

# Physik 5

## Teilchen und Kerne

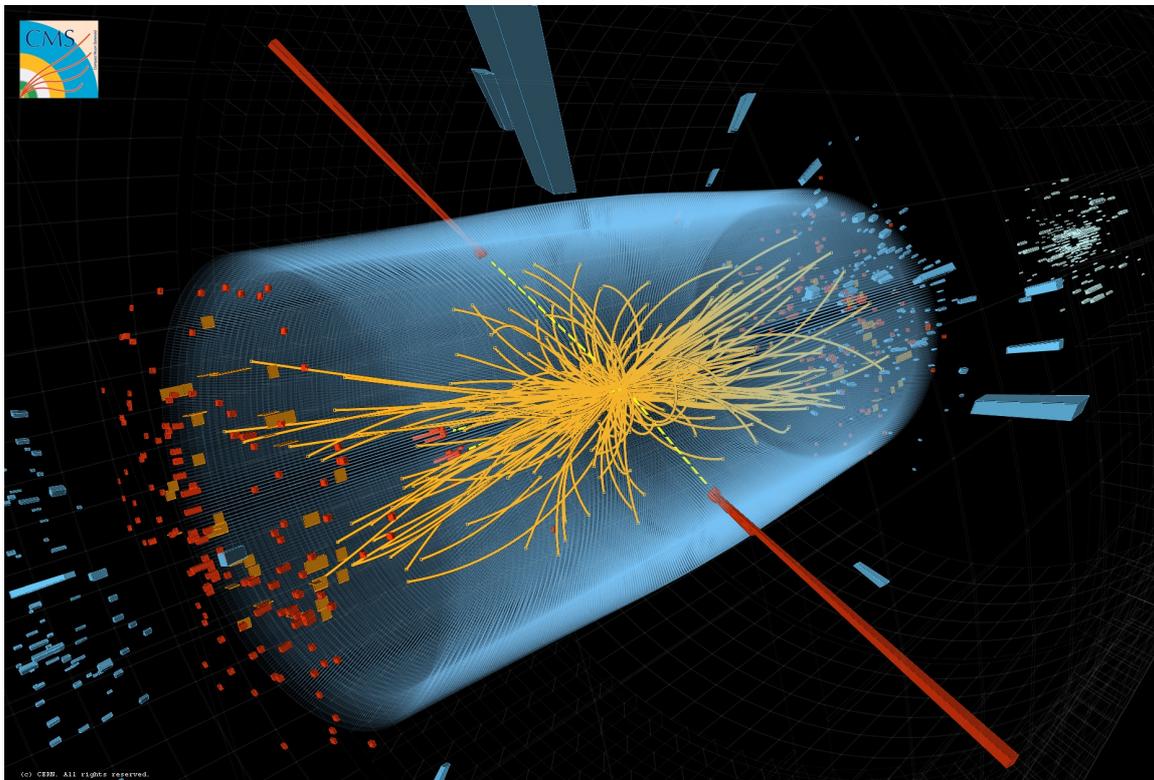
Notizen zur Vorlesung im Wintersemester 2016-2017

Peter Schleper

5. Dezember 2016

Institut für Experimentalphysik, Universität Hamburg  
peter.schleper@physik.uni-hamburg.de

[http://www.desy.de/~schleper/lehre/physik5/WS\\_2016\\_17](http://www.desy.de/~schleper/lehre/physik5/WS_2016_17)





# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Vorwort</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Einleitung</b>	<b>9</b>
2.1	Bausteine der Materie . . . . .	9
2.2	Elementare Teilchen . . . . .	10
2.3	Experimentelle Methoden . . . . .	12
2.4	Kräfte . . . . .	15
2.5	Hadronen . . . . .	18
2.6	Kerne . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Natürliche Einheiten</b>	<b>20</b>
<b>4</b>	<b>Relativistische Kinematik</b>	<b>22</b>
4.1	4-er Vektoren . . . . .	22
4.2	Skalarprodukt und Lorentztransformation . . . . .	23
4.3	4-er Impulse . . . . .	24
4.4	Schwerpunktsenergie . . . . .	26
4.5	Zwei-Körper-Zerfall . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Wirkungsquerschnitt</b>	<b>29</b>
5.1	Streuprozesse . . . . .	29
5.2	Rutherford-Streuung klassisch . . . . .	32
5.3	Rutherford-Streuung . . . . .	35
<b>6</b>	<b>Detektoren zur Messung elementarer Teilchen</b>	<b>38</b>
6.1	Übersicht . . . . .	38
6.2	Geladene Teilchen . . . . .	38
6.2.1	Ionisation und Bethe-Bloch-Formel . . . . .	38
6.2.2	Bremsstrahlung . . . . .	42
6.3	Spurdetektoren . . . . .	43
6.3.1	Impulsmessung im Magnetfeld . . . . .	43
6.3.2	Nebelkammern und Blaskammern . . . . .	43
6.3.3	Gas-Detektoren . . . . .	47
6.3.4	Halbleiter-Detektoren . . . . .	52
6.4	Photonen und elektromagnetische Schauer . . . . .	54
6.5	Hadronische Schauer . . . . .	56
6.6	Kalorimeter . . . . .	57
6.7	Detektorkonzepte und Identifizierung von Teilchen . . . . .	58
<b>7</b>	<b>Relativistische Quantenmechanik</b>	<b>61</b>
7.1	Schrödinger-Gleichung . . . . .	61
7.2	Klein-Gordon-Gleichung . . . . .	62
7.3	Dirac-Gleichung . . . . .	64
7.3.1	Algebra und Hamilton . . . . .	65
7.3.2	Bestimmung der $\gamma$ -Matrizen . . . . .	65

7.3.3	Drehimpuls und Spin . . . . .	67
7.3.4	Lösungen der Dirac-Gleichung . . . . .	68
7.3.5	Antimaterie . . . . .	69
<b>8</b>	<b>Streuprozesse und Zerfälle in der Quantenmechanik</b>	<b>71</b>
8.1	Fermi's Goldene Regel . . . . .	71
8.2	Fermi's Regel im Schwerpunktsystem . . . . .	73
8.3	Zerfallsgesetz . . . . .	75
8.4	Breit-Wigner Verteilung und virtuelle Teilchen . . . . .	77
<b>9</b>	<b>Struktur der Hadronen und Kerne</b>	<b>79</b>
9.1	Rutherford-Streuung . . . . .	79
9.2	Mott-Wirkungsquerschnitt . . . . .	80
9.3	Formfaktor . . . . .	81
9.4	Messungen der Proton- und Kernstrukturen . . . . .	82
<b>10</b>	<b>Wechselwirkungen und Symmetrien</b>	<b>87</b>
10.1	Yukawa Potential und Reichweite der Kräfte . . . . .	87
10.2	Quantenfelder und Feynman-Graphen . . . . .	89
10.3	Beispiele . . . . .	93
10.4	Fundamentale Graphen . . . . .	95
10.4.1	Elektromagnetismus . . . . .	95
10.4.2	Starke Wechselwirkung . . . . .	96
10.4.3	Schwache Wechselwirkung . . . . .	97
10.5	Quantenzahlen und Erhaltungssätze . . . . .	98
10.6	Symmetrie . . . . .	100
10.6.1	Klassische Impulserhaltung . . . . .	101
10.6.2	U(1) Phaseninvarianz und Ladung in der Quantenmechanik . . . . .	102
10.6.3	U(1) Eichinvarianz und Elektromagnetismus . . . . .	103
10.6.4	Vorhersagen der Eichtheorien . . . . .	105
<b>11</b>	<b>Schwache Wechselwirkung</b>	<b>106</b>
11.1	Historie der Schwachen Wechselwirkung . . . . .	106
11.2	Fermi-Konstante und W-Propagator . . . . .	107
11.3	Paritätsverletzung und V-A Theorie . . . . .	108
11.4	Standard-Modell der elektroschwachen Wechselwirkung	111
11.5	SU(2) Symmetrie der schwachen Wechselwirkung . . . . .	113
11.6	Neutrino-Streuung . . . . .	115
11.6.1	Geladener Strom . . . . .	115
11.6.2	Neutrale Ströme: $Z^0$ Austausch . . . . .	116
11.7	Entdeckung von $W$ und $Z$ . . . . .	117
11.8	$Z^0$ -Physik an $e^+e^-$ Beschleunigern . . . . .	118
11.9	WW Produktion in $e^+e^-$ Kollisionen . . . . .	123
11.10	$W$ und $Z$ Produktion in $p\bar{p}$ Kollisionen . . . . .	124
<b>12</b>	<b>Elektroschwache Symmetriebrechung: Higgs</b>	<b>127</b>
12.1	Der Higgs-Mechanismus im Standard-Modell . . . . .	128
12.2	Fermion-Higgs Kopplung und Fermion-Massen . . . . .	130
12.3	Eigenschaften des Higgs-Teilchens . . . . .	131
12.4	Higgs Zerfälle . . . . .	132

12.5	Entdeckung des Higgs-Bosons . . . . .	133
12.6	Zusammenfassung der Resultate zum Higgs vom LHC	136
<b>13</b>	<b>Flavour und Mischung der Fermionen</b>	<b>140</b>
13.1	Übergänge zwischen Quarks verschiedener Genera- tionen . . . . .	140
13.2	Massen und Mischungen der Neutrinos . . . . .	143
<b>14</b>	<b>Starke Wechselwirkung</b>	<b>145</b>
14.1	Quarks und Gluonen . . . . .	145
14.2	Potential der QCD . . . . .	147
14.3	Fragmentation und Jets . . . . .	149
14.4	Proton-Struktur . . . . .	151
14.5	Farbe und $SU(3)_C$ . . . . .	154
<b>15</b>	<b>Kerne</b>	<b>156</b>
15.1	Untersuchungsmethoden zur Kernphysik . . . . .	156
15.2	Eigenschaften der Kerne . . . . .	156
15.2.1	Ausdehnung des Kerne . . . . .	156
15.2.2	Massen und Bindungsenergien der Kerne . . . . .	157
15.3	Kernmodelle . . . . .	159
15.3.1	Tröpfchen-Modell der Kerne . . . . .	159
15.3.2	Fermi-Gas-Modell der Kerne . . . . .	161
15.3.3	Schalenmodell . . . . .	161
15.4	Kernzerfälle . . . . .	162
15.4.1	$\alpha$ -Zerfall der Kerne . . . . .	162
15.4.2	$\beta$ -Zerfälle der Kerne . . . . .	164
15.4.3	$\gamma$ -Zerfälle und innere Konversion . . . . .	168
15.5	Anwendungen der Kernphysik . . . . .	168
<b>16</b>	<b>Kosmologie und Physik jenseits des Standard-Modells</b>	<b>169</b>
16.1	Grenzen des Standard-Modells . . . . .	169
16.2	Phasen und Phasenübergänge im Kosmos . . . . .	171
16.3	Kerne im Kosmos . . . . .	172
16.3.1	Sterne und die Entstehung der Elemente . . . . .	172
16.3.2	Big Bang Nukleonsynthese . . . . .	173
16.4	Teilchen-Epochen im frühen Universum . . . . .	174
16.5	Dunkle Materie und Dunkle Energie . . . . .	175
<b>Anhang</b>		<b>177</b>

# 1 Vorwort

Scheinbar besteht die uns umgebende Natur und auch wir selber aus Atomen mit einem zentralen Kern und einer Hülle aus Elektronen, die über elektrische Kräfte (oder Photonen) aneinander gebunden sind. Die Kerne wiederum bestehen aus Protonen und Neutronen, aus deren Zahl sich im Wesentlichen die Masse der Atome, ihre elektrische Ladung und die Chemie der Atome ergibt.

Dieses Weltbild ist sicher zu naiv und so nicht richtig. Beginnend in den 1930er Jahren hat sich zunächst durch experimentelle Entdeckungen in der Höhenstrahlung, später vor allem an hochenergetischen Teilchenbeschleunigern und zunehmend durch theoretische Erkenntnisse ein Weltbild entwickelt, das sich heute das Standard-Modell der Teilchenphysik nennt. Zu diesen Entdeckungen gehört die Anti-Materie (1932), die Entdeckung von insgesamt 12 fundamentalen Teilchen, die ähnliche Eigenschaften wie das Elektron haben, sowie von über hundert weiteren Teilchen, die ähnlich wie Proton und Neutron als gebundene Zustände von sogenannten Quarks interpretiert werden können. Aus diesen Beobachtungen wurde zunächst theoretisch gefolgert, dass die Photonen nur die einfachste Spielart eines allgemeineren Konzepts sind, das auf Symmetrien der Natur beruht, und mit dem zusätzlich zur elektromagnetischen Kraft auch zwei weitere Naturkräfte formuliert werden können, diese sogenannte "schwache" und die "starke" Kraft. Obwohl sie theoretisch sehr ähnlich wie der Elektromagnetismus formuliert werden besitzen sie jedoch auch fundamental andere Eigenschaften. Die schwache Kraft erlaubt Umformungen verschiedener Teilchensorten ineinander, und die starke Kraft bindet die Quarks zu Protonen und Neutronen und diese wiederum zu Atomkernen.

Zu den fundamentalen Erkenntnissen gehört es, dass das Konzept der Symmetrien Vorhersagen von Naturgesetzen erlaubt und Beziehungen zwischen den Zahlenwerten von ansonsten scheinbar unabhängigen Naturkonstanten erfordert. Viele der daraus resultierenden Vorhersagen wurden später experimentell bestätigt, zuletzt die Vorhersage des Higgs-Teilchens durch seine Entdeckung im Jahr 2012.

