengenartige Größe mit Erhaltungssatz,  
z.B. elektrische Ladung, Energie, ...

$\rho(\vec{r}, t)$  Ladungsdichte

$\vec{j}(\vec{r}, t) = \rho \vec{v}$  Stromdichte



Lieser Erhaltung:  $\frac{\partial}{\partial t} \int_V dV \rho = - \oint_{\partial V} d\vec{F} \cdot \vec{j}$

↳ g. Konvention  
bzgl. Richtung von  $d\vec{F}$

$$= - \int_V dV \operatorname{div} \vec{j} \quad (\text{Ga-p})$$

$$\leadsto \int_V dV \left( \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) = 0$$

Gilt für beliebige Volumen  $\leadsto$

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

Kontinuitätsgleichung

Betrachte einzelne Punktladung.

$$\rho = e \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad (\vec{r}_0(t) \text{ Ort der Punktladung})$$

$$\vec{j} = e\vec{v} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_0}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial \vec{r}_0} \cdot \frac{\partial \vec{r}_0}{\partial t}$$

$$= - \frac{\partial \rho}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{v}, \text{ da } \rho \text{ von } \vec{r} - \vec{r}_0 \text{ abhängt.}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \text{grad} \rho = -\text{div}(\rho \vec{v}) = -\text{div} \vec{j}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e \left( \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

## 6.4 Zweite Gruppe der Maxwellgleichungen

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \text{div } \vec{E} &= 4\pi \rho \end{aligned}$$

$\rho$  = Ladungsdichte

$\vec{j}$  = Ladungsstromdichte

Suche Integraldarstellungen:

Gaußscher Satz:  $\int dV \text{div } \vec{E} = \oint d\vec{F} \cdot \vec{E}$

$$\oint d\vec{F} \cdot \vec{E} = 4\pi \int dV \rho$$

Fluß des elektrischen Feldes durch geschlossene Oberfläche ist gleich  $4\pi$  mal Gesamtladung im Innern.

Stokes'scher Satz :  $\int_{\mathcal{F}} d\vec{F} \cdot \text{rot } \vec{B} = \oint_{\partial \mathcal{F}} d\vec{r} \cdot \vec{B}$

$$\oint_{\partial \mathcal{F}} d\vec{r} \cdot \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \int d\vec{F} \cdot \left( \vec{j} + \underbrace{\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \right)$$

Verschiebungsstrom

$$0 = \text{div rot } \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\text{div } \vec{E}}_{= 4\pi\rho} + \frac{4\pi}{c} \text{div } \vec{j}$$

$$\leadsto \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0} \quad \text{elektrische Ladungserhaltung}$$



## 6.5 Einheitensysteme

Hier Gaußsches CGS-System (Centimeter, Gramm, Sekunde) <sup>3</sup>

Alternativ: MKSA-System → Internationales Einheitensystem (SI)

| CGS                | MKSA                                            |
|--------------------|-------------------------------------------------|
| $c$                | $1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$                     |
| $\vec{E}, \varphi$ | $\sqrt{4\pi\epsilon_0} (\vec{E}, \varphi)$      |
| $\rho, e, \vec{j}$ | $\frac{1}{\sqrt{4\pi\mu_0}} (\rho, e, \vec{j})$ |
| $\vec{B}, \vec{A}$ | $\sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} (\vec{B}, \vec{A})$  |

$\epsilon_0$  = absolute Dielektrizitätskonstante  
 $\mu_0$  = absolute Permeabilität

Maxwell-Gleichungen im MKSA-System:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho$$

## 6.6 Energiedichte und -strom

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = - \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \text{rot } \vec{B}$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = - \text{rot } \vec{E}$$

$$\underbrace{\frac{1}{c} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}_{= \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2)} = - \frac{4\pi}{c} \vec{j} \cdot \vec{E} - \underbrace{(\vec{B} \cdot \text{rot } \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{B})}_{= \text{div} (\vec{E} \times \vec{B})}$$

$$W = \frac{\vec{E}^2 + \vec{B}^2}{8\pi}$$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} \quad \text{Poynting-Vektor}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \vec{j} \cdot \vec{E} = - \operatorname{div} \vec{S}$$

Integriere über Volumen

$$\int_V dV \left( \frac{\partial W}{\partial t} + \vec{j} \cdot \vec{E} \right) = - \int_V dV \operatorname{div} \vec{S} = - \oint_{\partial V} d\vec{F} \cdot \vec{S}$$

↑  
Gauss

Bedeutung von  $\frac{d}{dt}$ :

$$\frac{d}{dt} E = e \vec{v} \cdot \vec{E}$$

↑

Gesamtenergie eines geladenen Massenpunktes

Mehrere bewegliche Punktladungen:

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \sum_a e_a \vec{v}_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a(t))$$

$$\int dV \vec{j} \cdot \vec{E} = \sum_a e_a \vec{v}_a \cdot \vec{E} = \sum_a \frac{dE_a}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_a E_a = \frac{\partial}{\partial t} \sum_e E_a$$

↑  
da  $E_a = E_a(t)$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \underbrace{\int_V dV W}_{\text{Energie des elektromagn. Feldes}} + \underbrace{\sum_q E_q}_{\text{Gesamtenergie der Punktladungen}} \right) = - \underbrace{\oint_{\partial V} d\vec{F} \cdot \vec{S}}_{\text{Energiestrom des em. Feldes}} \quad \text{Kontinuitätsgl. der Energie}$$

Energie des elektromagn. Feldes      Gesamtenergie der Punktladungen      Energiestrom des em. Feldes

D.h.  $W$  = Energiedichte des em. Feldes

$\vec{S}$  = Energiestromdichte "

## 6.7. Elektrostatik

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi\rho$$

Elektrostatik:  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ,  $\vec{j} = 0$

$$\begin{cases} \text{div } \vec{E} = 4\pi\rho \\ \text{rot } \vec{E} = 0 \end{cases} \leadsto \vec{E} = -\text{grad } \varphi$$

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho \quad \text{Poisson-Gl.}$$

$$\Delta = \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\rho = 0: \quad \Delta\varphi = 0 \quad \text{Laplace-Gl.}$$

NB:  $\varphi$  hat in ladungsfreiem Raum weder Maximum noch Minimum, da sonst

$\partial^2\varphi/\partial x^2$ ,  $\partial^2\varphi/\partial y^2$ ,  $\partial^2\varphi/\partial z^2$  entweder alle positiv oder negativ wären.

Betrachte Punktladung  $\rho = e \delta(\vec{r})$ .

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \hat{r} \quad \text{wg. Radialsymmetrie}$$

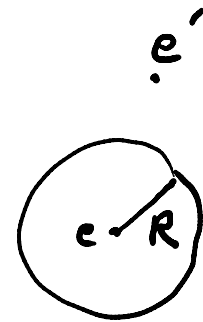
$$\oint_{\tau=R} d\vec{F} \cdot \vec{E} = 4\pi \int_{\tau \leq R} dV \rho = \underline{4\pi e}$$

$$= \int_{\tau=R} \underbrace{\tau^2 d\Omega \hat{r}}_{=d\vec{F}} \cdot E(r) \hat{r} = R^2 E(R) \underbrace{\int d\Omega}_{=4\pi} = \underline{4\pi R^2 E(R)}$$

$$\wedge E(r) = \frac{e}{r^2} \quad \wedge \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{e}{r^2} \hat{r} \quad \text{Coulombsches Gesetz}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e' \vec{E}(\vec{r}) = \frac{ee'}{r^2} \hat{r}$$

$$\text{NB: } |\vec{E}| \sim \frac{1}{r^2}$$



Suche  $\varphi(\vec{r})$ .

$\varphi(\vec{r}) = \varphi(r)$  wg. Radialsymmetrie

$$\frac{e}{r^3} \vec{r} = -\text{grad} \varphi = -\varphi' \frac{\vec{r}}{r} \leadsto \varphi' = -\frac{e}{r^2} \leadsto \varphi = \frac{e}{r} + \text{const}$$

Betrachte nun Ladungsverteilung

$$\rho(\vec{r}) = \sum_a e_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a) \quad (*)$$

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_a \frac{e_a}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} \quad (**) \quad \text{Superpositionsprinzip (wg. Linearität der MG)}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \text{Bew. durch Einsetzen von } (*)$$

Lösung der Poisson-Gl.

$$\Delta \frac{\rho}{r} = -4\pi \rho \delta(\vec{r}) \leadsto \boxed{\Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\vec{r})}$$

$$\text{Bew. (I) } r \neq 0 : \Delta \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2} \underbrace{\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \right)}_{= -1} = 0 \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} \text{(II) } r=0 : \int_{r \leq R} d^3r \underbrace{\Delta \frac{1}{r}}_{\nabla \cdot \vec{v}} &\stackrel{\text{Gauss}}{=} \oint_{r=R} r^2 d\Omega \underbrace{\hat{r} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r}}_{= \frac{1}{r} \cdot \frac{-1}{r^2} \cdot r = -\frac{1}{r}} = - \int d\Omega = -4\pi \\ &= \int_{r \leq R} d^3r (-4\pi \delta(\vec{r})) \end{aligned}$$

$$\leadsto \Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\vec{r})$$

$\leadsto$  Gl. (xx) gilt auch für kontinuierliche Ladungsverteilungen.



$$\Delta \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -4\pi \delta(\vec{r}-\vec{r}'), \text{ wobei: } \Delta \text{ nach } \vec{r} \text{ ableitet, nicht nach } \vec{r}'.$$

$$\varphi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\Delta \varphi(\vec{r}) = \int d^3r' \rho(\vec{r}') \underbrace{\Delta \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}_{=-4\pi \delta(\vec{r}-\vec{r}')} = -4\pi \rho(\vec{r}) \quad \checkmark$$

$G(\vec{r}) = \frac{1}{r}$  Greensche Funktion der Poisson-Gl.

$$\varphi(\vec{r}) = \int d^3r' G(\vec{r}-\vec{r}') \rho(\vec{r}'), \quad \text{Faltung}$$

Wie sieht el. Feld aus?

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) = -\int d^3r' \rho(\vec{r}') \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \int d^3r' \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \rho(\vec{r}'),}$$

NB: Falls  $\vec{E}$  für  $\rho$  gesucht, erst  $\varphi$  ausrechnen.

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi\rho$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e \vec{E} + \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{B}$$

### 6.7.2. Elektrostatische Energie

Energie des elektrischen Feldes  $U = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \vec{E}^2(\vec{r})$

Beh.: Dies ist potentielle Energie der Ladungen.

Benutze  $\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad } \varphi(\vec{r})$

$$U = -\frac{1}{8\pi} \int d^3r \vec{E} \cdot \text{grad } \varphi = -\frac{1}{8\pi} \int d^3r \text{div}(\vec{E}\varphi) + \frac{1}{8\pi} \int d^3r \varphi \text{div} \vec{E}$$

NB:  $\text{div}(\vec{E}\varphi) = \vec{E} \cdot \text{grad } \varphi + \varphi \text{div} \vec{E}$

Satz von Gauß:  $\int d^3r \operatorname{div}(\vec{E}\varphi) = \int_{r=\infty} d\vec{F} \cdot \vec{E}\varphi = 0$

unter Annahme, daß Feld im Unendlichen gegen Null geht.

Verwende  $\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho$ .

$$U = \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\vec{r}) \varphi(\vec{r})$$

Betrachte System von Punktladungen

$$\rho(\vec{r}) = \sum_a e_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a) \quad \wedge \quad U = \frac{1}{2} \sum_a e_a \varphi(\vec{r}_a)$$

Verwende  $\varphi(\vec{r}) = \sum_a \frac{e_a}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}$ .

$$U = \frac{1}{2} \sum_{a,b} \frac{e_a e_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|} = \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{\substack{a,b \\ a \neq b}} \frac{e_a e_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|}}_{\text{hängt ab von gegenseitigen Entfernungen}} + \underbrace{\text{Selbstenergien (oo)}}_{\text{hängt nicht ab von}}$$

Punktladung würde so große Selbstenergie, d.h. Ruheenergie ( $E=mc^2$ ) besitzen.  $\leadsto$  physikalisch sinnlos.

Grenzen der Anwendbarkeit der klassischen E-Dynamik.

$\rightarrow$  Quantenelektrodynamik (QED), gilt auch für kleine Abstände.

Bei welchen Abständen bricht E-Dynamik zusammen?

elektromagnetische Selbstenergie  $\sim \frac{e}{r_e}$

Ruheenergie  $mc^2$

$$\frac{e}{r_e} \approx mc^2 \quad \wedge \quad r_e \approx \frac{e}{mc^2}$$

Lasst Selbstenergien weg!

$$U = \sum_{a < b} \frac{e_a e_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|}$$

$$U = \frac{e_1 e_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \quad \text{Wechselwirkungsenergie zweier Punktladungen}$$

## 6.7. Dipolmoment

Betrachte System von Punktladungen aus großer Entfernung,

d.h.  $r \gg r_0$  (Ursprung im Bereich der Ladungen)

$$\rho(\vec{r}) = \sum_e e_e \delta(\vec{r} - \vec{r}_e)$$

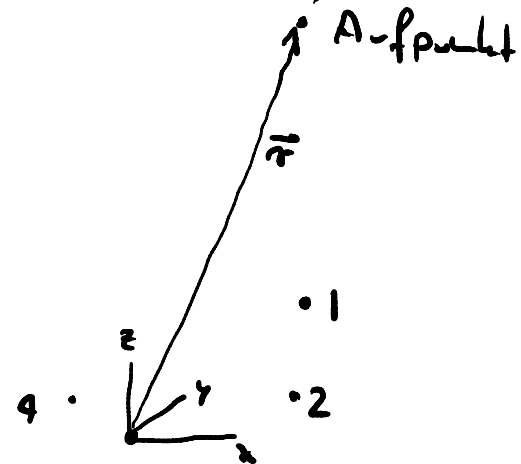
$$\phi(\vec{r}) = \sum_e \frac{e_e}{|\vec{r} - \vec{r}_e|}$$

Taylor-Entwicklung:

$$f(\vec{r} + \vec{a}) = f(\vec{r}) + a_i \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_i} + \frac{1}{2} a_i a_j \frac{\partial^2 f(\vec{r})}{\partial x_i \partial x_j} + O(a^3) \quad 3$$

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{r} : \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{x_i}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{\delta_{ij}}{r^3} + \frac{3x_i x_j}{r^5} = \frac{3x_i x_j}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3}$$

$$\phi(\vec{r}) = \sum_e e_e \left[ \frac{1}{r} - x_{ei} \left( -\frac{x_i}{r^3} \right) + O(x_{ei}^2) \right]$$



Gesamtladung  $e = \sum e_a$

Dipolmoment  $\vec{d} = \sum e_a \vec{r}_a$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{e}{r} + \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{r^3} + O(r^2)$$