Das Standard-Modell ist allerdings in seiner derzeitigen Form nicht in der Lage vorherzusagen oder zu erklären, wie sich das Universum aus der heißen Phase nach dem Urknall in seinen jetzigen Zustand entwickelt hat. Hierzu fehlen entscheidende Komponenten wie das Fehlen von Anti-Materie sowie die Existenz großer Mengen dunkler Materie und möglicher dunkler Energie. Erklärungen hierfür erfordern die Verletzung von Symmetrien (CP-Verletzung) oder neue, bisher unbekannte Symmetrien und erhaltene Quantenzahlen, möglicherweise aber auch Effekte durch die Gravitation, die als einzige Naturkraft bisher nicht ins Standard-Modell inkorporiert werden konnte. Es liegt nahe, dass diese Effekte Erweiterungen

## Standard-Modell der Teilchenphysik

des Standard-Modells in Energiebereichen oberhalb der jetzigen im Labor erreichten Energien erfordern. Das Standard-Modell ist daher als Approximation an eine allgemeinere Theorie zu verstehen, die aber bereits ausreichend genau ist, um experimentelle Beobachtungen im Rahmen ihrer jetzigen Präzision und bei ihren jetzigen Energien vorherzusagen.

Im Folgenden wird dieses Standard-Modell der Teilchenphysik - Stand 2016 - beschrieben sowie einige der Experimente, die zu seiner Entwicklung geführt haben. Die Kernphysik wird als Phänomen der starken Wechselwirkung eingeführt. Abschließend werden kosmologische Beobachtungen und Erweiterungen des Standard-Modells andiskutiert.

Auf eine historische Einführung in die Entwicklung der Teilchenphysik wird hier verzichtet. Einen Eindruck kann man jedoch anhand der Liste der Nobelpreise für dieses Thema gewinnen.

**Liste der Nobelpreise mit Bezug zur Teilchenphysik :**

Jahr	Name	Begründung
2015	T. Kajita, A. McDonald	Neutrino-Masse
2013	F.Englert, P. Higgs	Higgs-Mechanismus
2008	Y. Nambu, M. Kobayashi, T. Masukawa	Spontane Symmetrie-Brechung 6 Quarks, CKM-Matrix
2004	D. Gross, D. Politzer, F. Wilczek	Asymptotische Freiheit in der QCD
2002	R. Davis, M. Koshiba	Neutrino-Oszillationen
1999	G. t'Hooft, M. Veltman	Elektroschwache Wechselwirkung
1995	M.L. Perl, F. Reines	Entdeckung des $\tau$ -Neutrinos
1992	G. Charpak	Vieldraht-Proportionalzählrohr
1990	J.I. Friedmann, H.W.Kendall, R. Taylor	Entdeckung der Quarks in der Elektronstreuung an Protonen
1988	L.Ledermann, M. Schwartz, J. Steinberger	Entdeckung des $\mu$ -Neutrinos
1984	C. Rubbia, S. van der Meer	W/Z Entdeckung und stochastische $p$ -Kühlung
1980	J. Cronin, V. Fitch	CP-Verletzung im $K^0$ -Zerfall
1979	S.Glashow, A.Salam, S.Weinberg	Elektroschwache Wechselwirkung
1976	B. Richter, S. Ting	$J/\Psi$ Entdeckung ( $c$ -Quark)
1969	M. Gell-Mann	Quark-Modell der Hadronen
1965	R. Feynman, J. Schwinger, S. Tomonaga	Quantenelektrodynamik
1963	E.P. Wigner	Symmetrien in der Teilchenphysik
1961	R. Hofstadter	Struktur der Nukleonen
1960	D. A. Glaser	Erfindung der Blasenkammer
1959	E. Segre, O. Chamberlain	Entdeckung des Antiprotons
1958	P. Tscherenkow, I. Frank, I. Tamm	Tscherenkow-Effekt
1957	C.N. Yang, T.-D. Lee	Paritätsverletzung in der schwachen Wechselwirkung
1951	J. Cockroft, E. Walton	Beschleuniger
1950	C. Powell	Photographische Methode zur Entdeckung der Mesonen
1949	H. Yukawa	Kernkraft und Vorhersage der Mesonen (Pionen)
1948	P.S.M. Blackett	Nebelkammer, Teilchen in der kosmischen Strahlung
1936	V.F.Hess, C.D.Anderson	kosmische Strahlung und Entdeckung des Positrons
1935	J. Chadwick	Entdeckung des Neutrons
1933	E. Schrödinger, P. Dirac	Quantenmechanik
1927	A. Compton, C. Wilson	Compton-Effekt, Nebelkammer

## 2 Einleitung

2.1	Bausteine der Materie . . . . .	9
2.2	Elementare Teilchen . . . . .	10
2.3	Experimentelle Methoden . . . . .	12
2.4	Kräfte . . . . .	15
2.5	Hadronen . . . . .	18
2.6	Kerne . . . . .	19

### 2.1 Bausteine der Materie

Die Natur bei kleinen Längenskalen wird geprägt durch

- Elektronen,  $u$ -Quarks und  $d$ -Quarks. Diese Teilchen sind vermutlich elementar und punktförmig, d.h. sie haben keine innere Ausdehnung. Sicher ist, dass ihr Radius sehr klein ist,

$$R \leq 10^{-19} \text{ m}$$

- $u$ - und  $d$ -Quarks bilden gebundene Systeme, unter anderem

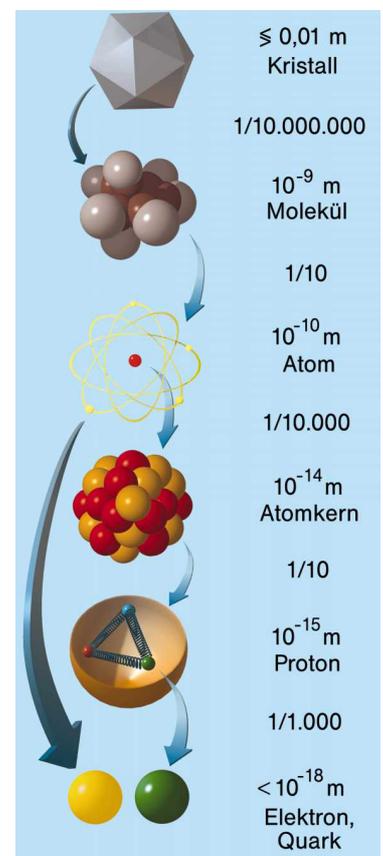
$$\text{Proton } p = uud \quad (2.1)$$

$$\text{Neutron } n = udd \quad (2.2)$$

deren Masse  $\approx 1 \text{ GeV}/c^2$  und Radius  $\approx 1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$  beträgt.

- Protonen und Neutronen bilden die Kerne der Atome. Volumen, Masse und Ladung der Kerne ergeben sich im Wesentlichen aus der Anzahl der beteiligten Protonen und Neutronen. Die Protonen stoßen sich elektrisch ab. Die Bindung der Kerne muss daher durch eine neue Kraft entstehen, der Starken Wechselwirkung.
- Neutrale Atome sind gebundene Systeme aus einem Kern mit einer entsprechenden Anzahl von Elektronen in einer äußeren Hülle. Eigenschaften wie z.B. der Radius der Hülle von typisch  $10^{-10} \text{ m}$  können durch elektromagnetische Wechselwirkung und Quanteneffekte erklärt werden.
- Aus den Eigenschaften der Atome folgen auch die Eigenschaften der Moleküle und Festkörpern sowie der chemischen Bindungen.

Aus diesen Zusammenhängen zwischen den elementaren Quanten ( $e, u, d$ ) und den daraus zusammengesetzten, zunehmend komplexeren Strukturen leitet sich das Ziel der Teilchenphysik ab:



**Abb. 2.1**  
Struktur der Materie vom Quark zum Kristall.

- Ziel der Teilchenphysik ist es, alle Naturgesetze und Teilchen durch wenige fundamentale Prinzipien und Naturgesetze zu erklären.
- Ziel der Kernphysik ist es, aus den Eigenschaften der Protonen und Neutronen die Eigenschaften der Atomkerne abzuleiten, und umgekehrt.

## 2.2 Elementare Teilchen

Experimentell findet man, dass es außer den Elektronen,  $u$ - und  $d$ -Quarks viele weitere Teilchen gibt. Inzwischen weiss man aber, dass die allermeisten dieser Teilchen nicht elementar sind, sondern ähnlich dem Proton aus Quarks aufgebaut sind.

Nach bisherigen Kenntnissen elementar sind tatsächlich nur die folgenden 17 Teilchen (siehe Tabellen 2.1,2.2):

<b>Leptonen</b>	$\nu_e$	$\nu_\mu$	$\nu_\tau$
	$e$	$\mu$	$\tau$
<b>Quarks</b>	$u$	$c$	$t$
	$d$	$s$	$b$

**Die Fermionen:** Sie lassen sich in jeweils drei Generationen von Leptonen und Quarks einteilen.

- Leptonen  $e, \mu, \tau$  : Zusätzlich zum Elektron gibt es mit dem Myon ( $\mu$ ) und dem Tau ( $\tau$ ) zwei weitere geladene Teilchen, die zwar viel schwerer sind, aber ansonsten praktisch die gleichen Eigenschaften haben (elementar, Spin 1/2, el. Ladung  $-e$ , gleiche schwache Wechselwirkung).
- Leptonen  $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$  : Zu jedem geladenen Lepton gibt es ein weiteres neutrales Teilchen (Neutrino). Neutrinos haben eine sehr viel kleinere Masse, aber ansonsten ähnliche Eigenschaften (elementar, Spin 1/2, gleiche schwache Wechselwirkung).
- Quarks  $u, d, c, s, t, b$  : Parallel zu den sechs Leptonen gibt es auch sechs Quarks. Diese tragen elektrische Ladung:

$$u, c, t: +\frac{2}{3}e \tag{2.3}$$

$$d, s, b: -\frac{1}{3}e \tag{2.4}$$

Sie sind ebenfalls elementar und haben Spin 1/2. Zusätzlich tritt jedes Quark in drei verschiedenen Variationen auf, den drei "Farben" (rot, grün und blau). Die Farben entsprechen den "Ladungen" der starken Wechselwirkung. Durch diese drei weiteren Ladungen ziehen sich Quarks gegenseitig an und bilden daher stark gebundene Systeme, die Hadronen.

### Anti-Materie

- Anti-Teilchen: Zu jedem Lepton und Quark gibt es ein Anti-Teilchen. Es hat jeweils genau die gleiche Masse und Spin, aber entgegengesetzte Ladung und bei den Quarks auch entgegengesetzte Farbe (anti-rot, anti-grün, anti-blau).

	Name	Masse (GeV)	Ladung (e)	Farbe
<b>Spin 0</b>				
$H$	Higgs	125,09	0	-
<b>Spin 1/2</b>				
<b>neutrale Leptonen</b>				
$\nu_e$	e-Neutrino	$< 10^{-9}$	0	-
$\nu_\mu$	$\mu$ -Neutrino	$< 10^{-9}$	0	-
$\nu_\tau$	$\tau$ -Neutrino	$< 10^{-9}$	0	-
<b>geladene Leptonen</b>				
$e$	Elektron	0,000511	-1	-
$\mu$	Myon	0,106	-1	-
$\tau$	Tau	1,777	-1	-
<b>up-artige Quarks</b>				
$u$	up-Quark	0,0022	+2/3	ja
$c$	charm-Quark	1,27	+2/3	ja
$t$	top-Quark	173	+2/3	ja
<b>down-artige Quarks</b>				
$d$	down-Quark	0,0047	-1/3	ja
$s$	strange-Quark	0,096	-1/3	ja
$b$	bottom-Quark	4,18	-1/3	ja
<b>Spin 1</b>				
<b>Eich-Bosonen</b>				
$\gamma$	Photon	0	0	-
$W^\pm$	W-Boson	80,385	$\pm 1$	-
$Z^0$	Z-Boson	91,1876	0	-
$g$	Gluon	0	0	ja

**Tabelle 2.1** Tabelle der 17 fundamentalen Quanten des Standard-Modells sortiert nach ihrem Spin. Gelistet ist außerdem die Masse (in GeV), die elektrische Ladung in Einheiten der Elementarladung und ob die Teilchen bezüglich der starken Wechselwirkung Farbe tragen. Nicht gezeigt ist das hypothetische Graviton mit Spin 2, das das Austauschquant der Gravitation sein würde.

linkshändige Doubletts						
Lepton-Generationen			Quark-Generationen			$I_3$
$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}$	$+1/2$ $-1/2$
rechtshändige Singletts						
Lepton-Generationen			Quark-Generationen			$I_3$
$\nu_{eR}, e_R,$	$\nu_{\mu R}, \mu_R,$	$\nu_{\tau R}, \tau_R,$	$u_R, d_R,$	$c_R, s_R,$	$t_R, b_R$	0

**Tabelle 2.2** Tabelle der Spin 1/2 Fermionen des Standard-Modells, sortiert in die jeweils drei Generationen der Leptonen und der Quarks. Der schwache Isospin (dritte Komponente  $I_3$ ) entspricht der Ladung der schwachen Wechselwirkung. Nur linkshändige Teilchen (Index  $L$ ) tragen schwachen Isospin, rechtshändige Teilchen (Index  $R$ ) dagegen nicht.

**Die Eich-Bosonen:** Hierzu gehören das masselose Photon ( $\gamma$ ), das masselose Gluon ( $g$ ) und die schweren  $Z^0$ - und  $W^\pm$  - Bosonen. Sie haben alle Spin-1. Der Name Eichboson stammt aus dem Konzept der Eichtheorien, mit denen die Kräfte (Wechselwirkungen) in der Natur und ihre Existenz vorhergesagt werden können.