$\vec{d}$  ist unabhängig von Wahl des Koordinatenursprungs, wenn  $e=0$

Bew.  $\vec{r}'_a = \vec{r}_a + \vec{c}$  ( $\vec{c}$  konstanter Verschiebungsvektor)

$$\vec{d}' = \sum e_a \vec{r}'_a = \sum e_a \vec{r}_a + \vec{c} e = \vec{d}$$

$e_a^+, \vec{r}_a^+$  positive Ladungen

$-e_a^-, \vec{r}_a^-$  negative Ladungen ( $e_a^- > 0$ )

$$\vec{d} = \sum e_a^+ \vec{r}_a^+ - \sum e_a^- \vec{r}_a^- = e_+ \vec{R}^+ - e_- \vec{R}^-$$

$$e_{\pm} = \sum e_a^{\pm}, \quad \vec{R}^{\pm} = \frac{1}{e_{\pm}} \sum e_a^{\pm} \vec{r}_a^{\pm} \quad \text{Ladungszentren}$$

$\vec{R}^{\pm}$  zeigen ins Zentrum der positiven / neg. Ladungen

$$\vec{E}(\vec{r}) = e \frac{\hat{r}}{r^2} + \frac{3(\hat{r} \cdot \vec{d}) \hat{r} - \vec{d}}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^4}\right)$$

Dipolfeld:  $\vec{E} = \vec{\nabla}(\vec{d} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r})$

Beh.:  $\vec{E} = (\vec{d} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \frac{1}{r}$

Bew.:  $E_i = \partial_i (d_j \partial_j \frac{1}{r}) = d_j \partial_j \partial_i \frac{1}{r} = (\vec{d} \cdot \vec{\nabla}) (\vec{\nabla} \frac{1}{r})_i$  ✓

Axialsymmetrie um Dipolachse, d.h. 2D-Problem.

$$\vec{r} = r \begin{pmatrix} \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}, \quad \hat{r} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}, \quad \vec{r}^\perp = \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\vec{d} = d \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{r} \cdot \vec{d} = d \cos\vartheta$$

Dipolfeld:  $E_x = \frac{d}{r^3} 3 \sin\vartheta \cos\vartheta, \quad E_z = \frac{d}{r^3} (3 \cos^2\vartheta - 1)$

$$E_r = \frac{d}{r^3} 2 \cos\vartheta, \quad E_\vartheta = \frac{d}{r^3} \sin\vartheta$$

## 6.7.4 Multipolmomente

Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r}) = \sum_a e_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a)$

$$r \gg r_a : \varphi(\vec{r}) = \sum_a \frac{e_a}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} = \frac{e}{r} + \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{r^3} + \varphi^{(2)}(\vec{r}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right)$$

Coulomb-,      Dipol-,      Quadrupolpotential

$$\varphi^{(1)}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \sum_a e_a x_{a,i} x_{a,j} \left( \frac{3x_i x_j}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3} \right)$$

$$\text{NR: } \delta_{ij} \left( \frac{3x_i x_j}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3} \right) = \frac{3r^2}{r^5} - \frac{3}{r^3} = 0 \quad (\text{wg. } \Delta \frac{1}{r} = 0 \text{ für } r \neq 0)$$

$$\varphi^{(2)}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \sum_a e_a \left( x_{a,i} x_{a,j} - \frac{\delta_{ij}}{3} r_a^2 \right) \left( \frac{3x_i x_j}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3} \right)$$

$$\text{NR: } \delta_{ij} \left( x_{a,i} x_{a,j} - \frac{\delta_{ij}}{3} r_a^2 \right) = r_a^2 - \frac{3}{3} r_a^2 = 0$$

$$\varphi^{(2)}(\vec{r}) = \frac{x_i x_j}{2r^5} \sum_a e_a \left( 3x_{a,i} x_{a,j} - \delta_{ij} r_a^2 \right)$$



$$D_{ij} = \sum_a e_a (3x_{ai} x_{aj} - \delta_{ij} r_a^2) \quad \text{elektrisches Quadrupolmoment}$$

$$= D_{ji} = D_{ij}^* \quad \leadsto \quad D \text{ diagonalisierbar, EL reell, EV paarweise orthogonal}$$

c.f. Hauptachsentransformation

$$D_{ii} = 0 \quad \text{spurlos}$$

$$\varphi^{(2)}(\vec{r}) = \frac{x_i x_j}{2r^5} D_{ij} = \frac{1}{2r^3} \underset{1 \times 3}{\hat{r}^T} \underset{3 \times 3}{D} \underset{3 \times 1}{\hat{r}} \quad \sim \frac{1}{r^3}$$

Theorem:  $e=0, \vec{d}=\vec{0} \leadsto D_{ij}$  unabhängig von der Wahl des Koordinatenursprungs

$$\vec{r}'_a = \vec{r}_a + \vec{c}$$

$$D'_{ij} = \sum_a e_a \left[ 3(x_{ai} x_{aj} + c_i x_{aj} + x_{ai} c_j + c_i c_j) - \delta_{ij} (r_a^2 + 2\vec{c} \cdot \vec{r}_a + c^2) \right]$$

$$= D_{ij} + 3(c_i d_j + d_i c_j + e c_i c_j) - \delta_{ij} (2\vec{c} \cdot \vec{d} + e c^2)$$

$$= D_{ij} \quad \checkmark$$

### 6.7.5 Ladungen im äußeren Feld

Betrachte System von Ladungen im äußeren elektrischen Feld mit Potential  $\varphi(\vec{r})$ , quasihomogen im Bereich der Ladungen.

Potenzielle Energie  $U = \sum_a e_a \varphi(\vec{r}_a)$

Lege Ursprung im Bereich der Ladungen.

$$\begin{aligned}
 U &= \sum_a e_a \left( \varphi(\vec{0}) + \underbrace{\vec{r}_a \cdot [\vec{\nabla} \varphi(\vec{r})]_{\vec{r}=\vec{0}}}_{= -\vec{E}(\vec{0})} + \underbrace{\frac{1}{2} x_{a,i} x_{a,j} \left[ \frac{\partial^2 \varphi(\vec{r})}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{\vec{r}=\vec{0}} + \dots}_{= \frac{1}{2} (x_{a,i} x_{a,j} - \frac{\delta_{ij}}{3} r_a^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\vec{r}=\vec{0}}} \right) \\
 &= e \varphi(\vec{0}) - \vec{d} \cdot \vec{E}(\vec{0}) + \frac{D_{ij}}{6} \frac{\partial^2 \varphi(\vec{0})}{\partial x_i \partial x_j} + \dots
 \end{aligned}$$

wg.  $\Delta \varphi = -4\pi \rho_{\text{ext}} = 0$  für  $\vec{r} = \vec{0}$

# Gesamtkraft auf Ladungsverteilung

Punktladungen seien starr miteinander verbunden.

$$\vec{F} = \sum_a \vec{F}_a = \sum_a e_a \underset{\substack{\uparrow \\ \text{äußeres Feld}}}{\vec{E}(\vec{r}_a)} = - \sum_a e_a \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}_a)$$

$$\begin{aligned} \text{NR: } (\vec{\nabla} \varphi(\vec{r}))_i &= \partial_i \varphi(\vec{r}) = \partial_i \varphi(\vec{r})|_{\vec{r}=\vec{0}} + x_j \left[ \partial_j \partial_i \varphi(\vec{r}) \right]_{\vec{r}=\vec{0}} + O(x^2) \\ &= -E_i(\vec{0}) - (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) E_i(\vec{r})|_{\vec{r}=\vec{0}} + O(x^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \sum_a e_a \left[ \vec{E}(\vec{0}) + (\vec{r}_a \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r})|_{\vec{r}=\vec{0}} + \dots \right] \\ &= e \vec{E}(\vec{0}) + (\vec{d} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r})|_{\vec{r}=\vec{0}} + \dots \end{aligned}$$

## Gesamtdrehmoment auf Ladungsverteilung

$$\begin{aligned}\vec{N} &= \sum_a \vec{r}_a \times \vec{F}_a = - \sum_a e_a \vec{r}_a \times \underbrace{\vec{\nabla} \varphi(\vec{r}_a)}_{\text{extern}} \\ &= \sum_a e_a \vec{r}_a \times (\vec{E}(\vec{0}) + \dots) = \vec{d} \times \vec{E}(\vec{0})\end{aligned}$$

## Zusammenfassung

Multipolentwicklung:  $\varphi(\vec{r}) = \frac{e}{r} + \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{\vec{r}^T \mathbf{D} \vec{r}}{2r^5} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right)$

Wechselwirkungsenergie einer Ladungsverteilung im äußeren Feld:

$$U = e \varphi(\vec{0}) - \vec{d} \cdot \vec{E}(\vec{0}) - \frac{D_{ij}}{6} \partial_i E_j(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}=\vec{0}} + \dots$$

## 6.7.6 Wechselwirkung zweier Ladungsverteilungen

Gedankenexperiment: System 2 befindet sich im „äußeren Feld“ von System 1.

Ursprung liege im Bereich von System 1.

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{e_1 \vec{r}}{r^3} + \frac{3(\hat{r} \cdot \vec{d}_1) \hat{r} - \vec{d}_1}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^4}\right)$$

Ladungsverteilung 2 sei im Bereich um Aufpunkt  $\vec{r}$  und habe Gesamtladung  $e_2 = 0$  (Dipol).

Wechselwirkungsenergie (von System 2 in Feld von System 1)

$$U = -\vec{d}_2 \cdot \vec{E}_1(\vec{r}) + \dots$$

NB:  $\vec{d}_2$  unabhängig von Wahl des Koordinatenursprungs  
us.  $e_2 = 0$ .

Fallunterscheidung:

$$(1) e_1 \neq 0: \quad U = -\frac{e_1}{r^2} \vec{d}_2 \cdot \hat{r} + \dots \quad (\hat{r} \text{ zeigt von } e_1 \text{ nach } \vec{d}_2)$$

$$(2) e_1 = 0: \quad U = \frac{\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 - 3(\vec{d}_1 \cdot \hat{r})(\vec{d}_2 \cdot \hat{r})}{r^3} + \dots$$

symmetrisch unter  $1 \leftrightarrow 2$ .

## 6.8 Eichinvarianz

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi \rho$$

$$\begin{cases} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi \\ \vec{B} = \text{rot } \vec{A} \end{cases}$$

Sind  $\vec{A}, \varphi$  messbar? Nein!

Nur  $\vec{E}, \vec{B}$  sind messbar.

Welche Klasse von  $(\vec{A}, \varphi)$  liefert vorgegebene Felder  $(\vec{E}, \vec{B})$ ?

Eichtransformation:  $\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } f$   
 $\varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}$

für beliebige skalare Funktion  $f(\vec{r}, t)$ .

Überprüfe, dass  $\vec{E}, \vec{B}$  invariant.

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} - \text{grad } \varphi' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } f - \text{grad } \varphi + \frac{1}{c} \text{grad } \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \vec{E} \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{B}' &= \text{rot } \vec{A}' = \text{rot } \vec{A} + \text{rot } \text{grad } f \\ &= \vec{B} \end{aligned}$$

NB:  $\vec{B}$  homogen.  $\vec{A} = a \vec{B} \times \vec{r}$ .  $(\text{rot } \vec{A})_i = \epsilon_{ijk} \partial_j A_k$   
 $= a \epsilon_{ijk} \partial_j \epsilon_{klm} B_l x_m = a B_l \epsilon_{ijk} \underbrace{\epsilon_{klm}}_{= \epsilon_{ljk}} \partial_j x_m = a B_l 2 \delta_{il} = 2a B_i$   
 $\wedge a = \frac{1}{2}$

Fazit:  $\vec{A}, \varphi$  nicht eindeutig. Wir dürfen eine  
Zusatzbedingung auflegen, z.B.

$$(1) \quad \varphi(\vec{r}, t) = 0$$

$$(2) \quad \operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}, t) = 0 \quad \text{Coulomb-Eichung}$$

$$(3) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\vec{r}, t) + \operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}, t) = 0 \quad \text{Lorentz-Eichung}$$

$$\text{Eichtransformation: } \begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} f \\ \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} f \end{cases}$$

Seien gewisse Potentiale  $\vec{A}, \varphi$  vorgegeben.

Bestimme  $f$ , so dass Eichungen (1), (2) oder (3) gelten.

$$\begin{aligned} \text{Zu (1):} \quad 0 &\stackrel{!}{=} \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} f \quad \wedge \quad \frac{\partial}{\partial t} f = c \varphi \\ &\quad \wedge \quad f = c \int_{t_0}^t dt' \varphi(\vec{r}, t') \end{aligned}$$



$$\text{Zu (2): } 0 \stackrel{!}{=} \operatorname{div} \vec{A}' = \operatorname{div} \vec{A} + \Delta f \leadsto \Delta f = -\operatorname{div} \vec{A}$$

$$\left[ \text{vgl. } \Delta \varphi = -4\pi\rho \leadsto \varphi(\vec{r}) = \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]$$

$$\leadsto f(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \frac{\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\text{Zu (3): } 0 \stackrel{!}{=} \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A}' = \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \operatorname{div} \vec{A} + \Delta f$$

$$\leadsto \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) f = -\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \operatorname{div} \vec{A}$$

$$\leadsto \text{Finde solche } f \text{ (s. später)}$$

# Einschub in Elektrostatik

## 6.7.7 Randwertprobleme der Elektrostatik

Bisher Punktladungen mit fester Position.

Betrachte nun Leiter, die geerdet sind oder auf festem Potential gehalten werden, d.h.

$\varphi(\vec{r}) = \text{const}$  für Punkte  $\vec{r}$  innerhalb des Leiters.

Beh.:  $\vec{E} \perp$  Leiteroberfläche

Bew.: Potentialänderung längs infinitesimalen Stück  $d\vec{r}$  auf Oberfläche:

$$0 = d\varphi = d\vec{r} \cdot \text{grad} \varphi = - d\vec{r} \cdot \vec{E} \quad \wedge \quad \vec{E} \perp d\vec{r}$$

### 6.7.7.1 Methode der Spiegelladungen

Betrachte Punktladungen in der Nähe von Leiteroberflächen.

Wie sieht  $\vec{E}(\vec{r})$  aus?

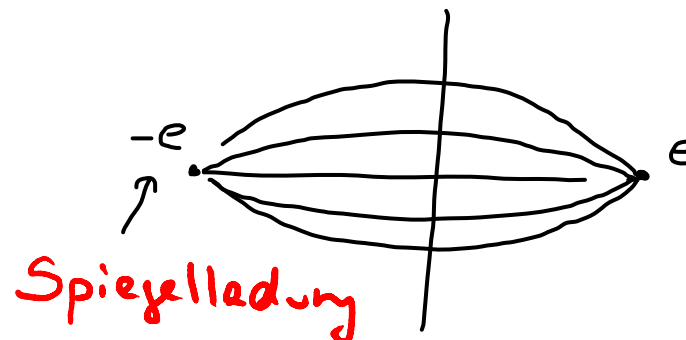
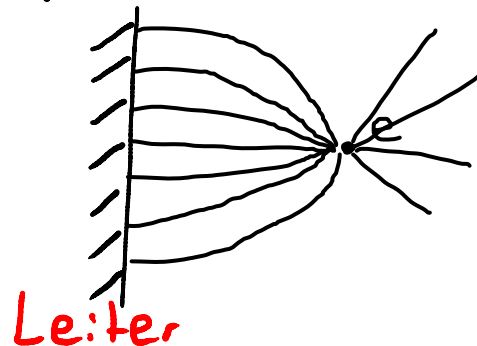
Welche Kräfte  $\vec{F}$  erfahren die Punktladungen?