**Das Higgs-Boson:** Es hat als einziges Teilchen Spin-0.

Die Bosonen sind unmittelbar mit den Kräften in der Natur verbunden, siehe Kapitel 2.4

## 2.3 Experimentelle Methoden

Die sehr kleinen Längenskalen ( $\leq 1$  fm) lassen sich nach der Unschärferelation der Quantenmechanik nur mit sehr hohen Teilchenimpulsen untersuchen,

$$\Delta P_x \cdot \Delta x \geq \hbar \tag{2.5}$$

Möchte man also z.B. mit einem Elektron ein Streuexperiment ausführen, um die innere Struktur des Protons ( $\Delta x \approx 1$  fm) zu untersuchen, so braucht man mindestens Elektronimpulse der Größenordnung

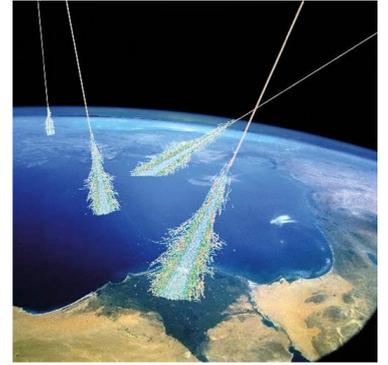
$$\Delta P_x \geq \frac{\hbar}{1 \text{ fm}} \geq 200 \text{ MeV}/c \tag{2.6}$$

Ein Vergleich zur Elektronmasse von  $m_e = 0,511 \text{ MeV}/c^2$  zeigt, dass das Elektron hoch-relativistisch sein muss. Die Analyse von Prozessen in der Teilchenphysik und zumeist auch der Kernphysik müssen daher immer auf Basis relativistischer Kinematik und relativistischer Quantenmechanik durchgeführt werden.

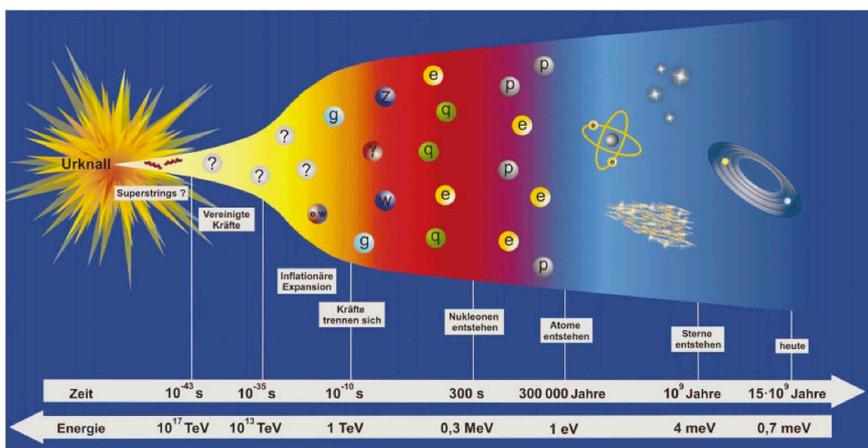
**Astro-Teilchenphysik:** In der Natur lassen sich hochenergetische Teilchen in der kosmischen Strahlung (Höhenstrahlung) beobachten. Diese besteht hauptsächlich aus Protonen und Elektronen, die in Supernova-Explosionen beschleunigt werden und extrem hohe Energien erreichen können. Abb. 2.2 zeigt, dass in Reaktionen dieser Teilchen mit den Teilchen in der Atmosphäre zahlreiche weitere Teilchen neu entstehen und selbst auf der Erde noch nachgewiesen werden können. Bis Ende der 1930er Jahre wurden so auch Teilchen entdeckt, die auf der Erde bis dahin unbekannt waren. Hierzu gehören Anti-Elektronen, Myonen und Pionen. Die Rate hochenergetischer Teilchen ist allerdings sehr gering. Die höchsten beobachteten Energien betragen ca  $10^{20}$  eV. Der Fluss von Muonen aus der kosmischen Strahlung auf der Erde beträgt etwa  $100 \text{ s}^{-1} \text{ m}^{-2}$ .

Kernreaktionen sind dagegen für das Brennen der Sonne verantwortlich. So entsteht bei der Umwandlung von Protonen und Elektronen in Neutronen und Neutrinos ein Neutrinofluss von  $10^{13} \text{ s}^{-1} \text{ m}^{-2}$ . Ein noch viel größerer Neutrinofluss entsteht, wenn ein Stern in einer Supernova explodiert. Trotz der großen Entfernung konnten solche Neutrinos experimentell nachgewiesen werden.

**Kosmologie** Sehr bedeutsam für die Teilchenphysik ist die Überlegung, dass unmittelbar nach dem Urknall sehr hohe Temperaturen (Energien) und Dichten vorgelegen haben müssen. Zu dieser Zeit muss es also ein thermodynamisches Gleichgewicht zwischen allen Teilchensorten gegeben haben, deren Massen kleiner als die typischen Energien der jeweiligen Teilchen sind. Die Quantenphysik der Teilchen ist damit auch verantwortlich dafür, wie sich aus diesem Zustand das jetzige Universum mit Galaxien, Sternen und chemischen Elementen gebildet hat. Viele dieser Phänomene sind inzwischen erklärbar. Nicht verstanden sind aber z.B. die Tatsache, dass es viel mehr Materie als Antimaterie gibt, dass sich überhaupt Galaxien bilden konnten ("Dunkle Materie") oder dass das Universum sich beschleunigt ausdehnt ("Dunkle Energie").



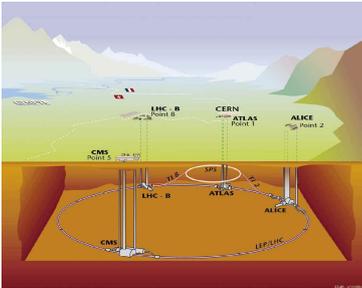
**Abb. 2.2** Darstellung von hochenergetischen Teilchen, die aus dem Kosmos auf die Atmosphäre treffen und dort zahlreiche neue Teilchen erzeugen.



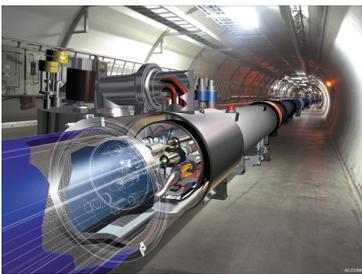
**Abb. 2.3** Entwicklung des Universums.

**Teilchenphysik an Beschleunigern** Künstlich lassen sich höchste Energien erzielen, wenn man Elektronen, Protonen oder deren Anti-Teilchen in großen Teilchenbeschleunigern wie dem “Large Hadron Collider” (LHC) beschleunigt (Abb. 2.4 und 2.5). Die höchste erreichte Energie bisher ist 6500 GeV. Abb. 2.6 zeigt eine Proton-Proton-Reaktion am LHC mit vielen neu erzeugten Teilchen. Der Vorteil dieser Experimente liegt darin, bei genau bekanntem Anfangszustand nahezu alle Quanten im Endzustand einzeln beobachten zu können. Auf diese Weise wurden die entscheidenden Entdeckungen auf dem Weg zum Standardmodell gemacht,

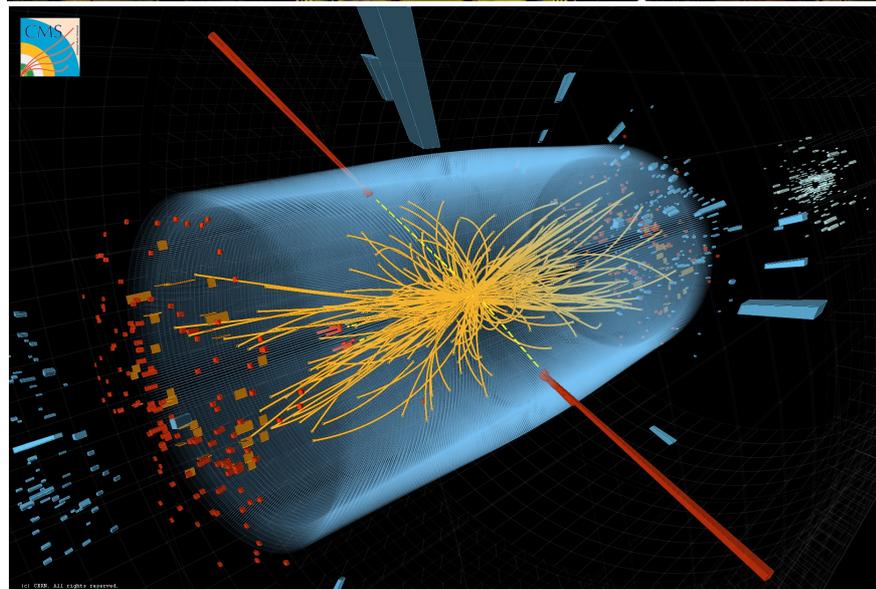
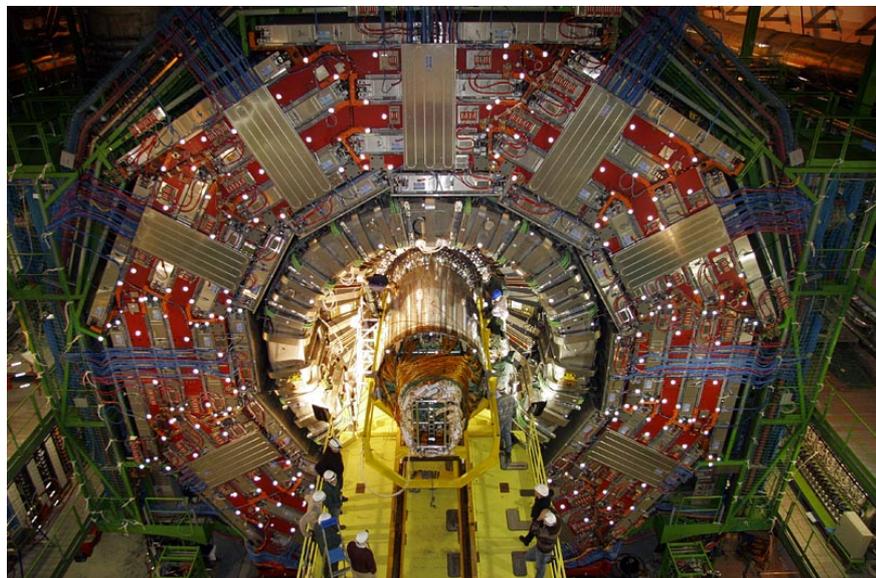
- die Quark-Struktur der Protonen und Neutronen
- aller Fermionen der 2. und 3. Generation
- die Eichbosonen und
- zuletzt 2012 das Higgs-Teilchen.



**Abb. 2.4**  
Schematische Darstellung des LHC Beschleunigers am CERN.



**Abb. 2.5**  
Schematische Darstellung der Magnete im LHC.



**Abb. 2.6** Foto des CMS Experiments am LHC und Bild eines Kandidaten für den Zerfall eines Higgs-Bosons.

## 2.4 Kräfte

Das wichtigste quantitative Konzept zur Beschreibung von Teilchenreaktionen ist natürlich die Quantenmechanik, allerdings nicht in Form der Schrödinger-Gleichung, denn diese ist nicht-relativistisch und bietet außerdem auch keine Möglichkeit, die Entstehung von neuen Teilchen zu beschreiben. Generell muss daher in Berechnungen anstelle der nicht-relativistischen Schrödinger-Gleichung eine relativistische Formulierung der Quantenmechanik verwendet werden. Aus Einsteins berühmter Äquivalenz von Energie und Masse

$$E = m c^2$$

folgt direkt zumindest prinzipiell die Möglichkeit, aus der kinetischen Energie von Teilchen im Anfangszustand die Masse neuer Teilchen zu erzeugen. In Abb. 2.6 wurde die Energie im Anfangszustand tatsächlich nur zu wenigen Prozent in Masse umgewandelt, der Rest findet sich in der kinetischen Energie der entstandenen Teilchen.

Historisch hat sich aus der Verbindung von Quantenmechanik und spezieller Relativitätstheorie die Quantenfeldtheorie entwickelt. In dieser spielen Symmetrien eine besondere Rolle und führen zu Erhaltungssätzen für Ladungen und zu Wechselwirkungen zwischen Teilchen. Mit diesem Konzept der sogenannten "Eichtheorien" ist es gelungen, drei der vier Kräfte in der Natur zu formulieren:

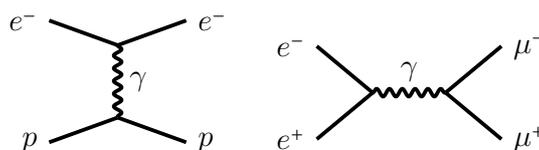
- **Die elektromagnetische Wechselwirkung** betrifft außer den Neutrinos alle Leptonen und Quarks in genau der gleichen Weise. Allerdings ist die Ladung der Quarks geringer. Die Wechselwirkung wird durch den Austausch von Photonen vermittelt. Zusätzlich zu elastischen Prozessen wie

$$e^- p \rightarrow e^- p$$

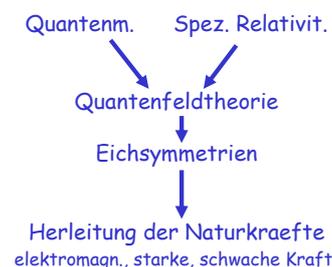
werden aber auch Prozesse wie Paarvernichtungs- und Erzeugungsprozesse

$$e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$$

beschrieben, die in der Natur tatsächlich beobachtet werden.



**Abb. 2.8** Feynman-Diagramme: Elastische Elektron-Proton-Streuung (links) und Paarvernichtung/Paarerzeugung (rechts) durch Austausch von Photonen. Die Zeit läuft hier von links (Anfangszustand) nach rechts (Endzustand).



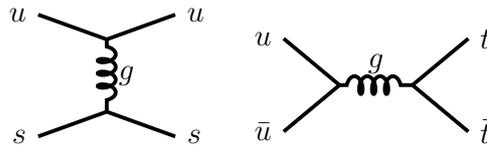
**Abb. 2.7** Schema der theoretischen Konzepte in der Teilchenphysik.