Trick: Platziere Ladungen geeigneter Stärke an geeigneten Stellen außerhalb des betrachteten Gebiets.

→ Spiegelladungen, Bildladungen

Beispiele:

- 1) Punktladung gegenüber unendlich ausgedehnter, leitender Ebene.

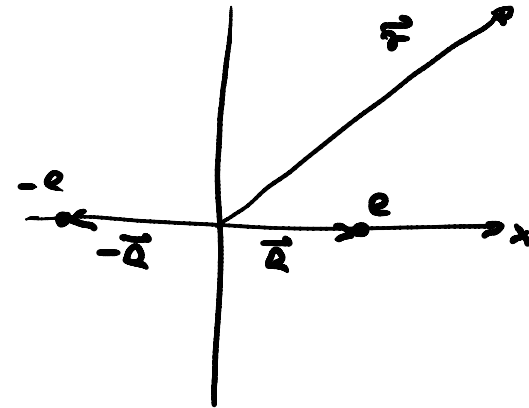


$$x > 0 : \varphi(\vec{r}) = \frac{e}{|\vec{r} - \vec{a}|} + \frac{e'}{|\vec{r} - \vec{a}'|}$$

$$\text{mit } e' = -e$$

$$\vec{a}' = -\vec{a}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{e}{|\vec{r} - \vec{a}|} - \frac{e}{|\vec{r} + \vec{a}|}$$



$$x \leq 0 : \varphi(\vec{r}) = 0$$

Kraft auf Punktladung:  $\vec{F} = \frac{ee'}{|\vec{a} - \vec{a}'|^2} \hat{a} = -\frac{e^2}{4a^2} \hat{a}$

$$|\vec{F}| \sim \frac{1}{a^2}$$

2) Punktladung bei leitender Kugel

Fall  $a > R$  (Ladung außen)

$$r > R: \text{Ansatz } \varphi(\vec{r}) = \frac{e}{|\vec{r} - \vec{a}|} + \frac{e'}{|\vec{r} - \vec{a}'|}$$

$$r \leq R: \varphi(\vec{r}) = 0$$

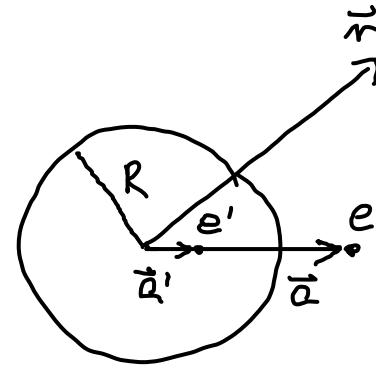
$\hat{a}' = \hat{a}$  aus Symmetriegründen

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{e}{|\vec{r} - a\hat{a}|} + \frac{e'}{|\vec{r} - a'\hat{a}|}$$

Bestimme  $e', a'$ .

$$\begin{aligned} r = R: 0 = \varphi(\vec{r}) &= \frac{e}{|R\hat{r} - a\hat{a}|} + \frac{e'}{|R\hat{r} - a'\hat{a}|} \\ &= \frac{e}{R|\hat{r} - \frac{a}{R}\hat{a}|} + \frac{e'}{a'|\hat{a} - \frac{R}{a'}\hat{r}|} \end{aligned}$$

$$\leadsto \begin{cases} \frac{a}{R} = \frac{R}{a'} \leadsto a' = R^2/a \\ \frac{e}{R} = -\frac{e'}{a'} \leadsto e' = -\frac{a'}{R} \cdot e = -\frac{R}{a} e \end{cases}$$



$$r > R: \quad \varphi(\vec{r}) = \frac{e}{|\vec{r} - \vec{a}|} - \frac{Re}{a \left| \vec{r} - \frac{R^2}{a^2} \vec{a} \right|}$$

$$\text{Kraft auf Ladung } e: \quad \vec{F} = \frac{ee'}{|\vec{a} - \vec{a}'|^2} \hat{a} = - \frac{Re^2}{a^3 (1 - R^2/a^2)} \hat{a}$$

$$|\vec{F}| \sim \frac{1}{a^3} \quad \text{für } a \gg R \quad (\text{da } e' \sim \frac{1}{a})$$

Fall:  $a < R$  analog, Gleichungen bleiben gültig,  
Spiegelladung außen.

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi\rho$$

## 6.9 Magnetostatik

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

6.9.1 Biot-Savartsches Gesetz

$$\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r})$$

$$\Delta \frac{4\pi}{c} \vec{j} = \text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A}$$

Wähle Coulomb-Eichung:  $\text{div } \vec{A} = 0$

$$\Delta \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

Grundproblem:  $\vec{B}$  für vorgegebenes  $\vec{j}$  berechnen.

$$\Delta A_i = -\frac{4\pi}{c} j_i \quad (i=1,2,3)$$

$$\text{Lösung: } \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\text{Probe: } \Delta \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') \underbrace{\Delta \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}_{= -4\pi \delta(\vec{r}-\vec{r}')} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}) \quad \checkmark$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \vec{\nabla} \times \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\text{NB: } \text{rot}(g\vec{F}) = g \text{rot } \vec{F} + \text{grad } g \times \vec{F}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \underbrace{\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}_{= -\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}} \times \vec{j}(\vec{r}')$$

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}} \quad \text{Biot-Savart'sches Gesetz}$$

NB: zuerst  $\vec{A}$  ausrechnen, dann  $\vec{B}$ .



## 6.9.2 Magnetische Wechselwirkungsenergie

Energiedichte  $U = \frac{\vec{B}^2}{8\pi} \quad (\vec{E} = \vec{0})$

Energie  $U = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \vec{B}^2(r)$   
 $= \frac{1}{8\pi} \int d^3r \vec{B} \cdot \text{rot} \vec{A}$

[NB:  $\text{div}(\vec{B} \times \vec{A}) = \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{B} - \vec{B} \cdot \text{rot} \vec{A}$ ]

$$= \frac{1}{8\pi} \left( \int d^3r \underbrace{\vec{A} \cdot \text{rot} \vec{B}}_{= \frac{4\pi}{c} \vec{j}} - \underbrace{\oint_{r=\infty} d\vec{F} \cdot (\vec{B} \times \vec{A})}_{=0} \right) \quad \text{Gauß}$$

$$= \frac{1}{2c} \int d^3r \vec{A} \cdot \vec{j}$$

Frage: Hängt  $U = \frac{1}{2c} \int d^3r \vec{A} \cdot \vec{j}$  von Eichung ab?

Antwort: Nein.

Begründung:  $\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } f$ ,  $f$  bel. skalare Funktion.

$$U' = U + \frac{1}{2c} \int d^3r \underbrace{\vec{j} \cdot \vec{\nabla} f}_{= \vec{\nabla}(f\vec{j}) - f \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{j}}_{=0}} = U + \frac{1}{2c} \oint_{r=\infty} d\vec{r} \cdot (f\vec{j}) = U \quad \checkmark$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{4\pi}{c} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0$$

Verwende:  $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

$$U = \frac{1}{2c^2} \int d^3r d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Atomistisch:  $\vec{j}(\vec{r}) = \sum_a e_a \vec{v}_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a)$

$$U = \frac{1}{2c^2} \sum_{a,b} \frac{e_a e_b \vec{v}_a \cdot \vec{v}_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|}$$

$$= \frac{1}{c^2} \sum_{a < b} \frac{e_a e_b \vec{v}_a \cdot \vec{v}_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|} + \infty \text{ Selbstenergieanteile}$$

Betrachte lokalisierte Stromverteilung  $\vec{j}$  in äußeren Magnetfeld  $\vec{B}_e$ .

$$U = \frac{1}{c} \int d^3r \vec{A}_e \cdot \vec{j}$$

NB: Faktor  $\frac{1}{2}$  fehlt, wegen Aufteilung der Ströme  $\vec{j}_e$  in Ströme im System und äußere Ströme  $\vec{j}_e$ , die externes  $\vec{B}$ -Feld erzeugen.

## 6.9.3 Magnetisches Moment

Betrachte lokalisierte, zeitunabhängige Stromverteilung.  
(stationäre Bewegung von Ladungen).

$$\vec{j}(\vec{r}) = \vec{0} \quad \text{für} \quad r > R$$

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad \wedge \quad \text{div } \vec{j} = \frac{c}{4\pi} \text{div rot } \vec{B} = 0$$

Seien  $f, g$  skalare Funktionen.

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (f g \vec{j}) &= \partial_i (f g j_i) = g j_i \partial_i f + f j_i \partial_i g + f g \partial_i j_i \\ &= g \vec{j} \cdot \vec{\nabla} f + f \vec{j} \cdot \vec{\nabla} g + f g \underbrace{\text{div } \vec{j}}_{=0} \end{aligned}$$

$$\underline{\int_{r < R} d^3r (g \vec{j} \cdot \vec{\nabla} f + f \vec{j} \cdot \vec{\nabla} g) = \int_{r < R} d^3r \vec{\nabla} \cdot (f g \vec{j}) \stackrel{\text{Gauss}}{=} \oint_{r=R} d\vec{F} \cdot \vec{j} f g = 0}$$

3 Fälle:

$$1) \quad f=1, g=x_i : \quad \vec{j} \cdot \vec{\nabla} x_i = j_j \partial_j x_i = j_j \delta_{ij} = j_i$$

$$\int_{\tau < R} d^3\tau j_i = 0 \quad \wedge \quad \int d^3\tau \vec{j} = \vec{0} \quad (1)$$

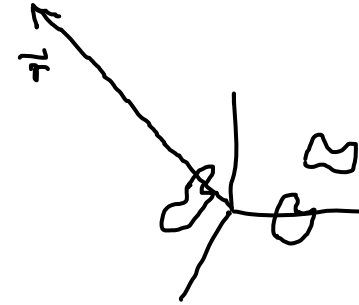
$$2) \quad f=x_i, g=x_j : \quad \int_{\tau < R} d^3\tau (x_i j_j + x_j j_i) = 0$$

$$\wedge \quad \int_{\tau < R} d^3\tau x_i j_j = - \int_{\tau < R} d^3\tau x_j j_i \quad (2)$$

$$3) \quad (2) \wedge \quad \int_{\tau < R} d^3\tau \vec{r} \cdot \vec{j} = - \int_{\tau < R} d^3\tau \vec{r} \cdot \vec{j} = 0 \quad (3)$$

Koordinatenursprung liege innerhalb des Systems.

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$



$$r \gg R \geq r' : \quad \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c r} \underbrace{\int d^3r' \vec{j}(\vec{r}')}_{=0 \text{ wg. (1)}} + \frac{1}{c r^3} \int d^3r' (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{NR: } \left( \int d^3r' (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') \right)_i &= \int d^3r' x_j x'_j j_i(\vec{r}') \stackrel{(2)}{=} - \int d^3r' x_j x'_i j_j(\vec{r}') \\ &= - \left( \int d^3r' \vec{r}' (\vec{r} \cdot \vec{j}(\vec{r}')) \right)_i \end{aligned}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{1}{2c r^3} \int d^3 r' \underbrace{[\vec{r}' (\vec{r} \cdot \vec{j}(\vec{r}')) - (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}')] + O\left(\frac{1}{r^3}\right)}_{= \vec{r} \times (\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}'))}$$

NB:  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\vec{r}}{2c r^3} \times \int d^3 r' \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') + O\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \int d^3 r \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}) \quad \text{magnetisches Dipolmoment}$$

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \\ &= \text{grad} \frac{1}{r} \times \vec{m} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \end{aligned}$$

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}(\vec{r})$$

$$\begin{aligned}
\left( \text{curl } \frac{\vec{F} \times \vec{r}}{r^3} \right)_i &= \epsilon_{ijk} \partial_j \left( \epsilon_{klm} m_l \frac{x_m}{r^3} \right) \\
&= \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} m_l \left( \frac{\delta_{jm}}{r^3} + x_m \frac{-3}{r^4} \frac{x_j}{r} \right) \\
&= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) m_l \left( \frac{\delta_{jm}}{r^3} - 3 \frac{x_j x_m}{r^5} \right) \\
&= m_i \underbrace{\left( \frac{\delta_{jj}}{r^3} - 3 \frac{x_j x_j}{r^5} \right)}_{= \frac{3}{r^3} - 3 \frac{r^2}{r^5} = 0} - m_j \left( \frac{\delta_{ji}}{r^3} - 3 \frac{x_j x_i}{r^5} \right) \\
&= 3 \frac{r^2 \cdot \vec{m} \cdot \vec{x}_i}{r^5} - \frac{m_i}{r^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{B}(\vec{r}) &= \frac{3 \vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{m})}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right) \\
&= \frac{3 \hat{r} (\hat{r} \cdot \vec{m}) - \vec{m}}{r^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right)
\end{aligned}$$

Dipol field



$$Vg! \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{e\hat{r}}{r^2} + \frac{3\hat{r}(\hat{r} \cdot \vec{d}) - \vec{d}}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^4}\right)$$

„Magnetische Ladung“ (Magnetpol) existiert nicht,  
 $\vec{m}$  entspricht  $\vec{d}$ .

$$\text{Atomistisch: } \vec{j}(\vec{r}) = \sum_a e_a \vec{v}_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a)$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \sum_a e_a \vec{r}_a \times \vec{v}_a = \frac{1}{2c} \sum_a \frac{e_a}{m_a} \vec{r}_a \times (m_a \vec{v}_a)$$

Annahmen: 1)  $\frac{e_a}{m_a} = \text{const.} = \frac{e}{m}$

2)  $v_a \ll c \wedge \vec{p}_a = \frac{E_a}{c^2} \vec{v}_a \approx \overset{\text{Ruhmasse}}{m_a} \vec{v}_a$

$$\vec{m} \approx \frac{e}{2mc} \sum_a \vec{r}_a \times \vec{p}_a = \underbrace{\frac{e}{2mc}}_{\text{gyromagnetisches Verhältnis}} \vec{L}$$

$$\vec{F} = \frac{1}{c} \int d^3r \vec{j} \times \vec{B}$$

Stromführende Drähte seien starr miteinander verbunden.

Lege Koordinatenursprung in Bereich der Stromverteilung.