### Photon

**Gluon**

- **Die starke Wechselwirkung** zwischen den Quarks erfolgt nach fast den gleichen Regeln wie beim Elektromagnetismus. Die Wechselwirkung wird durch den Austausch von Gluonen vermittelt. Es gibt Prozesse wie

$$u s \rightarrow u s \qquad u \bar{u} \rightarrow t \bar{t}$$



**Abb. 2.9** Streuung und Paarvernichtung/Paarerzeugung durch Gluon-Austausch.

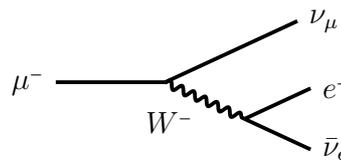
Da die Gluonen ebenfalls Farbe tragen, gibt es auch Reaktionen wie

$$g g \rightarrow u \bar{u} \qquad g g \rightarrow g g$$

**$W^\pm, Z^0$**

- **Die schwache Wechselwirkung** erlaubt als einzige die Umwandlung von Teilchensorten in andere Teilchensorten. Sie wird durch den Austausch von  $W^\pm$  und  $Z^0$  vermittelt.

$$\mu^- \rightarrow \nu_\mu e^- \bar{\nu}_e$$



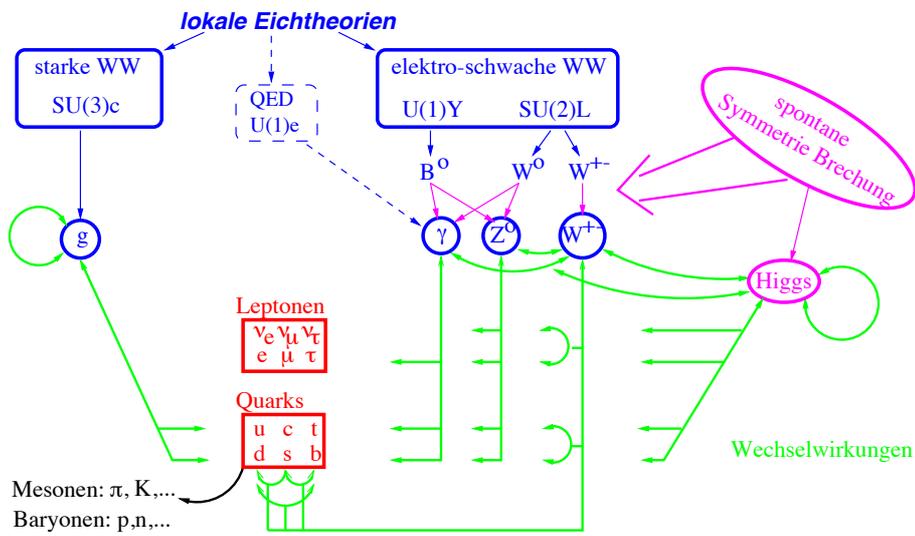
**Abb. 2.10** Zerfall eines Myons in ein Myon-Neutrino sowie - durch  $W$ -Austausch - in ein Elektron und ein Anti-Elektronneutrino.

**Higgs**

- **Yukawa-Wechselwirkungen** gibt es zwischen dem Higgs-Teilchen und allen Fermionen. Aus diesen Yukawa-Kopplungen lassen sich die Massen der Fermionen ausrechnen. Das Higgs-Teilchen reagiert auch mit  $W^\pm$ - und  $Z^0$ -Bosonen, allerdings sind dies Eichwechselwirkungen. Auch aus diesen folgt die Masse von  $W^\pm$  und  $Z^0$ .

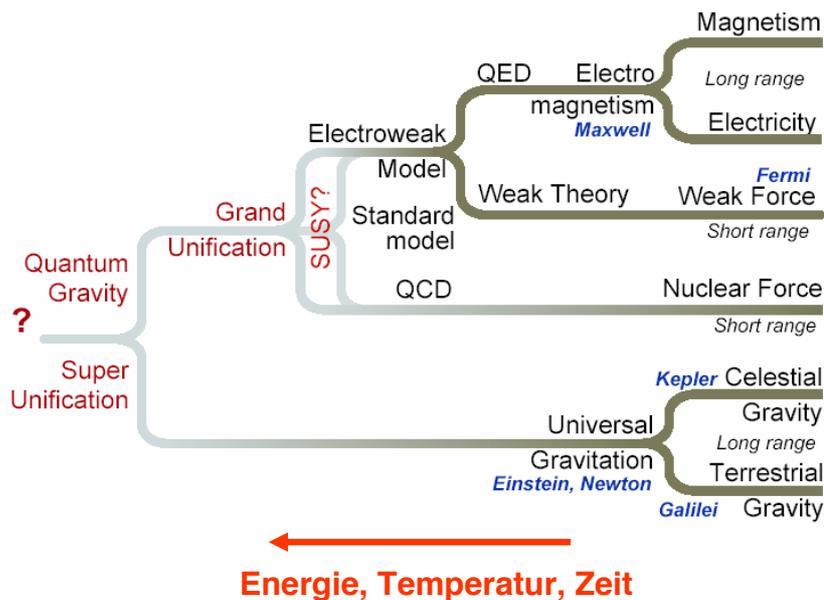
Die folgende Abbildung 10.16 beschreibt alle Teilchen und Wechselwirkungen im Standard-Modell.

### Das Standard Modell



**Abb. 2.11** Schema des Standard-Modells mit allen Teilchen. Grüne Pfeile stellen Wechselwirkungen dar.

Sicher ist das Standard-Modell keine *Theory of Everything* (TOE) sondern nur unser derzeitiges Bild der Naturgesetze (Tabelle 16.1). Abb. 2.12 zeigt bereits erreichte, aber auch weitere, zumindest konzeptionell angedachte Schritte einer Vereinigung der Naturgesetze. Ein Ziel dieser Schritte ist sicher auch ein Verständnis der frühen Phasen und Phasenübergänge im frühen Universum (Abb. 2.3).



**Abb. 2.12** Schema der Vereinheitlichungen der Wechselwirkungen.

<b>Mesonen: <math>q + \bar{q}'</math></b>				
	mit $\bar{u}, \bar{d}$	mit $\bar{s}$	mit $\bar{c}$	mit $\bar{b}$
<i>u, d</i> :	<b>Pionen</b> $u\bar{d} : \pi^+(0,1396)$ $u\bar{u}, d\bar{d} : \pi^0(0,1350)$			
<i>s</i> :	<b>Kaonen</b> $s\bar{u} : K^-(0,494)$ $s\bar{d} : \bar{K}^0(0,498)$			
<i>c</i> :	<b>D-Mesonen</b> $c\bar{d} : D^+(1,869)$ $c\bar{u} : D^0(1,865)$	$c\bar{s} : D_s^+(1,97)$	$c\bar{c} : J/\Psi(3,09)$	
<i>b</i> :	<b>B-Mesonen</b> $b\bar{u} : B^-(5,279)$ $b\bar{d} : \bar{B}^0(5,279)$	$b\bar{s} : \bar{B}_s^0(5,47)$	$b\bar{c} : B_c^-(6,40)$	$b\bar{b} : \Upsilon(9,46)$
hb				
<b>Baryonen: <math>q + q' + q''</math></b>				
	mit $u, d$	mit $s$	mit $c$	mit $b$
	<b>leichte Quarks</b> $uud : p(0,9383)$ $udd : n(0,9396)$ $uuu : \Delta^{++}(1,23)$ $ddd : \Delta^-(1,23)$			
	<b>schwere Quarks</b>	$uds : \Lambda^0(1,12)$ $uss : \Xi^0(1,32)$ $sss : \Omega^-(1,67)$	$udc : \Lambda_c^+(2,29)$ $usc : \Xi_c^+(2,47)$	$udb : \Lambda_b^0(5,62)$

**Tabelle 2.3** Tabelle mit einigen Beispielen der leichtesten Hadronen (Mesonen und Baryonen). Gelistet ist der Quark-Inhalt, das verwendete Symbol sowie (in Klammern in GeV) die Masse des Hadrons.

## 2.5 Hadronen

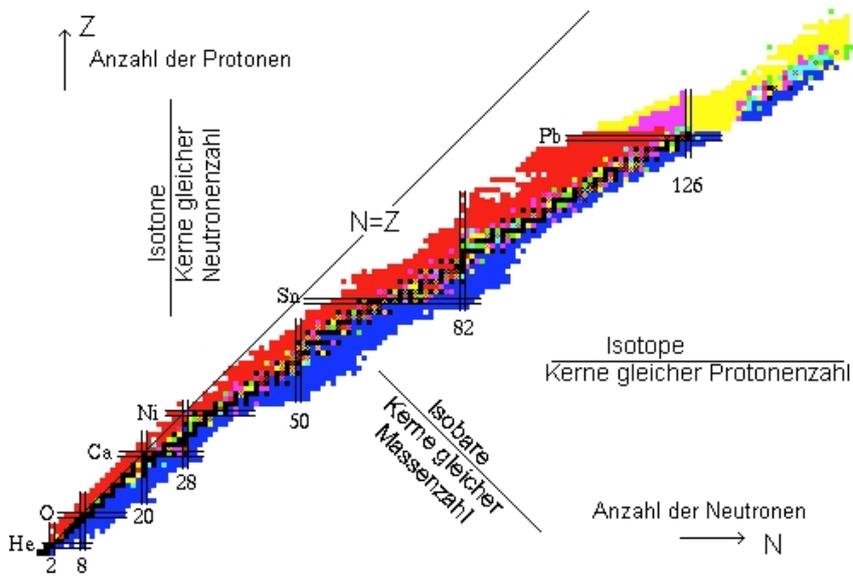
Quarks bilden aufgrund der starken Wechselwirkung gebundene Systeme, die insgesamt Hadronen genannt werden. Weit über hundert derartige Teilchen sind bekannt.

### Mesonen und Baryonen sind Hadronen

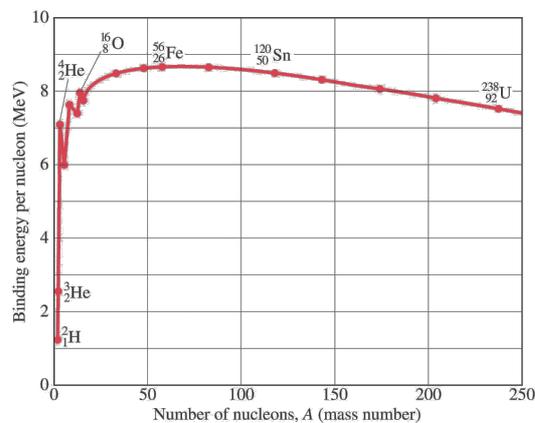
- **Mesonen** aus jeweils einem Quark und einem Anti-Quark. Sie haben Spin 0, 1, 2, ... (Summe der Spins und der Bahndrehimpulse). Die Masse der Mesonen ergibt sich aus der Masse der Quarks, und ihrer Bindungsenergie. Die leichtesten Mesonen sind die Pionen. Top-Quarks bilden keine Mesonen, da sie zu schnell zerfallen.
- **Baryonen** aus jeweils drei Quarks. Sie haben Spin 1/2, 3/2, ... Die leichtesten Baryonen sind Proton und Neutron. Anti-Baryonen bestehen aus drei Anti-Quarks.
- Ob es weitere gebundene Systeme gibt, z.B. aus mehr als 3 Quarks oder nur aus Gluonen, ist nicht abschliessend geklärt.

## 2.6 Kerne

Kerne bestehen aus Protonen und Neutronen. Trotz der elektromagnetischen Abstoßung der Protonen untereinander sind Kerne mit über 100 Protonen möglich, solange die Anziehung zwischen Protonen und Neutronen überwiegt. Diese anziehende Kernkraft ist ein Resultat der starken Wechselwirkung zwischen den Quarks und Gluonen eng benachbarter Protonen/Neutronen. Stabile Kerne sind energetisch günstig, bei höherer Protonenzahl oder Neutronenzahl treten spontane Zerfälle auf, bis wieder ein stabiler Kern vorliegt. Die Kernbindungsenergie ist maximal für Eisen und beträgt etwa 8 MeV pro Nukleon.



**Abb. 2.13** Nuklid-Karte: Darstellung der Atomkerne mit verschiedenen Anzahlen von Protonen (y-Achse) und Neutronen (x-Achse). Schwarz dargestellt sind stabile Kerne. Instabile Kerne sind farbig dargestellt.



**Abb. 2.14** Bindungsenergie pro Nukleon als Funktion der Anzahl der Nukleonen in einem Kern.

### 3 Natürliche Einheiten

In der klassischen Physik sind Prozesse langsam und makroskopisch, so dass die SI-Einheiten

$$\text{kg, m, s}$$

praktisch sind. Sie sind allerdings historisch willkürlich gewählt worden und erfordern daher in den Naturgesetzen zusätzliche Konstanten, deren Zahlenwerte daher ebenfalls willkürlich sind:

$$\hbar_{SI} = 6,58211889 \cdot 10^{-22} \text{ MeV s} \quad (3.1)$$

$$c_{SI} = 299792458 \text{ m/s} \quad (3.2)$$

$$\epsilon_{0SI} = 8,854187817 \cdot 10^{-34} \text{ Cb}^2/(\text{Jm}) \quad (3.3)$$

$$k_{BSI} = 1,38064852 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \quad (3.4)$$

$$G_{NSI} = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2} \quad (3.5)$$

$$(\hbar c)_{SI} = 197,3269602 \text{ MeV fm} \quad (3.6)$$

Die SI-Einheiten sind für relativistische und quantenmechanische Prozesse in der Teilchenphysik und Kernphysik aber keine günstige Wahl. Max Planck erkannte als erster, dass sich alle anderen Einheiten auf eine einzige Einheit zurückführen lassen, wenn man Relativitätstheorie und Quantentheorie als gegeben annimmt. Dieses “natürliche Einheitensystem” (oder “Planck’sche Einheitensystem”) ist heute Standard in vielen Bereichen.