Äußeres Magnetfeld sei: quasihomogen im Bereich der Stromverteilung.

$$\begin{aligned} F_i &= \frac{1}{c} \int d^3r \epsilon_{ijk} j_j B_k \\ &= \frac{1}{c} \epsilon_{ijk} \int d^3r j_j \left( \underbrace{B_k(\vec{0})}_{\substack{\downarrow \\ 0 \text{ wg. (1)}}} + \underbrace{\vec{r} \cdot \vec{\nabla} B_k(\vec{r})}_{= x_\ell \partial_\ell} \Big|_{\vec{r}=\vec{0}} + \dots \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{c} \epsilon_{ijk} \int d^3r j_j x_\ell \underbrace{\partial_\ell B_k(\vec{r})}_{\text{räumlich konstant}} \Big|_{\vec{r}=\vec{0}} + \dots$$

$$\begin{aligned}
 F_i &\stackrel{(2)}{=} \frac{1}{2c} \epsilon_{ijk} \int d^3r (j_j x_k - j_k x_j) \partial_k B_k(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}=\vec{0}} + \dots \\
 &= \frac{1}{2c} \epsilon_{ijk} \int d^3r \underbrace{[\vec{j}(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) - \vec{r}(\vec{j} \cdot \vec{\nabla})]_j}_{= [(\vec{r} \times \vec{j}) \times \vec{\nabla}]_j} B_k(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}=\vec{0}} + \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= \frac{1}{2c} \int d^3r [(\vec{r} \times \vec{j}) \times \vec{\nabla}] \times \vec{B}(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}=\vec{0}} + \dots \\
 &= (\vec{r} \times \vec{\nabla}) \times \vec{B}(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}=\vec{0}} + \dots \\
 &= \vec{\nabla}(\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r})) \Big|_{\vec{r}=\vec{0}} - \vec{r} \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}))}_{=0 \text{ vgl. Maxwell}} \Big|_{\vec{r}=\vec{0}} + \dots \\
 &= \vec{\nabla}(\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r})) \Big|_{\vec{r}=\vec{0}} + \dots \\
 &= -\vec{\nabla} U + \dots \\
 &\leadsto U = -\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}) + \dots \text{ potentielle Energie}
 \end{aligned}$$

NB:  $\vec{m} \parallel \vec{B}$  liefert minimale potentielle Energie.

### 6.9.5 Drehmoment auf Stromverteilung

Drehmoment  $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{e}{c} \vec{r} \times (\vec{v} \times \vec{B})$  (mikroskopisch)

Makroskopisch: 
$$\vec{N} = \frac{1}{c} \int d^3r \underbrace{\vec{r} \times (\vec{j} \times \vec{B})}_{= \vec{j} (\vec{r} \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\vec{r} \cdot \vec{j})}$$

Taylor-Entwicklung:  $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{0}) + (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}(\vec{r})|_{\vec{r}=\vec{0}} + \dots$

NB: 
$$\int d^3r \vec{B}(\vec{r} \cdot \vec{j}) = \vec{B}(\vec{0}) \underbrace{\int d^3r \vec{r} \cdot \vec{j}}_{=0 \text{ Lg. (3)}} + \dots$$

$$N_i = \frac{1}{c} \int d^3r \, j_i x_j B_j(\vec{r}) + \dots$$

$$\stackrel{(2)}{=} \frac{1}{2c} \int d^3r \, (j_i x_j - j_j x_i) B_j(\vec{r}) + \dots$$

$$\vec{N} = \frac{1}{2c} \int d^3r \, \underbrace{\left[ \vec{j} (\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r})) - \vec{r} (\vec{j} \cdot \vec{B}(\vec{r})) \right]}_{= (\vec{r} \times \vec{j}) \times \vec{B}(\vec{r})} + \dots$$

$$= \vec{m} \times \vec{B}(\vec{r}) + \dots$$

**Fazit:** Lokalisierte Stromverteilung erföhrt i.a. (d.h. wenn  $\vec{r} \neq \vec{0}$ )  
ein Drehmoment im Magnetfeld, selbst wenn  
dieses homogen ist.

## 6.9.6 Larmor-Präzession

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} \approx \vec{L} \times \vec{B}(t)$$

$$\vec{N} \approx \frac{e}{2mc} \vec{L} \quad (e\hbar/m_e = e/\mu, \quad v_e \ll c)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &\approx - \underbrace{\frac{e}{2mc} \vec{B}(t)}_{= \vec{\Omega}} \times \vec{L} \\ &= \vec{\Omega} \quad \text{Larmor-Frequenz} \end{aligned}$$

$$\wedge \quad \vec{L}^2 = \text{const}, \text{ wegen}$$

$$\frac{d\vec{L}^2}{dt} = 2\vec{L} \cdot \frac{d\vec{L}}{dt} \approx 0$$

o.B.d.A.  $\hat{\Omega} = \hat{z}$

$$\begin{pmatrix} \dot{L}_x \\ \dot{L}_y \\ \dot{L}_z \end{pmatrix} = -\Omega \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & 1 \\ L_x & L_y & L_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega L_y \\ -\Omega L_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

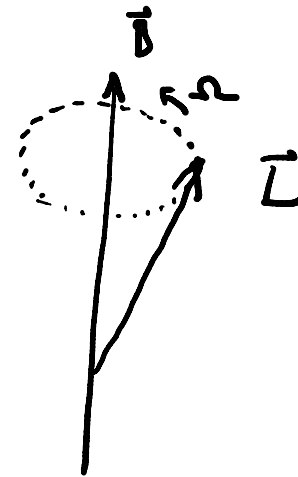
$$L_z = L_{\parallel}^0$$

$$\ddot{L}_x = \Omega \dot{L}_y = -\Omega^2 L_x \quad \wedge \quad L_x = L_{\perp}^0 \sin(\Omega t + \varphi)$$

$$L_y = \frac{1}{\Omega} \dot{L}_x = L_{\perp}^0 \cos(\Omega t + \varphi)$$

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} L_{\perp}^0 \sin(\Omega t + \varphi) \\ L_{\perp}^0 \cos(\Omega t + \varphi) \\ L_{\parallel}^0 \end{pmatrix}$$

Larmor-Präzession



## 6.10. Elektromagnetische Wellen

### 6.10.1. Wellengleichung

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \vec{B}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c} \partial_t \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi\rho$$

Vakuum:  $\rho = 0, \vec{j} = \vec{0}$

Elektromagnetische Welle = e.m. Feld im Vakuum.

NB:  $\partial_t \vec{E} \neq \vec{0} \neq \partial_t \vec{B}$  unbedingt erforderlich.

Herleitung der Wellengleichungen für  $\varphi, \vec{A}$ :

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \partial_t \vec{A}$$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$



$$\text{rot } \vec{B} = \text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A}$$

$$= -\text{grad } \frac{1}{c} \partial_t \varphi - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{A} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \quad \text{D'Alembert-Operator}$$

$$\square \vec{A} = \text{grad} \left( \frac{1}{c} \partial_t \varphi + \text{div } \vec{A} \right) - \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$4\pi\rho = \text{div } \vec{E} = -\Delta\varphi - \frac{1}{c} \partial_t \text{div } \vec{A} = -\square\varphi - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \varphi - \frac{1}{c} \partial_t \text{div } \vec{A}$$

$$\wedge \square\varphi = -\frac{1}{c} \partial_t \left( \frac{1}{c} \partial_t \varphi + \text{div } \vec{A} \right) - 4\pi\rho$$

Wähle Lorenz-Eichung  $\frac{1}{c} \partial_t \varphi + \text{div } \vec{A} = 0$ .

$$\begin{cases} \square\varphi = -4\pi\rho \\ \square\vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \end{cases}$$

Vakuum:  $\rho = 0, \vec{j} = \vec{0}$

$$\begin{cases} \square \varphi = 0 \\ \square \vec{A} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\square \vec{E} = -\text{grad } \square \varphi - \frac{1}{c} \partial_t \square \vec{A} = \vec{0}$$

$$\square \vec{B} = \text{rot } \square \vec{A} = \vec{0}$$

Herleitung ohne Potentiale

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \vec{E} &= \text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E} = 4\pi \text{grad } \rho - \Delta \vec{E} \\ &= -\frac{1}{c} \partial_t \text{rot } \vec{B} = -\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E} - \frac{4\pi}{c^2} \partial_t \vec{j} \end{aligned}$$

$$\wedge \square \vec{E} = 4\pi \left( \text{grad } \rho + \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{j} \right)$$

$$\text{rot rot } \vec{B} = \text{grad div } \vec{B} - \Delta \vec{B} = -\Delta \vec{B}$$

$$= \frac{1}{c} \partial_t \text{rot } \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \text{rot } \vec{j} = -\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{B} + \frac{4\pi}{c} \text{rot } \vec{j}$$

$$\wedge \square \vec{B} = -\frac{4\pi}{c} \text{rot } \vec{j}$$

Vakuum:  $\rho=0, \vec{j}=\vec{0}$

$\rightarrow \square \vec{E} = \square \vec{B} = \vec{0}$  Wellengleichungen des em. Feldes

## 6.10.2 Ebene Wellen

Spezialfall: ebene Welle, d.h. Potentiale und Felder hängen nur von 1 Ortskoordinate und  $t$  ab.

$f = \varphi, A_i, E_i, B_i$

$$0 = \square f = (\Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2) f = (\partial_x^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2) f$$

Wellengleichung  $(\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2) f = 0$

$$(\partial_t - c \partial_x)(\partial_t + c \partial_x) f = 0$$

Variablentransformation:  $\xi = t - \frac{x}{c}$ ,  $\eta = t + \frac{x}{c}$

$$\begin{cases} t = \frac{1}{2}(\xi + \eta) \\ x = \frac{c}{2}(\eta - \xi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_{\xi} = \frac{\partial t}{\partial \xi} \partial_t + \frac{\partial x}{\partial \xi} \partial_x = \frac{1}{2}(\partial_t - c \partial_x) \\ \partial_{\eta} = \frac{\partial t}{\partial \eta} \partial_t + \frac{\partial x}{\partial \eta} \partial_x = \frac{1}{2}(\partial_t + c \partial_x) \end{cases}$$

$$\leadsto \partial_{\xi} \partial_{\eta} f = 0 \leadsto \partial_{\xi} f = f_3(\xi) \leadsto f = \underbrace{\int d\xi f_3(\xi)}_{= f_1(\xi)} + f_2(\eta)$$

Allg. Lösung:  $f(x, t) = f_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{c}\right)$   
mit beliebigen Funktionen  $f_1, f_2$ .

Interpretation: Sei  $f_2 = 0$ .

$$t - \frac{x}{c} = \text{const} \quad \wedge \quad x = \text{const} + ct$$

Feld hat bei  $t=0$  am Punkt  $x$  einen bestimmten Wert.

$\wedge$  Wert befindet sich nach Zeit  $t$  in Entfernung  $ct$ ,  
d.h. er wandert mit Lichtgeschwindigkeit in  
positive  $x$ -Richtung.

Analog für  $f_2$ : Wert wandert mit Lichtgeschwindigkeit  
in negative  $x$ -Richtung.

Behauptung:  $A_x = 0$  kann gewählt werden.

Verleende Eichung  $\varphi = 0$ . ✓

Verlange zusätzlich  $\text{div } \vec{A} = 0$ .

Ist das möglich?

NR: 1)  $\rho=0 \wedge 0 = \operatorname{div} \vec{E} = -\frac{1}{\epsilon} \partial_t \operatorname{div} \vec{A}$

$\wedge \operatorname{div} \vec{A} = (\operatorname{div} \vec{A})(\vec{r})$  hängt nicht von  $t$  ab.

2) Eichtransformation  $f = f(\vec{r})$ , d.h.  $\varphi=0$  bleibt.

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial f}{\partial t} \quad \wedge \quad \varphi' = \varphi = 0$$

$$\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} f$$

$$0 \stackrel{!}{=} \operatorname{div} \vec{A}' = \operatorname{div} \vec{A} + \Delta f$$

$$\wedge \Delta f(\vec{r}) = -(\operatorname{div} \vec{A})(\vec{r}) \quad \wedge \quad f(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3 r' \frac{(\operatorname{div} \vec{A})(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Antwort: ja,  $\varphi=0$  und  $\operatorname{div} \vec{A}=0$  erlaubt.

$$0 = \operatorname{div} \vec{A} = \partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z = \partial_x A_x$$

$$\partial_t^2 A_x = c^2 \partial_x^2 A_x = 0 \quad \wedge \quad \partial_t A_x = \text{const}$$

Wellengl.

$$\wedge E_x = -\frac{1}{\epsilon} \partial_t A_x = \text{const.}$$

Konstantes longitudinales  $\vec{E}$ -Feld hätte keine  
Beziehung zur Leiter.

Setze  $A_x = 0$ , d.h.  $\vec{A}$  kann  $\perp$  zur  
Ausbreitungsrichtung  $\hat{x}$  gewählt werden.

$\vec{A}$  kann + zur Ausbreitungsrichtung  $\hat{x}$  gewählt werden, d.h.  $A_x = 0$ .

Betrachte Ausbreitung in positive x-Richtung.

$$\xi = t - \frac{x}{c}$$

$$f(\vec{r}, t) = f(\xi)$$

$$\left. \begin{aligned} \partial_t &= \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{d}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \\ \partial_x &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{d}{d\xi} = -\frac{1}{c} \frac{d}{d\xi} \\ \partial_y &= \partial_z = 0 \end{aligned} \right\} \leadsto \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{c} \frac{d}{d\xi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{\hat{x}}{c} \frac{d}{d\xi}$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \vec{A} = -\frac{1}{c} \vec{A}'$$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = -\frac{\hat{x}}{c} \frac{d}{d\xi} \times \vec{A} = -\frac{\hat{x}}{c} \times \frac{d\vec{A}}{d\xi} = \hat{x} \times \left(-\frac{1}{c} \vec{A}'\right) = \hat{x} \times \vec{E}$$

$$\leadsto \hat{x} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\text{Oben: } \hat{x} \cdot \vec{E} = E_x = -\frac{1}{c} A'_x = 0 \quad \text{wg. } A_x = 0.$$

$$\text{D.h. } \vec{E} \perp \hat{x} \perp \vec{B} \quad \text{transversal}$$

$$\text{Ferner } \vec{E} \perp \vec{B}$$



$$B^2 = (\hat{x} \times \vec{E})^2 = \hat{x}^2 E^2 - (\hat{x} \cdot \vec{E})^2 = E^2 \quad \leadsto \quad |\vec{E}| = |\vec{B}|$$

$$\begin{aligned} \text{Energiestromdichte } \vec{S} &= \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{c}{4\pi} \underbrace{\vec{E} \times (\hat{x} \times \vec{E})}_{= \hat{x} E^2 - \vec{E}(\hat{x} \cdot \vec{E})} = \frac{c}{4\pi} E^2 \hat{x} \\ &= \frac{c}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \hat{x} \end{aligned}$$

$$\text{Energiedichte: } W = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2)$$

$$\leadsto \vec{S} = c W \hat{x}$$

$$\text{Vgl. } \vec{j} = \rho \vec{v}$$

$\leadsto \vec{v} = c \hat{x}$ , d.h. Energie strömt mit Lichtgeschwindigkeit in x-Richtung.

$$\vec{p} = \frac{E}{c^2} \vec{v} \quad \leadsto \quad \text{Impulsdichte } \frac{d\vec{p}}{dV} = \frac{1}{c^2} \frac{dE}{dV} \underbrace{\vec{v}}_{= c \hat{x}} = \frac{\vec{S}}{c^2}$$

## 10.3 Monochromatische ebene Welle

Monochromatisch  $f \sim \cos(\omega t + \alpha)$ ,  $f = \varphi, A_i, E_i, B_i$   
an festem Ort.

$\omega$  = Kreisfrequenz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\omega^2 f$$

Wellengleichung:  $\Delta f + \frac{\omega^2}{c^2} f = 0$

Betrachte Ausbreitung in pos.  $x$ -Richtung  $\wedge$   
 $f$  Funktion von  $t - \frac{x}{c}$ .

Vektorpotential:  $\vec{A} = \operatorname{Re}(\vec{A}_0 e^{-i\omega(t - \frac{x}{c})})$

↑  
konstant, komplex

Ebenso für  $\vec{E}, \vec{B}$ .

Wellenlänge  $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$  = Periode der Änderung in x-Richtung  
bei fester Zeit t.

Wellenvektor  $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \hat{n}$

↑  
Einheitsvektor in Ausbreitungsrichtung

↳  $\vec{A} = \text{Re} (\vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)})$  unabhängig von  
Koordinatenwahl

$\varphi = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t$  Phase

NB: „Re“ entbehrlich bei linearen Operationen.

$\vec{A} = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$

$\vec{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \vec{A} = i \frac{\omega}{c} \vec{A} = i k \vec{A}$

$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = i \vec{k} \times \vec{A}$

Untersuche physikalische Eigenschaften von  $\vec{E}$  (Z-Analog).

$$\vec{E} = \operatorname{Re}(\vec{E}_0 e^{i(k \cdot \vec{r} - \omega t)})$$

$$\underbrace{\vec{E}_0^2}_{\text{komplexe Zahl}} = \underbrace{|\vec{E}_0|^2}_{\text{Betrag}} \underbrace{e^{-2i\alpha}}_{\text{Phase}}$$

$$[z = |z| e^{i\tilde{\varphi}}]$$

$$\vec{E} = \operatorname{Re}(\vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)})$$

$$\vec{E}_0^2 = |\vec{E}_0|^2 e^{-2i\alpha} \quad \wedge \quad \alpha$$

$$\text{Ansatz: } \vec{E}_0 = \vec{b} e^{-i\alpha} \quad (\vec{b} = \vec{E}_0 e^{i\alpha} \text{ komplexer Vektor})$$

$$\wedge \vec{E}_0^2 = \vec{b}^2 e^{-2i\alpha} \quad \wedge \quad \vec{b}^2 = |\vec{E}_0|^2 \text{ reell}$$

$$\text{zerlegen } \vec{b} = \vec{b}_1 + i \vec{b}_2, \quad \vec{b}_1, \vec{b}_2 \text{ reelle Vektoren}$$

$$\vec{b}^2 = \vec{b}_1^2 + 2i \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 - \vec{b}_2^2 \text{ reell} \quad \wedge \quad \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = 0, \text{ d.h. } \vec{b}_1 \perp \vec{b}_2$$

$$\text{Lösung } \hat{k} = \hat{x}, \quad \hat{b}_1 = \hat{y} \quad \wedge \quad \hat{b}_2 = \pm \hat{z}$$

$$\vec{b}_1 = b_1 \hat{y}, \quad \vec{b}_2 = \pm b_2 \hat{z}$$

$$\begin{aligned} \text{Damit } \vec{E} &= \operatorname{Re} \left\{ (b_1 \hat{y} \pm i b_2 \hat{z}) \underbrace{e^{-i\alpha} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}}_{= e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \alpha)}} \right\} \\ &= \hat{y} b_1 \cos(\alpha) \mp \hat{z} b_2 \sin(\alpha) \quad \left[ \begin{array}{l} = e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \alpha)} \\ = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha) \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = b_1 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \alpha) \\ E_z = \pm b_2 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \alpha) \end{cases}$$

↑

$$\frac{E_y^2}{b_1^2} + \frac{E_z^2}{b_2^2} = 1 \quad \text{Ellipsengleichung}$$

elliptisch polarisierte Welle (allgemeinster Fall der  
monochr. eb. Welle)

Blicke von oben auf x-Richtung

Vorzeichen       $\vec{E}$ -Drehung      Polarisation

+

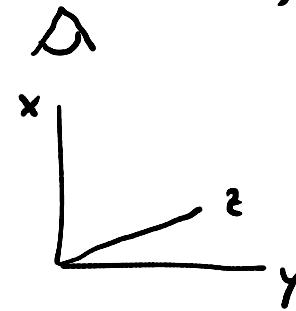


links

-



rechts



Spezialfälle: 1) zirkular polarisiert:  $b_1 = b_2$   
2) linear polarisiert:  $b_1 = 0$  oder  $b_2 = 0$

## 10.4 Allgemeine Lösung der Wellengleichung

Wellengleichung  $0 = \square \varphi = (\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2) \varphi$

Ansatz:  $\varphi(\vec{r}, t) = e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \leadsto 0 = (-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}) \varphi$

$\leadsto \omega^2 = c^2 k^2 \leadsto \omega = \pm ck, \quad k = |\vec{k}|$

Kontinuierliche Überlagerung ebener Wellen mit beliebigen Amplituden:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \left( \tilde{\varphi}_+(\vec{k}) e^{-i\omega k t} + \tilde{\varphi}_-(\vec{k}) e^{i\omega k t} \right)$$

Verlange  $\varphi = \varphi^* = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \left( \tilde{\varphi}_+^*(\vec{k}) e^{i\omega k t} + \tilde{\varphi}_-^*(\vec{k}) e^{-i\omega k t} \right)$

$(\vec{k}' = -\vec{k}) \quad = \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}' \cdot \vec{r}} \left( \tilde{\varphi}_+^*(-\vec{k}') e^{i\omega k' t} + \tilde{\varphi}_-^*(-\vec{k}') e^{-i\omega k' t} \right)$

Nenne nun  $\vec{k}' \rightarrow \vec{k}$ .

Koeffizientenvergleich  $\begin{cases} \tilde{\varphi}_+^*(-\vec{k}) = \tilde{\varphi}_-(\vec{k}) \\ \tilde{\varphi}_-^*(-\vec{k}) = \tilde{\varphi}_+(\vec{k}) \end{cases} \quad \text{redundant}$

Nenne  $\tilde{\varphi}(\vec{k}) = \tilde{\varphi}_+(\vec{k})$ .

$$\begin{aligned} \sim \varphi(\vec{r}, t) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \left( \tilde{\varphi}(\vec{k}) e^{-ickt} + \tilde{\varphi}^*(-\vec{k}) e^{ickt} \right) \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left( \tilde{\varphi}(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - ckt)} + \tilde{\varphi}^*(\vec{k}) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - ckt)} \right) \end{aligned}$$

Fourier-Darstellung

Umkehrtransformation:

$$\tilde{\varphi}(\vec{k}) e^{-ickt} + \tilde{\varphi}^*(-\vec{k}) e^{ickt} = \int \frac{d^3r}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \varphi(\vec{r}, t)$$



## 6.11 Elektrodynamik in dichten Medien

### 6.11.1 Elektrostatik in dichten Medien (Dielektrika)

$$\rho = \rho_{\text{frei}} + \bar{\rho} \quad \uparrow \text{gebunden}$$

$$\Delta \bar{\varphi}(\vec{r}) = -4\pi \bar{\rho}(\vec{r})$$

Multipolentwicklung für Fernfeld der gebundenen Ladungsverteilung:

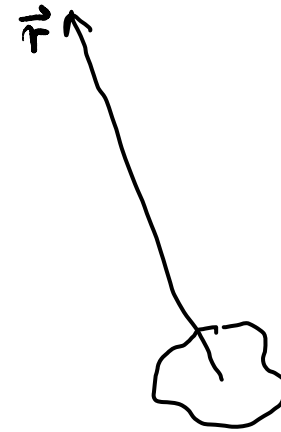
$$\bar{\varphi}(\vec{r}) = \bar{e} \frac{1}{r} + \vec{\bar{d}} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

$$\bar{e} = \int d^3r \bar{\rho}(\vec{r}) = 0$$

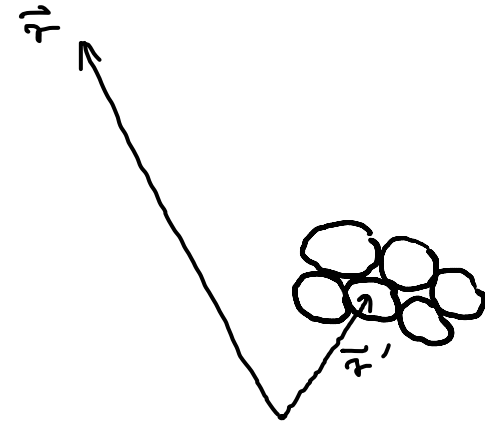
$$\vec{\bar{d}} = \int d^3r \bar{\rho}(\vec{r}) \vec{r} \neq \vec{0}$$

$$= \int d^3r \vec{\bar{P}}(\vec{r})$$

$\uparrow$  elektrische Dipoldichte, el. Polarisation



$$\bar{\varphi}(\vec{r}) = \int d^3r' \bar{P}(\vec{r}') \cdot \underbrace{\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}}_{= -\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}$$



$$[ \text{NB: } \text{div}(f \vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{\nabla} f + f \text{div} \vec{F} ]$$

$$= -\vec{\nabla} \cdot \int d^3r' \frac{\bar{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(\vec{r}) &= -\frac{1}{4\pi} \Delta \bar{\varphi}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \int d^3r' \bar{P}(\vec{r}') \underbrace{\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{= -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')} \\ &= -\vec{\nabla} \cdot \bar{P}(\vec{r}) \end{aligned}$$

$$\vec{d} = \int_V d^3r \vec{r} \bar{\rho}(\vec{r}) \quad , \quad \bar{\rho}(\vec{r}) = -\operatorname{div} \vec{P}(\vec{r})$$

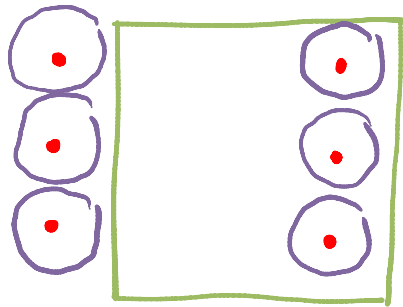
$$\begin{aligned} d_i &= - \int_V d^3r \underbrace{x_i \partial_j P_j}_{= \partial_j (x_i P_j) - P_j \underbrace{\partial_j x_i}_{= \delta_{ij}}} \\ &= \int_V d^3r P_i - \int_{\partial V} dF_j x_i P_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{d} &= \int_V d^3r \vec{P}(\vec{r}) - \underbrace{\int_{\partial V} d\vec{F} \cdot \vec{P}(\vec{r}) \vec{r}}_{= 0 \text{ wg. } \vec{P}(\vec{r}) = 0 \text{ für } \vec{r} \in \partial V} \quad \checkmark \end{aligned}$$

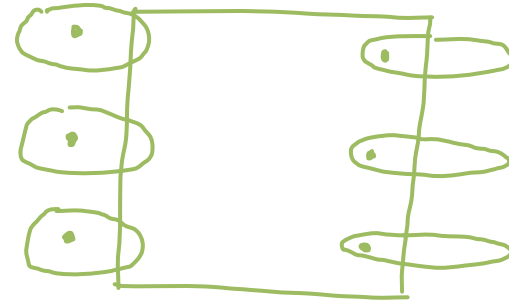
$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \rho = 4\pi (\rho_{\text{frei}} - \operatorname{div} \vec{P})$$

$$\begin{aligned} \vec{d} &= \operatorname{div} (\underbrace{\vec{E} + 4\pi \vec{P}}_{= \vec{D} \text{ dielektrische Verschiebung (makroskopisch)}}) = 4\pi \rho_{\text{frei}} \end{aligned}$$

NB:  $\text{div } \vec{P} \neq 0 \leadsto \vec{P}$  nicht homogen  $\leadsto$  Zu- bzw. Abnahme  
der Verschiebungsladung innerhalb eines kleinen Volumens  
möglich



$$\text{div } \vec{P} = 0$$



$$\bar{\rho} = -\text{div } \vec{P} \neq 0$$

Weiterhin: mit  $\vec{E} = \vec{0} \leadsto \vec{E} = -\text{grad } \varphi$ .

$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E})$  Verknüpfungsgleichung (materialabhängig)

Medium sei isotrop und reagiere auf äußeres Feld  $\vec{E}$  linear.

$$\vec{P} = \chi_e \vec{E}$$

↑

elektrische Suszeptibilität (materialabhängig)

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P} = \underbrace{(1 + 4\pi \chi_e)}_{= \epsilon} \vec{E}$$

=  $\epsilon$  Dielektrizitätskonstante

Betrachte homogenes Material, d.h.  $\epsilon(\vec{r}) = \text{const}$  im Innern.

$$\text{Sei: } \rho_{\text{frei}} = 0 \quad \leadsto \quad \text{div } \vec{D} = 0$$

$$\bar{\rho} = -\text{div } \vec{P}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \text{div } \frac{\vec{D}}{\epsilon}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{\epsilon} \text{div } \vec{D} + \vec{D} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{\epsilon} \right)$$

$$= -\frac{1}{4\pi \epsilon^2} \vec{D} \cdot \vec{\nabla} \epsilon$$

$\leadsto \bar{\rho} \neq 0$  nur an Grenzfläche.

$$\vec{P} = \chi_e \vec{E} = \frac{\epsilon-1}{4\pi} \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{1}{4\pi} \left( 1 - \frac{1}{\epsilon} \right) \vec{D}$$

# Grenzbedingungen

1)  $\vec{E}$ -Feld

$$\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$$

$$0 = \int_{\Delta F} d\vec{F} \cdot \text{rot } \vec{E} = \oint_{\partial(\Delta F)} d\vec{r} \cdot \vec{E}$$

$$= \Delta x (E_x^{\text{I}} - E_x^{\text{II}})$$

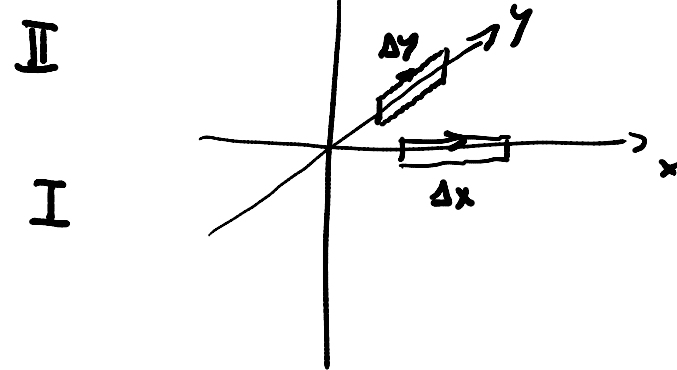
$$\leadsto E_x^{\text{I}} - E_x^{\text{II}} = 0$$

$$\text{Analog: } E_y^{\text{II}} - E_y^{\text{I}} = 0$$

$$\leadsto \hat{n} \times (\vec{E}^{\text{II}} - \vec{E}^{\text{I}}) = \vec{0}$$

↑  
Normaleneinheitsvektor auf Grenzfläche, von I nach II  
gewendet.