Insbesondere kann alle diese Konstanten vermeiden, indem man nur eine einzige Einheit verwendet und alle Zahlenwerte zu 1 setzt.

$$\boxed{\hbar = 1 \quad c = 1 \quad \epsilon_0 = 1 \quad k_B = 1 \quad G_N = 1} \quad (3.7)$$

- Energie: Die Basiseinheit sei 1 eV (oder MeV, GeV) als Einheit der Energie.
- Masse und Impuls: Mit  $c = 1$  folgt aus der relativistischen Beziehung

$$E^2 = m^2 c^4 + \vec{P}^2 c^2$$

dass Energien, Massen und Impulse alle die Dimension der Energie haben.

$$\boxed{[\text{Energie}] = [\text{Impuls}] = [\text{Masse}] = \text{GeV}} \quad (3.8)$$

- Zeit: Mit  $\hbar = 1$  lautet z.B. die Unschärferelation

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq 1$$

Zeiten haben also offenbar die Dimension  $[\text{Zeit}] = \text{GeV}^{-1}$ .

- Länge: Mit  $c = 1$  haben Zeit und Länge die gleiche Dimension, also

$$\boxed{[\text{Zeit}] = [\text{Länge}] = \text{GeV}^{-1}} \quad (3.9)$$

- Geschwindigkeiten  $\beta$  sind dimensionslos.
- Drehimpuls und Spin: Mit  $\hbar = 1$  sind Drehimpulse in der Quantenmechanik nur noch Zahlen,  $S = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$

Dies macht viele Formeln viel übersichtlicher. Für die Berechnung experimenteller Ergebnisse muss von diesem natürlichen Einheitensystem in SI Einheiten (m, kg, s) umgerechnet werden. Dies ist immer möglich durch einfache Dimensionsbetrachtungen. Praktische Zahlenwerte der Umrechnungsfaktoren hierfür sind

$$\boxed{c_{SI} \approx 30 \frac{\text{cm}}{\text{ns}} \quad (\hbar c)_{SI} \approx 200 \text{ MeV fm}} \quad (3.10)$$

Beispiel Länge  $x = 1 \text{ MeV}^{-1}$ :

$$\rightarrow x_{SI} = x \cdot \frac{(\hbar c)_{SI}}{\hbar c} = 1 \text{ MeV}^{-1} \frac{200 \text{ MeV fm}}{1} = 200 \text{ fm}$$

Beispiel Zeit  $t = 1 \text{ MeV}^{-1}$ :

$$\rightarrow t_{SI} = t \cdot \hbar = 6,6 \cdot 10^{-22} \text{ s}$$

Die Feinstrukturkonstante ist dimensionslos und damit in SI- und natürlichen Einheiten gleich. Aus der Messung der Feinstrukturkonstante in der Atomphysik

$$\alpha_{em} = \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137,036}$$

folgt in natürlichen Einheiten ( $\epsilon_0 = 1, \hbar c = 1$ ) für die Elementarladung

$$\boxed{\alpha_{em} = \frac{e^2}{4\pi}, \quad e \approx 0,303} \quad (3.11)$$

Die Elementarladung ist also in natürlichen Einheiten dimensionslos und von der Größenordnung 1.

# 4 Relativistische Kinematik

---

4.1	4-er Vektoren . . . . .	22
4.2	Skalarprodukt und Lorentztransformation . . . . .	23
4.3	4-er Impulse . . . . .	24
4.4	Schwerpunktsenergie . . . . .	26
4.5	Zwei-Körper-Zerfall . . . . .	28

---

## 4.1 4-er Vektoren

Aus der experimentellen Beobachtung, dass die Lichtgeschwindigkeit in verschiedenen Inertialsystemen gleich ist, und der theoretischen Beobachtung, dass die Maxwellgleichungen ihre Form unter Lorentztransformationen nicht ändern, hat Einstein die spezielle Relativitätstheorie entwickelt. Sie basiert auf der Forderung, dass alle Inertialsysteme  $S$  gleichberechtigt sind:

- Die Naturgesetze (Maxwell-Gl., ...) haben in allen Inertialsystemen die gleiche Form.
- Die Naturkonstanten ( $c, \hbar, \dots$ ) haben in allen Inertialsystemen die gleichen Zahlenwerte.

Hieraus allein folgen Zeitdilatation und Längenkontraktion sowie die Formeln für die Lorentz-Transformationen. Da Ort- und Zeit-Koordinaten gleichermaßen transformiert werden müssen, ist die einfachste Notation die der Vierervektoren im Minkowski-Raum:

$$x = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

Die Zeit wird hier mit der Lichtgeschwindigkeit  $c$  multipliziert, damit alle Komponenten des Vierervektors die Dimension einer Länge haben. In natürlichen Einheiten wird  $c = 1$  gesetzt, also:

$$x = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

Notation:

4-er Vektor:  $x$

3-er Vektor:  $\vec{x}$

Betrag des 3-er Vektors:  $|\vec{x}|$ .

Die "0-te" Komponente<sup>1</sup> des 4-er Vektors ist die Zeit,  $x_0 = t$ .

Neben den Ort-Zeit Vierervektoren werden später auch weitere 4-er Vektoren definiert, z.B. der Energie-Impuls 4-er Vektor oder das elektromagnetische 4-er Potential  $A = (\varphi, \vec{A})$ .

---

<sup>1</sup>In älteren Büchern werden auch andere Konventionen verwendet.

## 4.2 Skalarprodukt und Lorentztransformation

Lorentztransformationen erlauben die Umrechnung von beliebigen 4-er Vektoren zwischen verschiedenen Inertialsystemen. Aus Sicht eines Systems  $S'$ , das sich mit Geschwindigkeit  $\beta_s = v_s/c < 1$  und

$$\gamma_s = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_s^2}}$$

in x-Richtung bewegt, gilt (wenn der Ursprung von  $S$  und  $S'$  zur Zeit  $t = 0$ ,  $t' = 0$  übereinander liegt):

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma_s & -\gamma_s\beta_s & 0 & 0 \\ -\gamma_s\beta_s & \gamma_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\Lambda} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_s t - \gamma_s\beta_s x \\ \gamma_s x - \gamma_s\beta_s t \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

also

$$x' = \Lambda x$$

mit der  $4 \times 4$  Matrix  $\Lambda$ .

Das Skalarprodukt zweier 4-er Vektoren

$$a = (t_a, x_a, y_a, z_a), \quad b = (t_b, x_b, y_b, z_b)$$

ist definiert als<sup>2</sup>

$$a b = t_a t_b - x_a x_b - y_a y_b - z_a z_b \quad (4.5)$$

oder

$$\boxed{a b = t_a t_b - \vec{a} \vec{b}} \quad (4.6)$$

<sup>2</sup> Wir verwenden auch im Folgenden immer die weit verbreitete (+---) Vorzeichenkonvention für die Definition des Skalarprodukts. In älteren Büchern wird manchmal auch (-+++ ) benutzt. Praktisch ist auch die Schreibweise mit dem "Metrischen Tensor"  $g$

$$a b = a^T g b = (t_a, x_a, y_a, z_a) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_g \begin{pmatrix} t_b \\ x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Eine weitere Alternative ist die Verwendung von kovarianten

$$a^\mu = (t_a, x_a, y_a, z_a)$$

und kontravarianten

$$a_\mu = (t_a, -x_a, -y_a, -z_a)$$

4-er Vektoren, so dass mit der Einstein'schen Summenkonvention das Skalarprodukt einfach gleich  $ab = a^\mu b_\mu$  ist.

### Lorentz-invariantes Skalarprodukt

**Aufgabe 4.1:** Zeigen Sie, dass Skalarprodukte von Vierervektoren Lorentz-invariant sind,

$$\boxed{a' b' = a b} \tag{4.7}$$

Die Norm eines Vierervektors ist sein eigenes Skalarprodukt,

$$a a = a^2 = t_a^2 - \vec{a}^2$$

Für einen Lichtstrahl, der bei  $t = 0$  in  $x$ -Richtung durch den Ursprung läuft,  $x(t = 0) = 0$ , gilt  $x = ct$ . Die Norm des entsprechenden 4-er Vektors  $x = (ct, x, 0, 0)$  ist also

$$(ct)^2 - x^2 = 0 \tag{4.8}$$

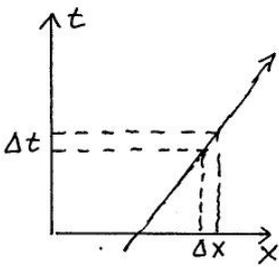
Wegen der Lorentz-Invarianz des Skalarprodukts ist dies offenbar für alle Inertialsysteme gültig, wenn  $c$  in allen diesen Systemen gleich ist.

Allgemeiner kann das Quadrat eines 4-er Vektors positiv, null oder negativ sein. Man unterscheidet daher

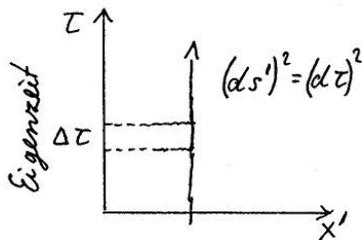
$$\text{Zeit-artige 4-er Vektoren } a^2 > 0 \tag{4.9}$$

$$\text{Licht-artige 4-er Vektoren } a^2 = 0 \tag{4.10}$$

$$\text{Raum-artige 4-er Vektoren } a^2 < 0 \tag{4.11}$$



**Abb. 4.1**  
Linienelement eines Teilchens mit  $\beta \neq 0$ .



**Abb. 4.2**  
Linienelement eines Teilchens in seinem eigenen Ruhesystem.

## 4.3 4-er Impulse

Ähnlich wie im normalen 3-dim Raum sollte es auch in der 4-dim Raum-Zeit einen 4-er Impuls geben. Zur Ableitung betrachten wir ein Teilchen mit Koordinaten  $(t, \vec{x})$ , Geschwindigkeit  $\beta$  und Lorentzfaktor  $\gamma$ ,

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{x}}{dt} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{\beta}^2}}$$

Ein kleines Linienelement ist dann

$$(ds)^2 = (dt)^2 - (d\vec{x})^2 = (dt)^2 (1 - \vec{\beta}^2) = (dt)^2 / \gamma^2$$

In seinem eigenen Ruhesystem sind die Koordinaten  $(\tau, \vec{x}')$  mit der Eigenzeit  $\tau$  und Position  $\vec{x}' = \text{const}$ . In diesem System ist das Linienelement

$$(ds')^2 = (d\tau)^2$$

Aus der Lorentz-Invarianz des Linienelements,

$$(ds')^2 = (ds)^2$$

folgt die Zeitdilatation,

$$(d\tau)^2 = (dt)^2 / \gamma^2 \tag{4.12}$$

Der 4-er Impuls wird definiert als

$$p = \begin{pmatrix} E \\ \vec{P} \end{pmatrix} = m \frac{dx}{d\tau} \quad (4.13)$$

Die 0-te Komponente,  $p_0 = E$ , (die Zeit-artige Komponente) wird Energie genannt. Die Masse<sup>3</sup>  $m$  und Eigenzeit sind unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems. Damit ist

$$p = m \frac{dx}{d\tau} = m \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \gamma \\ \frac{d\vec{x}}{dt} \frac{dt}{d\tau} \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \gamma \\ \vec{\beta} \gamma \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Damit folgt:

$$E = \gamma m \quad \vec{P} = \gamma \vec{\beta} m \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{P}}{E} \quad (4.15)$$

Die Norm des 4-er Impulsvektors

$$p^2 = E^2 - \vec{P}^2 = \gamma^2 (1 - \beta^2) m^2 = m^2 \quad (4.16)$$

ist die Masse<sup>2</sup> und damit tatsächlich Lorentz-invariant. Damit ist die relativistische Beziehung zwischen Energie, Impuls und Masse (Dispersionsbeziehung)<sup>4</sup>:

$$p^2 = E^2 - \vec{P}^2 = m^2 \quad (4.17)$$

Die kinetische Energie ist definiert als

$$E_{kin} = E - m = (\gamma - 1) m \quad (4.18)$$

Im Ruhesystem eines Teilchen ist  $\vec{P} = 0$ , so dass  $E = m$ . Damit lassen sich folgende kinematischen Grenzfälle für Teilchenimpulse unterscheiden:

---

ruhend:	$\beta = 0$	$\gamma = 1$	$\vec{P} = 0$	$E = m$
langsam:	$\beta \ll 1$	$\gamma \gtrsim 1$	$ \vec{P}  \ll m$	$E = m + \frac{1}{2}m\beta^2 + \dots \beta^4 + \dots$
ultrarelativ.:	$\beta \lesssim 1$	$\gamma \gg 1$	$ \vec{P}  \gg m$	$E \approx  \vec{P} $
Masse-los:	$\beta = 1$	$\gamma = \infty$	$ \vec{P}  = E$	

---

**Aufgabe 4.2:** Berechnen Sie für ein langsames Teilchen ( $\beta \ll 1$ ) die ersten Terme der Taylor-Entwicklung für  $E = \gamma m$  bis zur Potenz  $\beta^4$ .

<sup>3</sup>Mit Masse ist immer die Ruhemasse gemeint.

<sup>4</sup>Setzt man  $c$  explizit ein, so entspricht dies  $E^2 - \vec{p}^2 c^2 = m^2 c^4$ .

## 4.4 Schwerpunktsenergie

Die Lorentz-Transformation eines 4-er Impulses erfolgt wie bei anderen 4-er Vektoren auch (wie in Gl. 4.3 auch hier in  $x$ -Richtung):

$$p' = \Lambda p$$

$$\begin{pmatrix} E' \\ P'_x \\ P'_y \\ P'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_s & -\gamma_s \beta_s & & \\ -\gamma_s \beta_s & \gamma_s & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_s E - \gamma_s \beta_s P_x \\ \gamma_s P_x - \gamma_s \beta_s E \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 4.3:** In einem Inertialsystem  $S$  habe ein Teilchen die Geschwindigkeit  $\vec{\beta} = (0, 0, \beta)$ . Wie lautet die Lorentztransformation in das Ruhesystem  $S^*$  des Teilchens?

**Aufgabe 4.4:** Zeigen Sie, dass aus  $\vec{\beta} = \vec{P} / E$  und  $\beta'_x = P'_x / E'$  das Additionstheorem für Geschwindigkeiten folgt:

$$\beta'_x = \frac{\beta_x - \beta_s}{1 - \beta_x \beta_s}$$

## 4.4 Schwerpunktsenergie

Gegeben sei ein System aus mehreren Teilchen  $i$  mit Massen  $m_i$  und 4-er Impulsen  $p_i = (E_i, \vec{P}_i)$ . Der gesamte 4-er Impuls ist dann

$$p = \begin{pmatrix} E \\ \vec{P} \end{pmatrix} = p_1 + p_2 + \dots \quad (4.19)$$

Im Schwerpunktsystem der Teilchen gilt  $\vec{P}^* = \sum_i \vec{P}_i^* = 0$ , so dass

$$(p^*)^2 = (E^*)^2 - (\vec{P}^*)^2 = (E_1^* + E_2^* + \dots)^2 \quad (4.20)$$

Die so definierte Schwerpunktsenergie des Teilchen-Systems

$$E_{CMS} = \sqrt{(p^*)^2} = E_1^* + E_2^* + \dots \quad (4.21)$$

wird auch die "invariante Masse" des Teilchen-Systems genannt, denn sie ist das Quadrat eines 4-er Vektors und damit Lorentz-invariant. Verwendet wird oft auch die Abkürzung

$$\boxed{\sqrt{s} = E_{CMS} = \sqrt{p^2}} \quad (4.22)$$

Wegen der Lorentz-invarianz von  $p^2$  lässt sich die Schwerpunktsenergie in einem beliebigen Inertialsystem berechnen, ohne explizit

### Invariante Masse

eine Lorentz-Transformation ausführen zu müssen. Für zwei Teilchen ist

$$s = (p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2 p_1 p_2 \quad (4.23)$$

Damit folgt

$$s = (p_1 + p_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2(E_1 E_2 - \vec{P}_1 \vec{P}_2) \quad (4.24)$$

oder auch

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\vec{P}_1 + \vec{P}_2)^2 \quad (4.25)$$

### Beispiel: "Fixed-Target" Streuung an einem ruhenden Teilchen

$$p_1 = \begin{pmatrix} E_1 \\ \vec{P}_1 \end{pmatrix} \quad p_2 = \begin{pmatrix} m_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$s = E_{CMS}^2 = (p_1 + p_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2 E_1 m_2$$

Die Schwerpunktsenergie steigt hier also nur langsam mit der Teilchenenergie,

$$E_{CMS} \sim \sqrt{E_1} \quad (4.26)$$

### Beispiel: Kollision von zwei Teilchen mit gleichem Impuls

$$p_1 = \begin{pmatrix} E_1 \\ \vec{P}_1 \end{pmatrix} \quad p_2 = \begin{pmatrix} E_2 \\ \vec{P}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 \\ -\vec{P}_1 \end{pmatrix}$$

Im CMS-System gilt  $\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = 0$ , so dass sich eine lineare Abhängigkeit mit der Energie ergibt,

$$E_{CMS} = E_1 + E_2 \quad (4.27)$$

Hochenergie-Experimente werden daher bevorzugt an Kollidern mit entgegengesetzt laufenden Teilchen durchgeführt, so dass das Schwerpunktsystem das Laborsystem ist.

### Beispiel: Ultra-relativistische Kollision

$$E_1 \approx |\vec{P}_1| \quad E_2 \approx |\vec{P}_2| \quad \vec{P}_1 \vec{P}_2 = -|\vec{P}_1| |\vec{P}_2|$$

und damit

$$E_{CMS} \approx \sqrt{4 E_1 E_2} \quad (4.28)$$

Beim HERA Elektron-Proton-Kollider mit  $E_e = 27,5 \text{ GeV}$  und  $E_p = 920 \text{ GeV}$  ergibt sich  $E_{CMS} = 318 \text{ GeV}$ .

## 4.5 Zwei-Körper-Zerfall

Für den Zerfall  $a \rightarrow bc$  gilt Energie und Impuls-Erhaltung,

$$p_a = p_b + p_c \quad \begin{pmatrix} E_a \\ \vec{P}_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_b + E_c \\ \vec{P}_b + \vec{P}_c \end{pmatrix}$$

Die Masse von Teilchen  $a$  ist daher die Schwerpunktsenergie der Teilchen  $b + c$ ,

$$\boxed{m_a^2 = p_a^2 = (p_b + p_c)^2 = (E_b + E_c)^2 - (\vec{P}_b + \vec{P}_c)^2} \quad (4.29)$$

Für die Messung von  $m_a$  benötigt man also Energien und Impulse der Zerfallsprodukte. Bei bekannten Massen  $m_b, m_c$  reichen auch entweder die Impulse oder die Energien.

Im Schwerpunktsystem von Teilchen  $a$  lässt sich die Energie der Zerfallsprodukte (hier  $E_b^*$ ) berechnen aus

$$m_c^2 = (p_c^*)^2 = (p_a^* - p_b^*)^2 \quad (4.30)$$

$$= m_a^2 + m_b^2 - 2(E_a^* E_b^* - \vec{P}_a^* \vec{P}_b^*) \quad (4.31)$$

$$= m_a^2 + m_b^2 - 2(m_a E_b^*) \quad (4.32)$$

wobei in diesem System  $E_a^* = m_a$  und  $\vec{P}_a^* = 0$  benutzt wurde. Es folgt

$$\boxed{E_b^* = \frac{m_a^2 + m_b^2 - m_c^2}{2m_a}} \quad (4.33)$$

---

**Aufgabe 4.5:** Zeigen Sie, dass mit dieser Formel 4.33 auch  $E_b^* + E_c^* = \sqrt{s}$  gilt.

---

Für Zerfallsprodukte ohne Masse oder für  $m_a \gg m_b, m_c$  folgt

$$E_b^* = E_c^* = \frac{m_a}{2} \quad (4.34)$$

# 5 Wirkungsquerschnitt

---

5.1	Streuprozesse . . . . .	29
5.2	Rutherford-Streuung klassisch . . . . .	32
5.3	Rutherford-Streuung . . . . .	35

---

## 5.1 Streuprozesse

Die Streuung von Teilchen aneinander ist die wichtigste Messmethode der Teilchenphysik. Man unterscheidet:

- elastische Streuung  $a + b \rightarrow a' + b'$ .  
Im Anfangszustand und Endzustand liegen die gleichen Teilchen vor. Da die Massen sich nicht ändern, bleibt die kinetische Energie erhalten.
- inelastische Streuung  $a + b \rightarrow c + d + \dots$ .  
Es entstehen andere Teilchen oder angeregte Zustände mit höheren Massen.

Von “fixed target” Experimenten spricht man, wenn Teilchen  $a$  in einem Teilchenstrahl vorliegt und Teilchen  $b$  ruht, das “target” also ein Gas, eine Flüssigkeit oder ein ruhender Festkörper ist. Bei einem “Collider” hingegen haben  $a$  und  $b$  vergleichbar hohe Energien.

Im Folgenden wird immer die Annahme der Streuung einzelner Teilchen gemacht, d.h.

- alle Teilchen im Teilchenstrahl reagieren unabhängig, d.h. die de Broglie-Wellenlänge  $\ll$  Abstand der Teilchen,
- Die Wahrscheinlichkeit einer Streuung ist klein, so dass Mehrfachstreuungen keine Rolle spielen,
- die Bindungsenergie von  $b$  im Target kann vernachlässigt werden.

### Wirkungsquerschnitt

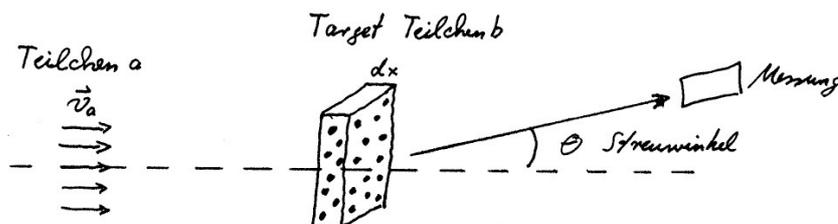


Abb. 5.2 Streuung in einem “fixed target” Experiment.

Ein “fixed Target” Experiment ist gekennzeichnet durch

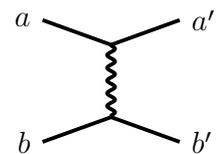


Abb. 5.1  
Beispiel für eine elastische Streuung.

## 5.1 Streuprozesse

- $n_a$  = Dichte der Teilchen  $a$  im Strahl,  $[n_a] = \text{Anzahl}/\text{cm}^3$
- $n_b$  = Dichte der Teilchen  $b$  im Target<sup>5</sup>  $[n_b] = \text{Anzahl}/\text{cm}^3$ .
- $dx$  = Targetdicke,  $[dx] = \text{cm}$ .

Innerhalb des Querschnittsfläche  $A$  des Strahls ist die Anzahl der Teilchen  $N_b = n_b \cdot A \cdot dx$ . Die Wahrscheinlichkeit, dass ein einzelnes Teilchen  $a$  im Target reagiert, hängt im einfachsten Fall vom geometrischen Querschnitt  $\sigma$  des  $a - b$  Systems ab,

$$w = \sigma \frac{N_b}{A} = \sigma n_b dx \quad (5.2)$$

Mehrfachstreuung kann vernachlässigt werden für  $\omega \ll 1$ , also für hinreichend kleine  $dx$ . Bei einer Wechselwirkung mit langer Reichweite ist  $\sigma$  nicht länger nur der geometrische Querschnitt, sondern charakterisiert ganz allgemein die Wechselwirkung. Definiert durch die obige Gleichung  $w = \sigma n_b dx$  wird er daher als Wirkungsquerschnitt bezeichnet und ist ein Mass für die Reaktionswahrscheinlichkeit einer einzelnen Teilchenreaktion. Er entspricht der "effektiven Fläche" des Streuzentrums und ist unabhängig vom jeweiligen Experiment.

Da  $w$  dimensionslos ist, hat  $\sigma$  die Dimension einer Fläche. Da es sich in aller Regel um sehr kleine Flächen handelt, wird als Einheit das "barn" verwendet,

$$1 \text{ barn} = 1 \text{ b} = (10 \text{ fm})^2 = 10^{-28} \text{ m}^2$$

Ein Proton hat in dieser Einheit den geometrischen Querschnitt  $\pi r_p^2 = \pi \cdot (1.4 \text{ fm})^2 \approx 0,06 \text{ b}$ .

Für Teilchen  $a$  mit Geschwindigkeit  $v_a$  entspricht der Teilchenfluss

$$\phi_a = n_a \cdot v_a \quad [\phi_a] = \frac{\text{Teilchen}}{\text{cm}^2 \text{ s}} \quad (5.3)$$

der Anzahl Teilchen, die pro Zeit durch eine Querschnittsfläche treten. Die Reaktionsrate im Experiment, d.h. die Anzahl der Reaktionen pro Zeiteinheit, ist damit bezogen auf den Strahlquerschnitt  $A$

$$\frac{dN}{dt} = \phi_a A \omega = \underbrace{\phi_a A n_b dx}_{L} \sigma \quad (5.4)$$

oder

$$\frac{dN}{dt} = L \sigma \quad (5.5)$$

<sup>5</sup> Für ein Target aus Atomen gilt

$$n_b = \frac{N_A \cdot \rho}{M_{Mol}} \quad (5.1)$$

mit dem Atomgewicht  $M_{Mol}$ , der Avogadrozahl  $N_A$  und der Targetdichte  $\rho$ .

Hierbei hängt die Luminosität  $L$  nur vom Experiment ab. Für ein "fixed target" Experiment ist sie

$$\boxed{L_{\text{fixed target}} = v_a n_a N_b} \quad (5.6)$$

Diese Größe kann man auch für ein Collider-Experiment definieren. In einem Collider kreisen Teilchen-Pakete ("Bunch") von typisch  $10^{10}$  Teilchen auf gegenläufigen Bahnen. Wenn  $N_a, N_b$  die Anzahl der Teilchen in den Teilchenpaketen sind und  $f$  die Frequenz, mit der sie im Experiment aufeinander treffen, dann ist die Luminosität

$$L_{\text{Collider}} = f \frac{N_a N_b}{4\pi \sigma_x \sigma_y} \quad (5.7)$$

Hierbei sind  $\sigma_x, \sigma_y$  die Breiten der Gaußverteilungen der Strahlpakete der Teilchen senkrecht zu ihrer Flugrichtung.

**Messung des Wirkungsquerschnitts bei Absorption** Wenn durch die Reaktionen die Teilchen  $a$  absorbiert werden, kann man aus der Abschwächung des Teilchenstrahls in einem hinreichend dicken Target direkt den Wirkungsquerschnitt ermitteln. Die Abnahme der Teilchenzahl  $N_a$  ist

$$dN_a = -w N_a \quad (5.8)$$

$$\frac{-dN_a}{N_a} = w = \sigma n_b dx \quad (5.9)$$

so dass

$$N_a(x) = N_0 e^{-x/\lambda} \quad (5.10)$$

Hier ist

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{\sigma n_b}} \quad (5.11)$$

die mittlere freie Weglänge zwischen zwei Wechselwirkungen. Die Messung der Anzahl der Teilchen  $N_a$  nach dem Target ergibt also direkt den Wirkungsquerschnitt.