D.h. Tangentialkomponenten von  $\vec{E}$  stetig an  
Grenzfläche.



2)  $\vec{D}$ -Feld

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi \rho_{\text{frei}} \quad , \quad \rho_{\text{frei}} = \underset{\uparrow}{\sigma(x,y)} \delta(z)$$

makroskopische Flächenladungsdichte auf Grenzfläche

$$4\pi \int_{\Delta V} d^3r \, \sigma(x,y) \delta(z) = 4\pi \Delta F \, \sigma$$

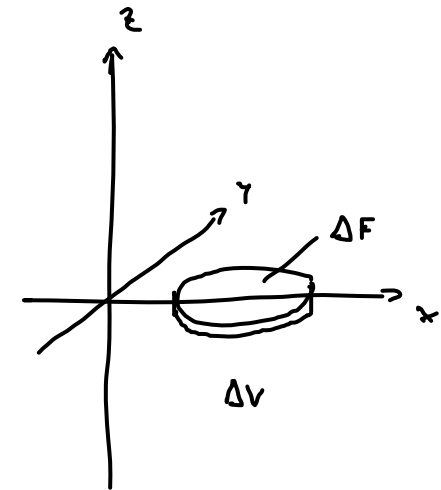
$$= \int_{\Delta V} d^3r \operatorname{div} \vec{D} = \int_{\partial(\Delta V)} d\vec{F} \cdot \vec{D} = \Delta F (D_z^{\text{II}} - D_z^{\text{I}})$$

$$\leadsto D_z^{\text{II}} - D_z^{\text{I}} = 4\pi \sigma$$

$$\leadsto \hat{n} \cdot (\vec{D}^{\text{II}} - \vec{D}^{\text{I}}) = 4\pi \sigma$$

Spezialfall :  $\sigma = 0$  keine freien  
Ladungen auf Grenzfläche

$$\leadsto \hat{n} \cdot (\vec{D}^{\text{II}} - \vec{D}^{\text{I}}) = 0, \text{ d.h. Normalkomponente von } \vec{D} = \epsilon \vec{E} \text{ stetig an Grenzfläche.}$$





## 6.11.2 Magnetostatik in dichten Medien

$$\vec{J} = \vec{J}_{\text{frei}} + \vec{J}_{\text{gebunden}}$$

Gebundene Stromverteilung erzeugt B-Feld  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$  mit

$$\Delta \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{J} \quad (\text{Coulomb-Eichung } \text{div } \vec{A} = 0)$$

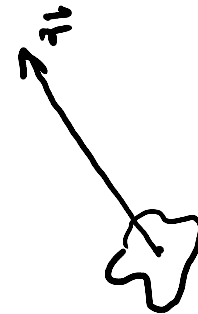
Multipolentwicklung für Fernfeld der gebundenen Stromverteilung:

$$\vec{A} = \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

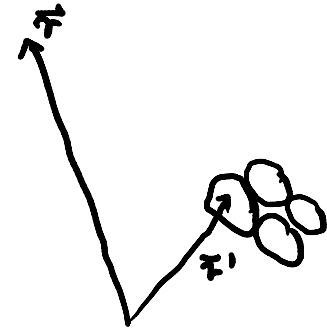
$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \int d^3r \, \vec{r} \times \vec{J}(\vec{r})$$

$$\equiv \int d^3r \, \vec{M}(\vec{r})$$

↑  
magnetische Dipoldichte, Magnetisierung.



$$\vec{A}(\vec{r}) = \int d^3r' \vec{M}(\vec{r}') \times \underbrace{\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}}_{= -\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}$$



$$[NB: \text{rot}(f \vec{F}) = \text{grad} f \times \vec{F} + f \text{rot} \vec{F}]$$

$$= \vec{\nabla} \times \int d^3r' \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\begin{aligned} \vec{j} &= -\frac{c}{4\pi} \Delta \vec{A} = -\frac{c}{4\pi} \vec{\nabla} \times \int d^3r' \vec{M}(\vec{r}') \underbrace{\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{= -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')} \\ &= c \vec{\nabla} \times \vec{M} \end{aligned}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{2c} \int d^3r \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})$$

$$\vec{j}(\vec{r}) = c \operatorname{rot} \vec{M}(\vec{r})$$

$$\begin{aligned} M_i &= \frac{1}{2} \int_V d^3r \underbrace{\varepsilon_{ijk} x_j \varepsilon_{klm} \partial_l M_m}_{=} \\ &= \partial_l (\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} x_j M_m) - \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} M_m \underbrace{\partial_l x_j}_{=\delta_{jl}} \\ &= -\partial_l (\varepsilon_{ikh} \varepsilon_{klm} M_m x_j) + \underbrace{\varepsilon_{jki} \varepsilon_{jlm} M_m}_{=2\delta_{il}} = \delta_{jl} \end{aligned}$$

$$= \int_V d^3r M_i - \frac{1}{2} \int_{\partial V} dF_l \varepsilon_{ikh} \varepsilon_{klm} M_m x_j$$

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \int_V d^3r \vec{M}(\vec{r}) - \frac{1}{2} \underbrace{\int_{\partial V} (d\vec{F} \times \vec{M}(\vec{r})) \times \vec{r}}_{=0 \text{ wg. } \vec{M}(\vec{r})=0 \text{ für } \vec{r} \in \partial V} \\ &\checkmark \end{aligned}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} = \frac{4\pi}{c} (\vec{j}_{\text{frei}} + c \text{rot } \vec{M})$$

$$\wedge \text{rot } (\underbrace{\vec{B} - 4\pi \vec{M}}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{frei}}$$

=  $\vec{H}$  magnetisches Feld (makroskopisch)

Weiterhin:  $\text{div } \vec{B} = 0 \quad \wedge \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A}$

$\vec{B} = \vec{B}(\vec{H})$  Verknüpfungsgleichung (materialabhängig)

Medium sei isotrop und reagiere auf äußeres Feld  $\vec{H}$  linear.

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

↑  
magnetische Suszeptibilität (materialabhängig)

$\chi_m > 0$  paramagnetisch

$\chi_m < 0$  diamagnetisch

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{M} = \underbrace{(1 + 4\pi \chi_m)}_{\substack{= \mu \text{ magnetische Permeabilität} \\ (\text{Permeabilitätskonstante})}} \vec{H}$$

Material sei homogen, d.h.  $\mu(\vec{r}) = \text{const}$  im Inneren.

$$\text{Sei: } \vec{j}_{\text{frei}} = \vec{0} \quad \leadsto \quad \text{rot } \vec{H} = \vec{0}.$$

$$\begin{aligned} \vec{j} &= c \text{ rot } \vec{M} & \vec{M} &= \chi_m \vec{H} = \mu^{-1} \vec{H} \\ &= \frac{c}{4\pi} \text{ rot}[(\mu - 1) \vec{H}] \\ &= \frac{c}{4\pi} (\text{grad } \mu \times \vec{H} + \mu \text{ rot } \vec{H}) \\ &= \frac{c}{4\pi} \text{grad } \mu \times \vec{H} \end{aligned}$$

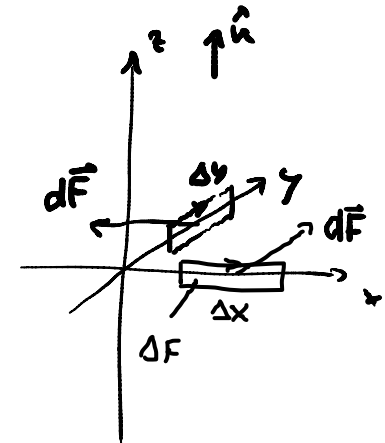
D.h.  $\vec{j} \neq \vec{0}$  nur an Grenzfläche.

# Grenzbedingungen

4

1)  $\vec{H}$ -Feld

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{fre}} \quad , \quad \vec{j}_{\text{fre}} = \begin{pmatrix} K_x(x,y) \delta(z) \\ K_y(x,y) \delta(z) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{II} \\ \text{I} \end{matrix}$$



$\vec{K}$  = „Längendichte“ des idealisierten Flächenstroms in der Grenzfläche

$$\frac{4\pi}{c} \int_{\Delta F} d\vec{F} \cdot \vec{j}_{\text{fre}} = \frac{4\pi}{c} \int_{\Delta x \Delta z} dx dz j_y(x,y) = \frac{4\pi}{c} \int_{\Delta x} dx K_y = \frac{4\pi}{c} \Delta x K_y$$

$$= \int_{\Delta F} d\vec{F} \cdot \text{rot } \vec{H} = \int_{\partial(\Delta F)} d\vec{r} \cdot \vec{H} = \Delta x (H_x^{\text{II}} - H_x^{\text{I}})$$

$$\leadsto H_x^{\text{II}} - H_x^{\text{I}} = \frac{4\pi}{c} K_y$$

$$\text{Analog: } H_y^{\text{II}} - H_y^{\text{I}} = -\frac{4\pi}{c} K_x \quad (\text{Normale zeigt in } -x\text{-Richtung})$$

$$\leadsto \boxed{\hat{n} \times (\vec{H}^{\text{II}} - \vec{H}^{\text{I}}) = \frac{4\pi}{c} \vec{K}}$$

Spezialfall:  $\vec{K} = \vec{0}$  keine freien Ströme an Grenzfläche

$\leadsto \hat{n} \times (\vec{H}^{\text{II}} - \vec{H}^{\text{I}}) = \vec{0}$ , d.h. Tangentialkomponenten von

$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}$  stetig an Grenzfläche.

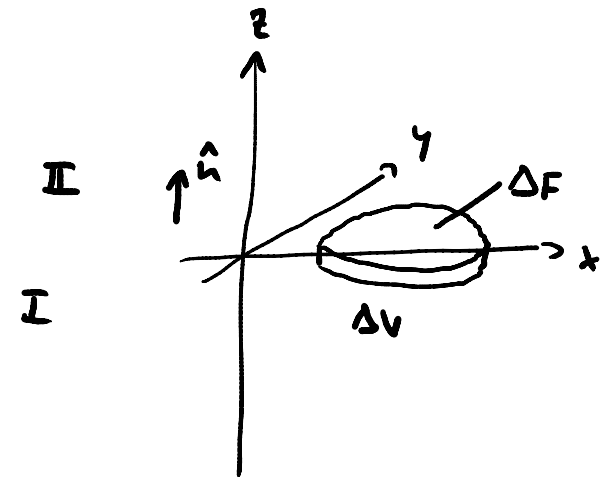
2)  $\vec{B}$ -Feld

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$0 = \int_{\Delta V} d^3r \, \text{div } \vec{B} = \int_{\partial(\Delta V)} d\vec{F} \cdot \vec{B} = \Delta F (B_z^{\text{II}} - B_z^{\text{I}})$$

$$\leadsto B_z^{\text{II}} - B_z^{\text{I}} = 0$$

$$\leadsto \boxed{\vec{n} \cdot (\vec{B}^{\text{II}} - \vec{B}^{\text{I}}) = 0}, \text{ d.h. Normalkomponente von } \vec{B} \text{ stetig an Grenzfläche}$$



### 6.11.3 Makroskopische Maxwellgleichungen

Mikroskopisch

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \vec{B} \\ \text{div } \vec{B} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c} \partial_t \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \text{div } \vec{E} = 4\pi \rho \end{cases}$$

Makroskopisch

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_{\text{frei}} - \text{div } \vec{P} & \vec{D} &= \vec{E} + 4\pi \vec{P} \\ \vec{j} &= \vec{j}_{\text{frei}} + c \text{rot } \vec{M} & \vec{H} &= \vec{B} - 4\pi \vec{M} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \vec{D} \\ \text{div } \vec{D} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \partial_t \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{frei}} \\ \text{div } \vec{D} = 4\pi \rho_{\text{frei}} \end{cases}$$



# 7. Spezielle Relativitätstheorie

## 7.1 Tensorkalkül

### 7.1.1 Bezugssystemwechsel

3D : Vektor  $\vec{x} = \sum_{i=1}^3 x_i \hat{e}_i = x^i \hat{e}_i$

Koordinaten  $x^i$  Index oben

Basisvektoren  $\hat{e}_i$  Index unten

4D :  $x = x^\mu \hat{b}_\mu \quad (\mu = 0, 1, 2, 3)$

Basiswechsel :  $\hat{b}'_\mu = A_\mu{}^\nu \hat{b}_\nu$

Koordinatentransformation :  $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$

Verlange Invarianz  $x = x'$

$$\begin{aligned} x^\mu \hat{b}_\mu &\stackrel{!}{=} x'^\mu \hat{b}'_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu A_\mu{}^\rho \hat{b}_\rho \leadsto \Lambda^\mu{}_\nu A_\mu{}^\rho = \delta_\nu^\rho \\ &= x^\nu \delta_\nu^\rho \hat{b}_\rho \end{aligned}$$

$$\left[ \text{NB: Kronecker-Symbol } \delta_{\mu}^{\nu} = \delta^{\nu}_{\mu} = \delta_{\mu}^{\nu} \quad \text{Komponenten der Einheitsmatrix} \right]$$

$$\leadsto \Lambda^{\mu}_{\nu} = (A^{-1})^{\mu}_{\nu} = [(A^{-1})^T]^{\mu}_{\nu}$$

$$\leadsto \Lambda = (A^{-1})^T$$

$$\leadsto \Lambda^T = A^{-1}$$

$$\leadsto A = (\Lambda^T)^{-1}$$

Koordinaten (Index oben) transformieren mit  $\Lambda$   
 Basisvektoren (Index unten) transformieren mit  $(\Lambda^T)^{-1}$   
 Transformationseigenschaft:

$$V^{\mu} \text{ kontravariant} \Leftrightarrow V'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} V^{\nu}$$

$$V_{\mu} \text{ kovariant} \Leftrightarrow V'_{\mu} = (\Lambda^T)^{-1}_{\mu}{}^{\nu} V_{\nu}$$

## 7.1.2 Skalare, Tensoren

Skalar  $s = A_\mu B^\mu$

$$s' = A'_\mu B'^\mu = ((\Lambda^T)^{-1})_\mu^\nu A_\nu \Lambda^\mu_\rho B^\rho$$

$$= \underbrace{(\Lambda^\tau)_\rho^\mu ((\Lambda^T)^{-1})_\mu^\nu}_{= (\Lambda^T (\Lambda^T)^{-1})_\rho^\nu = \delta_\rho^\nu} A_\nu B^\rho = A_\nu \delta_\rho^\nu B^\rho = A_\nu B^\nu = s \quad \checkmark$$