**Differentieller und totaler Wirkungsquerschnitt** Die wichtigste Messgröße ist der Wirkungsquerschnitt als Funktion der kinematischen Variablen ( $x_1, x_2, x_3 \dots$  = Impulse, Energien, Winkel) der Teilchen im Endzustand,

$$\frac{d^n \sigma}{dx_1 dx_2 dx_3 \dots} \quad (5.12)$$

Häufig erfolgt die Messung nur als Funktion einer oder zwei dieser Größen,

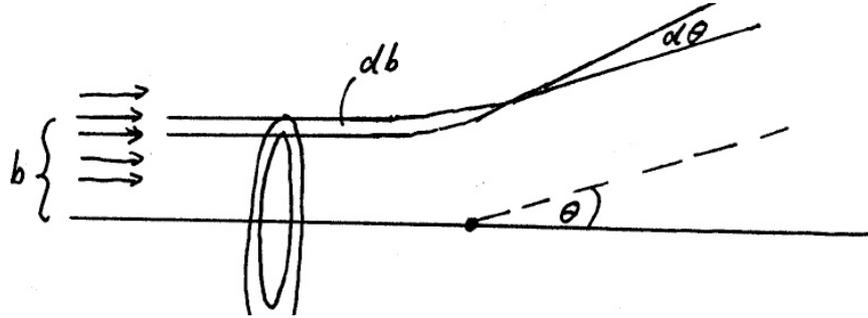
$$\frac{d\sigma}{dx_1}, \quad \frac{d^2\sigma}{dx_1 dx_2} \quad (5.13)$$

d.h. es wird über alle anderen Freiheitsgrade integriert. Der totale Wirkungsquerschnitt ist dann

$$\sigma = \int dx_1 dx_2 dx_3 \dots \frac{d\sigma}{dx_1 dx_2 dx_3 \dots} \quad (5.14)$$

**Klassische Interpretation des differentiellen Wirkungsquerschnitts**

In einem fixed target Experiment lässt sich der Wirkungsquerschnitt klassisch wie folgt verstehen.



**Abb. 5.3** Messung des Differentiellen Wirkungsquerschnitts in einem "fixed target" Experiment.

Ein paralleler Strahl von Teilchen nähert sich einem Target. Eines der Teilchen mit senkrechtem Abstand  $b$  (Stoßparameter) zum Streuzentrum wird durch die Wechselwirkung mit dem Streuzentrum (z.B. durch das Coulomb-Potential) um einen Winkel  $\theta$  abgelenkt. Klassisch werden alle Teilchen mit gleichem Stoßparameter die gleiche Ablenkung erfahren, d.h. alle Teilchen, die einen gedachten schmalen Ring  $db$  durchlaufen, werden in einem Streuwinkelbereich  $d\theta$  landen, wenn das Streupotential nicht von  $\phi$  abhängt. Geometrisch hat der Ring die Fläche

$$d\sigma = 2\pi b db \tag{5.15}$$

Das entsprechende Raumwinkelelement integriert über  $\phi$  ist

$$d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta \tag{5.16}$$

Damit ist der differentielle Wirkungsquerschnitt

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|} \tag{5.17}$$

Wichtig ist, dass kleine Stoßparameter  $b$  großen Ablenkwinkeln  $\theta$  entsprechen. Der Wirkungsquerschnitt muss immer positiv sein.

## 5.2 Rutherford-Streuung klassisch

Unter Rutherford-Streuung versteht man die klassische Streuung von geladenen Teilchen bei Vernachlässigung des Spins. Historisch interpretierte E. Rutherford die Resultate der Experimente von Geiger und Marsden, in denen Helium-Kerne mit hoher Energie an einer Goldfolie streuten. Rutherford schloß daraus erstmals auf die Existenz von Atomkernen.

Im Folgenden betrachten wir die Streuung eines leichten Teilchens  $a$  an einem ruhenden schweren Teilchen  $b$  mit  $m_a \ll m_b$  im nicht-relativistischen Grenzfall. Hierfür gilt die Näherung

$$E_a = E'_a, \quad |\vec{P}_a| = |\vec{P}'_a| \tag{5.18}$$

Teilchen  $a$  wird damit im statischen Potential von Teilchen  $b$  gestreut.

**Aufgabe 5.1:** Energieübertrag  $\Delta E$ , 3-er Impulsübertrag  $\Delta \vec{P}$  und 4-er Impuls  $\Delta p$  sind definiert durch

$$\Delta E = E_a - E'_a \quad \Delta \vec{P} = \vec{P}_a - \vec{P}'_a \quad (5.19)$$

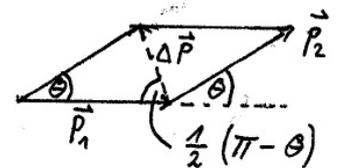
Zeigen Sie, dass für  $m_a \ll m_b$  bei elastischer Streuung der Energieübertrag viel kleiner ist als der 3-er Impulsübertrag. Daraus folgt auch, dass der 4-er Impulsübertrag  $\Delta p = p_a - p'_a$  und der 3-er Impulsübertrag (bis auf das Vorzeichen) fast gleich groß sind.

- i) Die Beziehung zwischen Impulsänderung  $\Delta p$  und Streuwinkel  $\theta$  folgt aus dem Sinussatz,

$$\frac{|\Delta \vec{P}|}{\sin \theta} = \frac{|\vec{P}_2|}{\sin(\frac{1}{2}(\pi - \theta))} = \frac{|m v_0|}{\cos \frac{\theta}{2}} \quad (5.20)$$

Wegen  $\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$  folgt

$$|\Delta \vec{P}| = 2m v_0 \sin \frac{\theta}{2} \quad (5.21)$$

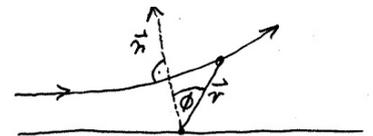


**Abb. 5.4**  
Impulsübertrag  $\Delta \vec{P}$ .

- ii) Drehimpulserhaltung gilt für jedes Zentralpotential,

$$|\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{P}| = m r^2 \omega \quad (5.22)$$

$$b \cdot m \cdot v_0 = m r^2 \frac{d\phi}{dt} \quad (5.23)$$



**Abb. 5.5**  
Drehimpulserhaltung.

- iii) Die Impulsänderung erfolgt durch die Kraft  $\vec{F} = d\vec{P}/dt$ ,

$$\Delta \vec{P} = \vec{P}'_a - \vec{P}_a = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{F} dt \quad (5.24)$$

Benutzt man, dass aus Symmetriegründen nur die Komponente in  $\vec{n}$ -Richtung relevant ist, so folgt

$$|\Delta \vec{P}| = \int_{-\infty}^{\infty} F \cos \phi dt = \int_{-\frac{1}{2}(\pi-\theta)}^{\frac{1}{2}(\pi-\theta)} F \cos \phi \frac{dt}{d\phi} d\phi \quad (5.25)$$

Einsetzen von ii) ergibt

$$|\Delta \vec{P}| = \int_{-\frac{1}{2}(\pi-\theta)}^{\frac{1}{2}(\pi-\theta)} \frac{F r^2}{b v_0} \cos \phi d\phi \quad (5.26)$$

- iv) Für die Coulomb-Kraft  $F$  gilt

$$F r^2 = \frac{Q_a Q_b}{4\pi\epsilon_0} = const, \quad (5.27)$$

## 5.2 Rutherford-Streuung klassisch

so dass der Integrand unabhängig von  $r$  wird. Es folgt

$$|\Delta\vec{P}| = \frac{F r^2}{b v_0} \int_{-\frac{1}{2}(\pi-\theta)}^{\frac{1}{2}(\pi-\theta)} \cos \phi d\phi = 2 \frac{F r^2}{b v_0} \cos \frac{\theta}{2} \quad (5.28)$$

Mit dem Impulsübertrag aus Gl. 5.21 folgt

$$b = 2 \frac{F r^2}{v_0} \frac{1}{2 m v_0} \cot \frac{\theta}{2} = a \cot \frac{\theta}{2} \quad (5.29)$$

und

$$\frac{db}{d\theta} = \frac{-a}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad (5.30)$$

Hierbei ist mit  $Q_a = Z_a e$  und  $Q_b = Z_b e$ ,

$$a = \frac{F r^2}{2 E_{kin}} = \frac{Q_a Q_b}{8 \pi \epsilon_0 E_{kin}} = \frac{\alpha Z_a Z_b}{2 E_{kin}} \quad (5.31)$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0} \quad (5.32)$$

Damit ist der Wirkungsquerschnitt (Gl. 5.17) gegeben durch

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{a^2}{\sin \theta} \cdot \cot \frac{\theta}{2} \cdot \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad (5.33)$$

$$= \frac{a^2}{4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (5.34)$$

Im letzten Schritt wurde  $\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$  benutzt. Insgesamt ist dann

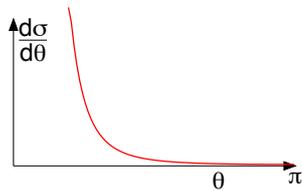
$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z_a^2 Z_b^2 \alpha^2}{16 E_{kin}^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}}} \quad (5.35)$$

Der Ausdruck im Nenner ergibt sich direkt aus dem 3-er Impulsübertrag Gl. 5.21

$$|\Delta\vec{p}| \equiv |\vec{q}| = 2 m v_0 \sin \frac{\theta}{2} \quad (5.36)$$

und  $E_{kin} = \frac{1}{2} m v_0^2$ , so dass endgültig

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(2 m Z_a Z_b \alpha)^2}{(\vec{q})^4}} \quad (5.37)$$



**Abb. 5.6** Winkelverteilung Rutherford-Streuung. für

- Bei weitem am häufigsten sind kleine Streuwinkel und kleine Impulsüberträge.
- Der Wirkungsquerschnitt fällt sehr schnell mit  $\theta$ . Er wird bei  $\theta = 180^\circ$  aber nicht Null. Aus diesem Verhalten hat Rutherford auf die Existenz des Kerns geschlossen.
- Die Winkelverteilung hängt nicht vom Vorzeichen der Ladungen ab. Anziehende und abstoßende Kräfte ergeben also die gleiche Winkelverteilung.

## 5.3 Rutherford-Streuung

Die klassische Rutherford-Streuung an einem Zentralpotential ist eng verwandt mit dem Kepler-Problem in der Astronomie. In beiden Fällen geht man im einfachsten Fall davon aus, dass das Potential von einer ortsfesten Quelle ausgeht und somit statisch ist. Sowohl das elektrostatische Potential als auch das Gravitationspotential sind abhängig nur vom Abstand,  $V(r) \sim 1/r$ . Man kann also die Lösung der Bewegungsgleichung bei der Rutherford-Streuung direkt auf die Kepler-Bahnen zurückführen, wenn man beachtet:

- Bei der Rutherford-Streuung kommt das einlaufende Teilchen aus unendlicher Entfernung, nimmt keine gebundene Bahn ein und verschwindet wieder im Unendlichen. Dies entspricht den Hyperbel-Lösungen des Kepler-Problems (also nicht den Kreis-, Ellipsen- oder Parabelbahnen).
- Je nach Ladungen des einlaufenden Teilchens und der Quelle des Potentials gibt es anziehende Kräfte (wie bei der Gravitation) oder abstoßende Kräfte.

Um eine Beziehung zwischen Stoßparameter  $b$  und Streuwinkel  $\theta$  zu erhalten wird daher eine kurze Ableitung der Kepler-Bahnen gegeben und daraus der Hyperbelfall abgeleitet.