Tensor:  $T_{\mu_1 \dots \mu_n}^{\mu_1 \dots \mu_n}$  n-ter Stufe (n Indizes)

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\mu_1 \dots \mu_n} = ((\Lambda^T)^{-1})_{\mu_1}^{\nu_1} \Lambda^{\mu_2}_{\nu_2} \dots T_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\nu_1 \dots \nu_n}$$

Verjüngung (Kontraktion):  $T^\mu_{\nu\mu}$  kovarianter Vektor

### 7.1.3 Skalarprodukt, metrischer Tensor

$$x \cdot y = x^\mu \hat{b}_\mu \cdot y^\nu \hat{b}_\nu = x^\mu y^\nu \underbrace{\hat{b}_\mu \cdot \hat{b}_\nu}_{= g_{\mu\nu}}$$

metrischer Tensor  $g_{\mu\nu} = \hat{b}_\mu \cdot \hat{b}_\nu = \hat{b}_\nu \cdot \hat{b}_\mu = g_{\nu\mu}$  symmetrisch

Inverser metrischer Tensor  $g^{\mu\nu}$ :  $g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu = g_{\nu\rho} g^{\rho\mu}$

$$\begin{aligned} 3D: \quad g_{ij} &= \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij} \\ \vec{x} \cdot \vec{y} &= x^i y^i \delta_{ij} = \sum_{i=1}^3 x^i y^i \end{aligned}$$

Suche lineare Transformation, die  $\vec{x} \cdot \vec{y}$  invariant läßt.

$$x'^i = \Lambda^i_j x^j$$

$$\begin{aligned} x^i y^j \delta_{ij} &\stackrel{!}{=} x'^i y'^j \delta_{ij} = \Lambda^i_k x^k \Lambda^j_l y^l \delta_{ij} \\ &= x^k y^l \delta_{kl} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Koeffizientenvergleich } \wedge \Lambda^i_k \Lambda^j_l \delta_{ij} &= \delta_{kl} \\ &= (\Lambda^T)_k^i \delta_{ij} \Lambda^j_l \end{aligned}$$

$$\wedge \Lambda^T \mathbb{1} \Lambda = \Lambda^T \Lambda = \mathbb{1} \wedge \Lambda \text{ orthogonal}$$

$$\begin{aligned} \det(\Lambda^T \Lambda) &= \det \Lambda^T \det \Lambda = (\det \Lambda)^2 \\ &= \det \mathbb{1} = 1 \end{aligned}$$

$$\wedge |\det \Lambda| = 1$$

$$\wedge \begin{cases} \det \Lambda = 1 & \text{Drehung} \\ \det \Lambda = -1 & \text{Drehspiegelung} \end{cases}$$

$O(3)$  : Gruppe der orthogonalen  $3 \times 3$ -Matrizen.

## 7.2 Lorentztransformation

### 7.2.1 Herleitung

$x^\mu$  kontravarianter Vektor  $\wedge dx^\mu = x'^\mu - x^\mu$  kontrav. Vekt.

$df = dx^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} f$  totales Differential. Skalar, da

Änderung der Funktion unabhängig von Wahl des Bezugssystems

$\wedge \frac{\partial f}{\partial x^\mu}$  kovarianter Vektor

Beweis:  $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \wedge \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \Lambda^\mu_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu} x'^\mu = \partial_\nu x'^\mu$

$\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \underset{\uparrow}{=} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \Lambda^\mu_\nu \partial'_\mu = (\Lambda^T)_\nu{}^\mu \partial'_\mu$

Kettenregel

$\wedge \partial'_\mu = (\Lambda^T)^{-1}{}^\nu{}_\mu \partial_\nu \wedge \partial_\nu$  kovariant  $\vee$

Definiere Viererortsvektor  $x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix}$

Ereignis, Weltpunkt

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \partial_t \\ \vec{\nabla} \end{pmatrix}$$

Verlange, dass Wellengleichung  $\square f(x) = 0$  forminvariant unter Koordinatentransformation  $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$  ist, d.h.

$$\square' f'(x') = 0$$

$f(x)$  skalare Funktion, d.h.  $f'(x') = f(x)$ .

NB:  $f(x') = f(x) \sim f = \text{const}$ , nicht gemeint.

Müssen verlangen, dass  $\square' = \square$ .

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 = -\frac{\partial^2}{\partial x^0{}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^1{}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2{}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^3{}^2}$$

$$= -g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = -\partial_\mu g^{\mu\nu} \partial_\nu$$

$\leadsto$  inverser metrischer Tensor  $g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g^{\nu\mu}$

$\leadsto g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  metrischer Tensor, Metrik

Test:  $g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = g_{\nu\rho} g^{\rho\mu} = \delta_\nu^\mu \checkmark$

$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu$  Lauf- und Runterziehen von

$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$  Indizes mit (inversen) metrischen Tensor.



Verlangen  $\square' = \square$

$$\square = -g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = -g_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu$$

$$\text{NB: } \Lambda^\mu{}_\nu B_\mu = A_\nu B^\mu$$

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu &\stackrel{!}{=} g_{\mu\nu} \partial'^\mu \partial'^\nu = \underline{g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \partial^\rho \partial^\sigma} \\ &= \underline{g_{\rho\sigma} \partial^\rho \partial^\sigma} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \leadsto g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma &= g_{\rho\sigma} \\ &= (\Lambda^\top)_\rho{}^\mu g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma \end{aligned}$$

$\Lambda^\top g \Lambda = g$  Definitionsgl. der Lorentz-Transformation

NB:  $g_{\mu\nu}, g^{\mu\nu}$  invariant unter LT (Lorentz-invariant)

NB:  $x = x^\mu \hat{b}_\mu = x' = x'^\mu \hat{b}'_\mu$ , besser  $\vec{x} = x^\mu \hat{b}_\mu$

$f(x)$

↑  
Koordinaten  $x^\mu$ ,  $\{x^0, x^1, x^2, x^3\}$

$$f'(x') = f(x)$$

## 7.2.2 Eigenschaften der LT

$$1) \det g = \det(\Lambda^T g \Lambda) = \det(\Lambda^T) \det g \det \Lambda = \det g (\det \Lambda)^2$$

$$\leadsto |\det \Lambda| = 1$$

$$\det \Lambda = \begin{cases} +1 & \text{eigentliche LT} \\ -1 & \text{uneigentlichen LT} \end{cases}$$

$$L^{\uparrow, \downarrow} = \{ \Lambda \in L : \det \Lambda = \pm 1 \}$$

$$2) \text{ Identische LT : } \Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu \in L^{\uparrow}$$

$$3) \det \Lambda \neq 0 \leadsto \Lambda^{-1} \text{ existiert}$$

$$4) \quad 1 = g_{00} = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_0 \Lambda^\nu_0 = (\Lambda^0_0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i_0)^2$$

$$\Rightarrow (\Lambda^0_0)^2 = 1 + \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i_0)^2 \geq 1$$

$$\Rightarrow |\Lambda^0_0| \geq 1$$

$$\Lambda^0_0 \begin{cases} \geq 1 & \text{orthochrone LT} \\ \leq -1 & \text{antichrone LT} \end{cases}$$

$$L_{\pm} = \{ \Lambda \in L : \Lambda^0_0 \geq 1, \leq -1 \}$$

$$g^\mu_\nu \in L_+$$

$$L = L^\uparrow \cup L_\downarrow = L_+ \cup L_- = L^\uparrow_+ \cup L^\uparrow_- \cup L^\downarrow_+ \cup L^\downarrow_-$$

|                  | Zeitumkehr | Raumspiegelung |
|------------------|------------|----------------|
| $L_+^\uparrow$   |            |                |
| $L_-^\uparrow$   | ✓          | ✓              |
| $L_+^\downarrow$ |            | ✓              |
| $L_-^\downarrow$ | ✓          |                |

$L_+^\uparrow$  physikalisch besonders wichtig,  
kovariant mit  $\mathbb{1}$  verknüpft.

5) (i) Abgeschlossenheit

$$\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)} \in L \rightarrow \Lambda^{(3)} = \Lambda^{(1)} \Lambda^{(2)} \in L$$

$$\text{z.z. } \Lambda^{(3)T} \mathfrak{g} \Lambda^{(3)} = \mathfrak{g}.$$

(ii) Assoziativgesetz

$$\Lambda^{(3)} (\Lambda^{(1)} \Lambda^{(2)}) = (\Lambda^{(3)} \Lambda^{(1)}) \Lambda^{(2)} = \Lambda^{(3)} \Lambda^{(1)} \Lambda^{(2)}$$

$$(iii) \quad \mathbb{1} \in L, \quad \mathbb{1} \Lambda = \Lambda \mathbb{1} = \Lambda, \quad \mathbb{1} \in L$$

$$(iv) \quad \Lambda \in L \leadsto \Lambda^{-1} \in L$$

$L$  Gruppe

$L^\uparrow, L_+, L_+^\uparrow$  Untergruppen von  $L$

### 7.2.3 Levi-Civita-Tensor

$$3D: \quad \varepsilon_{ijk} = \hat{e}_i \cdot (\hat{e}_j \times \hat{e}_k)$$

$$A_i{}^1 A_j{}^2 A_k{}^3 \varepsilon_{ijk} = \vec{A}_1 \cdot (\vec{A}_2 \times \vec{A}_3) = \underbrace{\begin{vmatrix} A_1^1 & A_1^2 & A_1^3 \\ A_2^1 & A_2^2 & A_2^3 \\ A_3^1 & A_3^2 & A_3^3 \end{vmatrix}}_{= A \text{ 3x3-Matrix}} = \det A \cdot \varepsilon_{123}$$

$$\wedge A_i{}^l A_j{}^m A_k{}^n \varepsilon_{lmn} = \varepsilon_{ijk} \det A$$

$$B = A^T: \quad \varepsilon_{lmn} B^l{}_i B^m{}_j B^n{}_k = \varepsilon_{ijk} \det A$$

Minkowski-Raum:

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1, & (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ gerade Permutation von } (0, 1, 2, 3) \\ -1, & \text{un-} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$A_\alpha{}^\mu A_\rho{}^\nu A_\gamma{}^\rho A_\delta{}^\sigma \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \varepsilon_{\alpha\rho\gamma\delta} \det A$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} B^\mu{}_\alpha B^\nu{}_\rho B^\rho{}_\gamma B^\sigma{}_\delta = \varepsilon_{\alpha\rho\gamma\delta} \det B$$

### 7.2.4 Beispiele von $\Lambda \in L_+^\uparrow$

1) Raumdrehungen

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R^i{}_j \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad R \in O(3)$$

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu : \begin{cases} t' = t \\ \vec{r}' = R \cdot \vec{r} \end{cases}$$

2) Boost in z-Richtung

$$\Lambda_v = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

$$g' = \Lambda^T g \Lambda = \begin{pmatrix} \gamma^2(1-\beta^2) & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -\gamma^2(1-\beta^2) \end{pmatrix}$$

$$\wedge \gamma^2(1-\beta^2) = 1 \quad \wedge \gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2} \geq 0 \quad (\text{weil } \gamma \text{ imaginär})$$

$$\wedge \beta^2 \leq 1 \quad \wedge |\beta| \leq 1$$

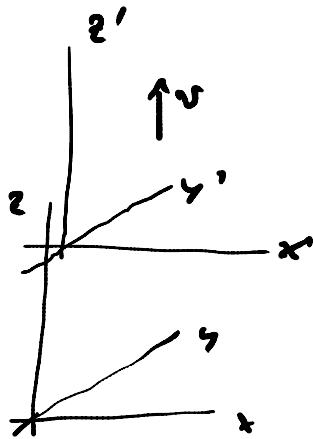
$$\Lambda \in L_+^\uparrow \quad \wedge \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \geq 1$$

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} : \quad \begin{cases} ct' = \gamma (ct - \beta z) \\ x' = x \\ y' = y \\ z' = \gamma (z - \beta ct) \end{cases}$$

Nichtrelativistischer Grenzfall  $|\beta| \ll 1 : \gamma = 1 + O(\beta^2)$

$$\begin{cases} t' = t - \frac{\beta}{c} z + O(\beta^2) \\ z' = z - \beta ct + O(\beta^2) \end{cases}$$

$$c \rightarrow \infty, \beta c = v = \text{const} \leadsto \beta = \frac{v}{c} \rightarrow 0 \quad \begin{cases} t' = t \\ z' = z - vt \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Galilei-} \\ \text{Transformation} \end{array}$$



Boost in  $z$ -Richtung mit Geschwindigkeit  $v$   
 Galilei-Transform bricht Lorentzinvarianz  
 von  $\square \leadsto$  Wellengl. nicht forminvariant  
 bei Bezugssystemwechsel ⚡



## 7.2.5 Geschwindigkeit addition

Bei Boost in  $z$ -Richtung  $x, y$  unverändert.

$$\Lambda_i = \begin{pmatrix} \gamma_i & -\beta_i \gamma_i \\ -\beta_i \gamma_i & \gamma_i \end{pmatrix} \quad (i=1,2)$$

$$\Lambda_3 = \Lambda_2 \Lambda_1 = \gamma_1 \gamma_2 \begin{pmatrix} 1 + \beta_1 \beta_2 & -\beta_1 - \beta_2 \\ -\beta_1 - \beta_2 & 1 + \beta_1 \beta_2 \end{pmatrix}$$

$$= \gamma_3 \begin{pmatrix} 1 & -\beta_3 \\ -\beta_3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_3 \begin{cases} \beta_3 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2} = 1 - \frac{(1 - \beta_1)(1 - \beta_2)}{1 + \beta_1 \beta_2} \leq 1 \\ \gamma_3 = \gamma_1 \gamma_2 (1 + \beta_1 \beta_2) \end{cases}$$

$$\text{Probe: } \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_3^2}} \quad \checkmark$$

Durch Addition von Geschwindigkeiten kann  $c$  nicht überschritten werden. Klar, da  $L_+^\uparrow$  Gruppe.

## 7.2.6 Lichtkegel

Betrachte 2 Ereignisse  $x_i^\mu = \begin{pmatrix} ct_i \\ \vec{r}_i \end{pmatrix} \quad (i=1,2)$

$$\Delta x^\mu = x_2^\mu - x_1^\mu$$

$$\begin{aligned} (\Delta x)^2 &= (x_2 - x_1)^2 = (x_2 - x_1)^\mu g_{\mu\nu} (x_2 - x_1)^\nu = c^2 (t_2 - t_1)^2 - (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2 \\ &= c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta \vec{r})^2 \end{aligned}$$

$$(\Delta x)^2 \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 0 \quad \wedge \quad \left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} c$$

$\wedge$  Ereignisse sind  $\left\{ \begin{array}{ll} \text{zeitartig} & A \\ \text{lichtartig} & B \\ \text{raumartig} & C \end{array} \right\}$  getrennt.

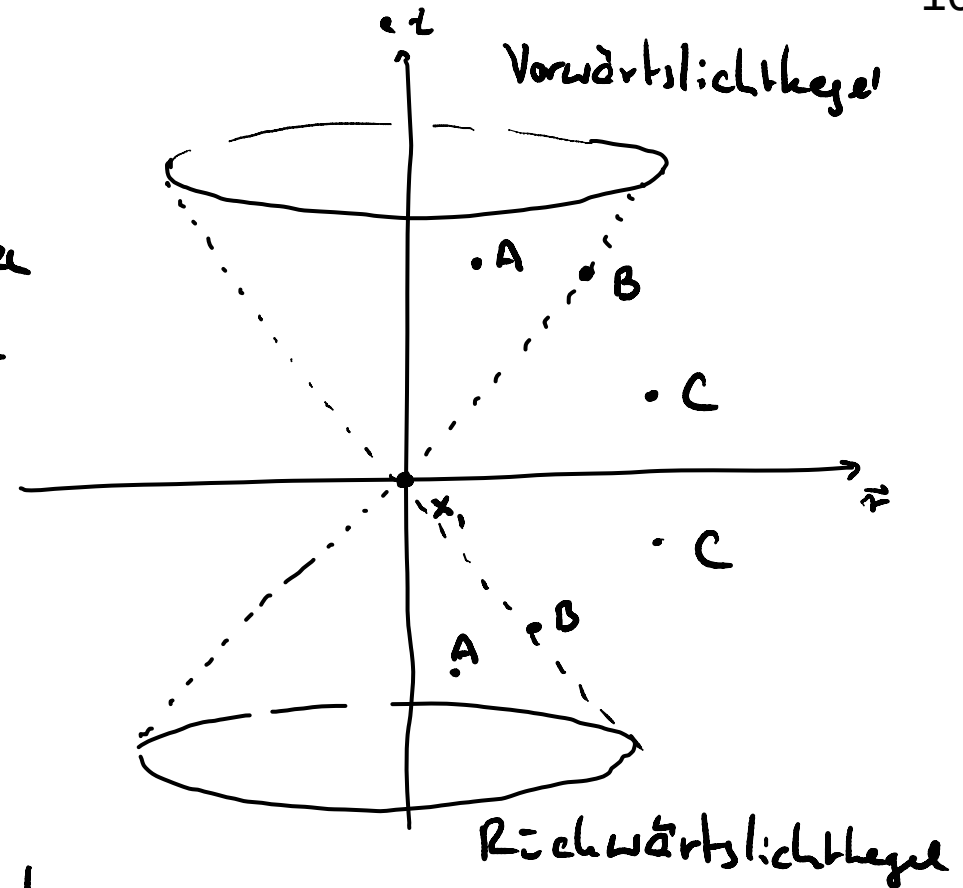
$x_2$  bei A, B, C

Beobachter 1 kann Signal nur  
a., Rückwärtslichtkegel empfangen  
bzw. k. Vorwärtslichtkegel senden

Falls Beobachter 2 in / auf  
Lichtkegel, dann  $v < / = c$ .

Zeitliche Aufeinanderfolge  
von  $x_1, x_2$  eindeutig, wenn  
 $(\Delta x)^2 \geq 0$  (Kausalität).

Bei  $(\Delta x)^2 < 0$  hängt zeitliche  
Reihenfolge bzw. Gleichzeitigkeit  
vom Bezugssystem ab.



### 4.2.7. Zeitdilatation

2 Ereignisse im RL System  $x_i^T = \begin{pmatrix} ct_i \\ z_i \end{pmatrix} \quad (i=1,2)$

Boost um  $\beta$  in  $z$ -Richtung

$$ct'_i = \gamma (ct_i - \beta z_i) \quad \wedge \quad \Delta t' = \gamma \Delta t \geq \Delta t$$

↳ bewegtes Bezugssystem (RL System des bewegten Beobachters)  
vergeht Zeit langsamer.

### 4.2.8. Längenkontraktion

2 Ereignisse im RL System  $x_i^T = \begin{pmatrix} ct_i \\ z_i \end{pmatrix} \quad (i=1,2)$

Länge  $l = z_2 - z_1$  (Zeit spielt keine Rolle)

Boost  $ct'_i = \gamma (ct_i - \beta z_i)$

$$z'_i = \gamma (z_i - \beta ct_i)$$

Beobachter im bewegten System relativ zum Stab misst dessen Länge, indem er gleichzeitig den Ort der Enden bestimmt.

$$t'_1 = t'_2 \quad \leadsto \quad c(t_2 - t_1) = \beta l$$

$$\leadsto l' = z'_2 - z'_1 = \gamma(l - \beta^2 l) = \frac{l}{\gamma} \leq l$$

## 4.3. Relativistische Dynamik

### 4.3.1. Eigenzeit

Kl. Mechanik:  $\vec{r}(t)$  Bahnkurve

Sp. Rel. Th.:  $t$  abhängig vom Bezugssystem

Wähle Eigenzeit  $\tau$  = Zeit im Ruhesystem des bewegten Markpunktes

$$(dx)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2(dt)^2 - (d\vec{r})^2 = \underbrace{\left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2\right]}_{=\gamma^2} c^2 dt^2 = \frac{c^2}{\gamma^2} dt^2$$

$$\leadsto ds = \sqrt{(dx)^2} = \frac{c}{\gamma} dt \equiv c d\tau$$

$$\leadsto d\tau = \frac{dt}{\gamma} \quad \text{Lorentzinvariant}$$

$$\text{Eigenzeit} \quad \tau = \int d\tau = \int \frac{dt}{\gamma} = \int dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2},$$

wobei  $\vec{r}(t)$  Bahnkurve des bewegten Messpunktes  
im Bezugssystem des Beobachters

### 4.3.2. Vierergeschwindigkeit

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad \text{Vierervektor} \quad \checkmark$$

$$= \gamma \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$u^2 = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \gamma^2 (c^2 - \vec{v}^2) = c^2 > 0 \quad \text{zeitartig}$$

ut Tangente an Bahnkurve im Michelsonschen (Weltlinie)  
 steht zeitartig  $\leadsto$  Bahnkurve verläuft innerhalb des  
 Lichtkegels.

### 4.3.3 Viererimpuls

$$p^\mu = m u^\mu \quad \text{Vierervektor}$$

$\uparrow$   
 Ruhesystem

$$p^\mu = \gamma m \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}$$

$$p^2 = p^0{}^2 - \vec{p}^2 = m^2 c^2$$

$$\leadsto p^0 = \sqrt{m^2 c^2 + \vec{p}^2} = mc \sqrt{1 + \frac{\vec{p}^2}{m^2 c^2}} = mc + \frac{\vec{p}^2}{2mc} - \frac{(\vec{p}^4)^2}{8m^3 c^3} + O((\vec{p}^2)^3)$$

$$\leadsto E = c p^0 = mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{(\vec{p}^4)^2}{8m^3 c^2} + O((\vec{p}^2)^3)$$

$\uparrow$                        $\uparrow$                        $\nwarrow$   
 Ruheenergie      kl. kin. Energie      rel. Korrektur

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} = \frac{E}{c^2} \vec{v}$$

### 4.3.4. Viererpotenzial

$$F^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} \frac{P}{c} \\ \vec{F} \end{pmatrix}$$

Viererpotenzial ✓

$$P = \dot{E} = e \vec{v} \cdot \vec{E} \quad \text{Leistung}$$

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = e \left( \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{H} \right) \quad \text{Lorentzkraft}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$$

$$F^\mu = e \gamma \begin{pmatrix} \vec{\beta} \cdot \vec{E} \\ \vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{H} \end{pmatrix}$$

### 4.4. Relativistische Formulierung der Elektrodynamik

Lorentzgleichung  $0 = \frac{1}{c} \partial_t \varphi + \text{div} \vec{A} = \partial_\mu \varphi + \partial_i A^i = \partial_\mu A^\mu$

Viererpotenzial  $A^\mu = \begin{pmatrix} \varphi \\ \vec{A} \end{pmatrix}$



$$\left. \begin{aligned} \square \varphi &= -4\pi\rho \\ \square \vec{A} &= -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \end{aligned} \right\} \leadsto \square A^\mu = -\frac{4\pi}{c} j^\mu$$

Viererstromdichte  $j^\mu = \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$

Feldstärke tensor  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = -F_{\nu\mu}$

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu = \begin{pmatrix} \varphi \\ -\vec{A} \end{pmatrix}$$

Merke regel:  $A_0 = A^0$ ,  $A_i = -A^i$

Eichtransformation  $\left\{ \begin{aligned} \varphi' &= \varphi - \frac{1}{c} \partial_t f \\ \vec{A}' &= \vec{A} + \text{grad } f \end{aligned} \right.$

$$\left. \begin{aligned} A'^0 &= A^0 - \partial_0 f = A^0 - \partial^0 f \\ A'^i &= A^i + \partial_i f = A^i - \partial^i f \end{aligned} \right\} \leadsto A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu f$$

$$\leadsto A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu f$$

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu} \text{ eichinvariant}$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \vec{A} - \text{grad} \varphi \leadsto E^i = -\partial_0 A^i - \partial_i A^0 = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = F_{0i} = -F_{i0}$$

$$\vec{H} = \text{rot} \vec{A} \leadsto H^i = \epsilon_{ijk} \partial_j A^k = -\epsilon_{ijl} \partial_j A_l$$

$$\begin{aligned} \leadsto -\epsilon_{ijl} H^k &= \underbrace{\epsilon_{ijl} \epsilon_{klm}} \partial_l A_m = \partial_i A_j - \partial_j A_i = F_{ij} = -F_{ji} \\ &= \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \end{aligned}$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & -H^3 & H^2 \\ -E^2 & H^3 & 0 & -H^1 \\ -E^3 & -H^2 & H^1 & 0 \end{pmatrix}$$

NB:  $E^i, H^i$  sind nicht 1,2,3-Komponenten von Vektoren!

$$\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} \\ = \partial_\rho (\cancel{\partial_\mu A_\nu} - \cancel{\partial_\nu A_\mu}) + \partial_\mu (\cancel{\partial_\nu A_\rho} - \cancel{\partial_\rho A_\nu}) + \partial_\nu (\cancel{\partial_\rho A_\mu} - \cancel{\partial_\mu A_\rho}) = 0$$

nichttrivial nur für  $\mu \neq \nu \neq \rho \neq \mu \leadsto 4$  Gleichungen

$$(\mu, \nu, \rho) = (1, 2, 3) :$$

$$0 = \partial_3 F_{12} + \partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} = -\partial_3 H^3 - \partial_1 H^1 - \partial_2 H^2 = -\operatorname{div} \vec{H} \quad \checkmark$$

$$(\mu, \nu, \rho) = (0, 2, 3) :$$

$$0 = \partial_3 F_{02} + \partial_0 F_{23} + \partial_2 F_{30} = \partial_3 E^2 - \partial_0 H^1 - \partial_2 E^3 = -\frac{1}{c} \partial_t H^1 - (\operatorname{rot} \vec{E})^1$$

$$2. \text{ weitere Gl. } \leadsto \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \vec{H} \quad \checkmark$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = g^{\mu\lambda} g^{\nu\lambda'} g^{\rho r} g^{\sigma s} \varepsilon_{\lambda\lambda'rs} = \det g \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$$

Duale Feldstärke tensor  $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = -\tilde{F}^{\nu\mu}$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu (\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \partial_\rho A_\sigma = 0$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}^{0i} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{0i\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \varepsilon^{0ijh} F_{jh} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{0ijh} F_{jh} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijh} F_{jh} \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\varepsilon_{ijh} \varepsilon_{jhl}}_{= 2\delta_{il}} H^l = H^i = -\tilde{F}^{i0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}^{ij} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{ij\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} (\varepsilon^{ij0h} F_{0h} + \varepsilon^{ijh0} F_{h0}) \\ &= \varepsilon^{ij0h} F_{0h} = \varepsilon^{0ijh} E^h = -\varepsilon_{0ijh} E^h = -\varepsilon_{ijh} E^h \end{aligned}$$

$$\leadsto \begin{cases} \tilde{F}_{0i} = -\tilde{F}^{0i} = -H^i \\ \tilde{F}_{ij} = \tilde{F}^{ij} = -\varepsilon_{ijh} E^h \end{cases}$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -H^1 & -H^2 & -H^3 \\ H^1 & 0 & -E^3 & E^2 \\ H^2 & E^3 & 0 & -E^1 \\ H^3 & -E^2 & E^1 & 0 \end{pmatrix}$$


---

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E} &= \partial_i E^i = \partial_i F_{0i} = -\partial_i F^{0i} = \partial_i F^{i0} = \partial_\mu F^{\mu 0} \\ &= 4\pi\rho = \frac{4\pi}{c} j^0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{curl } \vec{H})^i &= \epsilon_{ijk} \partial_j H^k = -\partial_j F_{ij} = -\partial_j F^{ij} = \partial_j F^{ji} \\ &= \frac{1}{c} \partial_t E^i + \frac{4\pi}{c} j^i = \partial_0 F_{0i} + \frac{4\pi}{c} j^i = -\partial_0 F^{0i} + \frac{4\pi}{c} j^i \end{aligned}$$

$$\leadsto \partial_\mu F^{\mu i} = \frac{4\pi}{c} j^i$$

$$\leadsto \boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu}$$

Lorentzwiererkraft

$$F^\mu = e\gamma \begin{pmatrix} \vec{\beta} \cdot \vec{E} \\ \vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{H} \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$u^\mu = c\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{\beta} \end{pmatrix}$$

$$F^\mu = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_\nu \quad (\text{Behauptung})$$

$$F^0 = \frac{e}{c} F^{0i} u_i = \frac{e}{c} F_{0i} u^i = \frac{e}{c} E^i c\gamma \beta^i = e\gamma \vec{\beta} \cdot \vec{E}$$

$$\begin{aligned} F^1 &= \frac{e}{c} (F^{10} u_0 + F^{12} u_2 + F^{13} u_3) = \frac{e}{c} (-F_{10} u^0 - F_{12} u^2 - F_{13} u^3) \\ &= \frac{e}{c} (F_{01} u^0 - F_{12} u^2 + F_{31} u^3) = e\gamma (E^1 + H^3 \beta^2 - H^2 \beta^3) \\ &= e\gamma \left[ E^1 + (\vec{\beta} \times \vec{H})^1 \right] \end{aligned}$$

$$\leadsto F^i = e\gamma (\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{H})^i$$

$$\left. \begin{aligned} \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} &= 0 \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \frac{4\pi}{c} j^\nu \end{aligned} \right\} \text{Maxwellgleichungen}$$

$$F^\mu = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_\nu \quad \text{Lorentzkraft + Leistung}$$