Die Bahnkurve des einlaufenden Teilchens wird eine ebene Kurve sein, die man in Zylinderkoordinaten  $(r, \phi)$  beschreiben kann. Der Ortsvektor sei

$$\vec{r} = r \vec{u} \quad (5.38)$$

mit dem Einheitsvektor  $\vec{u}$ , der von der Quelle des Potentials in Richtung des Teilchens zeigt. Insbesondere gilt

$$\vec{u}^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \partial_t \vec{u}^2 = 2\vec{u}\dot{\vec{u}} = 0 \quad (5.39)$$

Der Geschwindigkeit des Teilchens ist damit

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \vec{u} + r \dot{\vec{u}} \quad (5.40)$$

Der Drehimpuls ist

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} = m \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = m r \vec{u} \times (\dot{r} \vec{u} + r \dot{\vec{u}}) = m r^2 \vec{u} \times \dot{\vec{u}} \quad (5.41)$$

Für ein Zentralpotential mit  $V(r) \sim 1/r$  zeigt die Kraft auf das Teilchen immer entlang  $\vec{r} = r\vec{u}$ ,

$$m\ddot{\vec{r}} = \frac{\mu}{r^2} \vec{u} \quad (5.42)$$

Für Gravitation (anziehend) ist

$$\mu = -G m M \quad (5.43)$$

und für ein elektrostatisches Potential ist

$$\mu = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} qQ \quad (5.44)$$

also abstoßend für gleichnamige Ladungen. Der Drehimpuls ist für ein Zentralpotential konstant, denn mit Gl. 5.42 gilt

$$\partial_t \vec{L} = m \partial_t (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = m (\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}}) = 0 \quad (5.45)$$

Man betrachtet nun das Kreuzprodukt der Beschleunigung und des Drehimpulses,

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{L} = \left( \frac{\mu}{m r^2} \vec{u} \right) \times (m r^2 \vec{u} \times \dot{\vec{u}}) \quad (5.46)$$

Durch diesen Trick heben sich die Faktoren  $r^2$  gerade weg und aus dem doppelten Kreuzprodukt erhält man (bac-cab Regel und Gl. 5.39)

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{L} = \mu \vec{u} \underbrace{(\vec{u} \dot{\vec{u}})}_{=0} - \mu \dot{\vec{u}} \underbrace{(\vec{u} \vec{u})}_{=1} = -\mu \dot{\vec{u}} \quad (5.47)$$

Da  $\vec{L}$  konstant ist kann man diese Gleichung einfach integrieren,

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{L} = -\mu \vec{u} + \vec{c} \quad (5.48)$$

Der Vektor  $\vec{c}$  ist eine Integrationskonstante und muss später aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden. Um den Vektor-Charakter dieser Gleichung aufzulösen multipliziert man von links mit  $\vec{r} = r\vec{u}$  und erhält aus der Vertauschung im Spatprodukt auf der linken Seite

$$\vec{r} \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{L}) = (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \cdot \vec{L} = \frac{1}{m} \vec{L}^2 = -r \mu \vec{u}^2 + \vec{r} \cdot \vec{c} \quad (5.49)$$

oder kurz

$$\vec{L}^2 = m r (-\mu + c \cdot \cos \phi) \quad (5.50)$$

Hier ist  $\phi$  der Winkel zwischen dem Ortsvektor  $\vec{r}$  und dem Vektor  $\vec{c}$ . Löst man nach  $r$  auf,

$$r = \frac{L^2}{-m \mu + c m \cos \phi} \quad (5.51)$$

so erhält man die Standardform der Ellipsengleichung

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \phi} \quad (5.52)$$

mit den Abkürzungen

$$p = -\frac{L^2}{m \mu} \quad \epsilon = -\frac{c}{\mu} \quad (5.53)$$

Für

$$\cos \phi = -\frac{1}{\epsilon} = \frac{\mu}{c} \quad (5.54)$$

wird der Abstand  $r$  unendlich, d.h. diese Gleichung definiert den minimalen und maximalen Winkel  $\phi$ . Für  $\phi = 0$  ergibt sich der minimale Abstand

$$r_{min} = \frac{p}{1 + \epsilon} \quad (5.55)$$

**Anfangsbedingungen bei der Rutherford-Streuung** Wir betrachten ein Teilchen, das sich aus unendlicher Entfernung mit Impuls  $\vec{P} = m v_0 \vec{e}_x$  entlang der  $x$ -Achse nähert und bei gerader Flugbahn die Quelle des Potentials in Entfernung  $b \vec{e}_y$  passieren würde.  $b$  ist also der Stoßparameter des Prozesses. Dann ist

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = -m b v_0 \vec{e}_z \quad (5.56)$$

Wertet man Gl. 5.48 für das einlaufende Teilchen (bei  $t = -\infty$ ) aus, so ist

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{L} = m b v_0^2 \vec{e}_y = \mu \vec{e}_x + \vec{c} \quad (5.57)$$

Da  $\vec{e}_x$  und  $\vec{e}_y$  senkrecht aufeinander stehen ist der Betrag von  $\vec{c}$  gleich

$$c = \sqrt{(m b v_0^2)^2 + \mu^2} \quad (5.58)$$

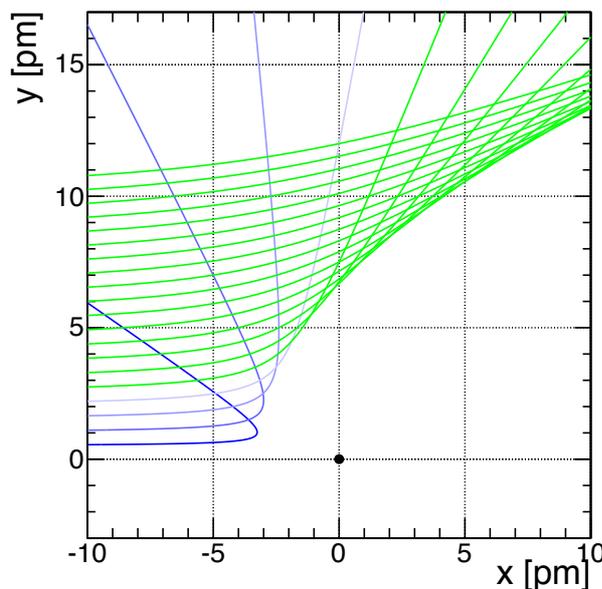
Der Nullpunkt für den Winkel  $\phi$  muss so gewählt werden, dass  $\dot{\vec{r}} = v_0 \vec{e}_x$  ist. Dies entspricht einer Rotation um den Winkel

$$\phi_0 = \arccos\left(-\frac{1}{e}\right) \quad (5.59)$$

so dass

$$\vec{r} = r \cdot \begin{pmatrix} -\cos(\phi + \phi_0) \\ \sin(\phi + \phi_0) \end{pmatrix} \quad (5.60)$$

Diese Lösung ist in der folgenden Abbildung gezeigt.



**Abb. 5.7** Bahnen von einlaufenden Teilchen mit gleichen Impulsen aber verschiedenen Stoßparametern in der Rutherford-Streuung. Die Quelle des Potentials ist bei (0,0) und hat das gleiche Vorzeichen wie die Ladung des einlaufenden Teilchens.

# 6 Detektoren zur Messung elementarer Teilchen

---

6.1	Übersicht . . . . .	38
6.2	Geladene Teilchen . . . . .	38
6.3	Spurdetektoren . . . . .	43
6.4	Photonen und elektromagnetische Schauer . . . . .	54
6.5	Hadronische Schauer . . . . .	56
6.6	Kalorimeter . . . . .	57
6.7	Detektorkonzepte und Identifizierung von Teilchen . . . . .	58

---

## 6.1 Übersicht

Ziel der Messungen auch komplizierter Teilchenreaktionen ist es, möglichst alle entstehenden Quanten einzeln nachzuweisen und ihre Energien, Impulse, Massen und Ladungen zu messen. Das Prinzip ist dabei zumeist die Umwandlung von kinetischer Energie ( $E \gtrsim MeV$ ) in elektrische oder optische Effekte.

- Elektrisch geladene Teilchen können nur direkt nachgewiesen werden, wenn ihre Lebensdauer groß genug ist, um messbare Strecken zurückzulegen. Dies sind insbesondere  $e^\pm, \mu^\pm, \pi^\pm, K^\pm, p, \bar{p}, \alpha, \bar{\alpha}, \dots$
- Neutrale Teilchen wie  $\gamma, n, \bar{n}, K^0, \dots$  werden durch ihre Reaktionen mit dem Detektormaterial und die daraus entstehenden Sekundärteilchen nachgewiesen.
- Kurzlebige Teilchen wie  $\pi^0, \tau^\pm, c, b, t, Z^0, W^\pm, H, \dots$  und viele Hadronen können durch Ihre Zerfälle nachgewiesen werden.
- Eine Ausnahme bilden Neutrinos, da deren Wirkungsquerschnitt so klein ist, dass sie nicht einzeln direkt nachgewiesen werden können. Energie- und Impulserhaltung können jedoch benutzt werden, um Neutrinos indirekt nachzuweisen.

## 6.2 Geladene Teilchen

### 6.2.1 Ionisation und Bethe-Bloch-Formel

Hochenergetische geladene Teilchen übertragen durch elastische oder inelastische Stöße vor allem mit den Elektronen in der Hülle Energie auf Atome des Detektormaterials. Die Wahrscheinlichkeit und der jeweilige Energieverlust pro Stoß ergibt sich aus dem Rutherford-

Wirkungsquerschnitt, wenn man die kleine Masse der Elektronen sowie die Energieniveaus der Elektronen und damit die Energie für Anregungen der Atome und die Ionisierungsenergien mit berücksichtigt. Integriert man über alle Streuwinkel und den jeweils damit verbundenen Energieverlust und berücksichtigt auch relativistische Effekte, so ergibt sich die Bethe-Bloch-Formel (siehe z.B. Sakurei). Sie beschreibt den *mittleren* Energieverlust  $-dE$  durch vielfache Coulomb-Wechselwirkung mit den Atomen im Material nach Durchqueren einer Schicht der Dicke  $dx$ .

$$\boxed{-\frac{dE}{dx} = \frac{Dz^2n_e}{\beta^2} \left[ \ln \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I} - \beta^2 - \frac{\delta(\gamma)}{2} \right]} \quad (6.1)$$

Teilchen: Ladung  $z \cdot e$ , Geschwindigkeit  $\beta = v/c$ ,  $\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2}$

Material:  $n_e = \rho \cdot N_A \cdot \frac{Z}{A}$ , Elektronendichte

$Z$  = Kernladung,  $A$  = Atomgewicht,  $\rho$  = Dichte

$I$  = mittlere Energie für Ionisation  $\approx 10Z \cdot eV$

$D = 4\pi\alpha^2\hbar^2/m_e = 5,1 \cdot 10^{-25} MeV cm^2$

$\delta$  = Dichte-Effekt in Festkörpern für große  $\gamma$

Der minimale Energieverlust tritt unabhängig von der Teilchensorte bei einem Impuls von ca.  $\gamma\beta = 3$  auf. Bei gleichzeitiger Messung des Impulses und der Ionisierung  $dE/dx$  kann bei kleinen Impulsen die Masse des Teilchens ermittelt werden (Abb. 6.4). Bei großen Impulsen ionisieren aber alle Teilchen ähnlich stark, so dass die Teilchensorten nicht mehr unterschieden werden können. Eine Ausnahme bilden Elektronen aufgrund der zusätzlichen Bremsstrahlung.

Der minimale Energieverlust beträgt - je nach Material - ca. 2 MeV bei einer Dichte von  $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$ . Effektiv ist die mittlere Energie zur Ionisation eines Atoms etwa  $10 \cdot Z \text{ eV}$ . In einem Gas mit kleiner Dichte ( $\approx 10^{-3} \text{ g/cm}^3$ ) werden daher einige hundert Atome pro cm ionisiert. In einem Festkörper dagegen mehr als 10000.

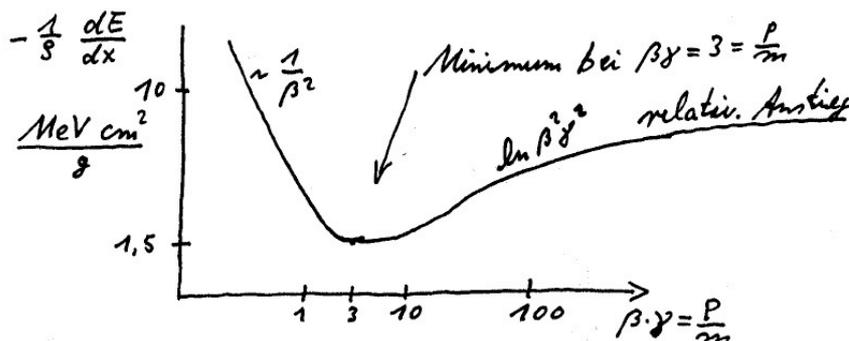


Abb. 6.1 Skizze der Bethe-Bloch-Formel.

Der mittlere Energieverlust ist die statistische Summe aus vielen Einzelprozessen. Ist die Anzahl der Prozesse (in einer dünnen Schicht  $dx$ ) nicht sehr groß, so gibt es starke statistische Schwankungen, die eine "Landau-Verteilung" ergeben. Der Ausläufer zu hohen Energien tritt auf, wenn zufällig in einem Stoß eines der Elektronen der Hülle viel Energie erhält und selber zur weiteren Ionisation beiträgt (sogenannte  $\delta$ -Elektronen durch hohen Impulsübertrag bei der Rutherford-Streuung).

## Bethe-Bloch-Formel

MIPS = minimal ionisierendes Teilchen

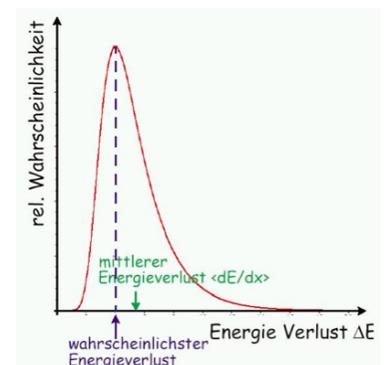
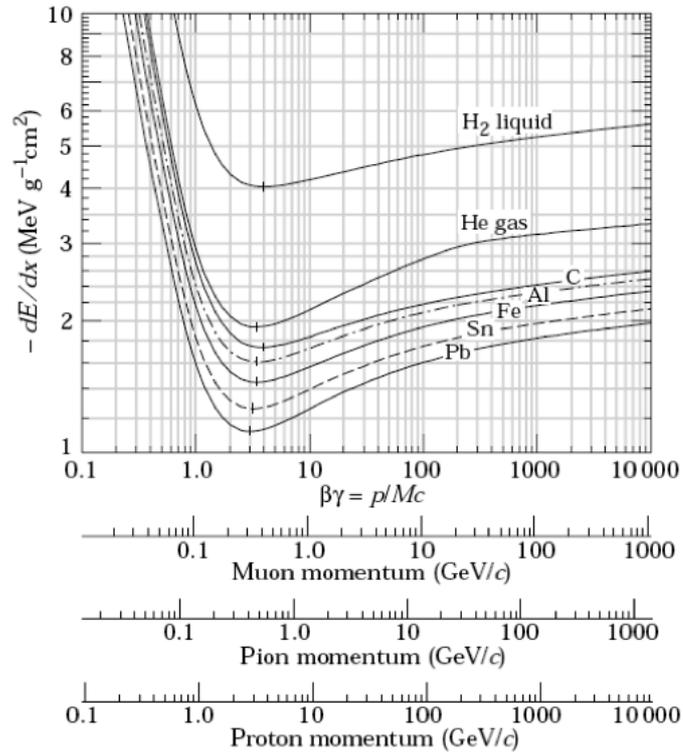
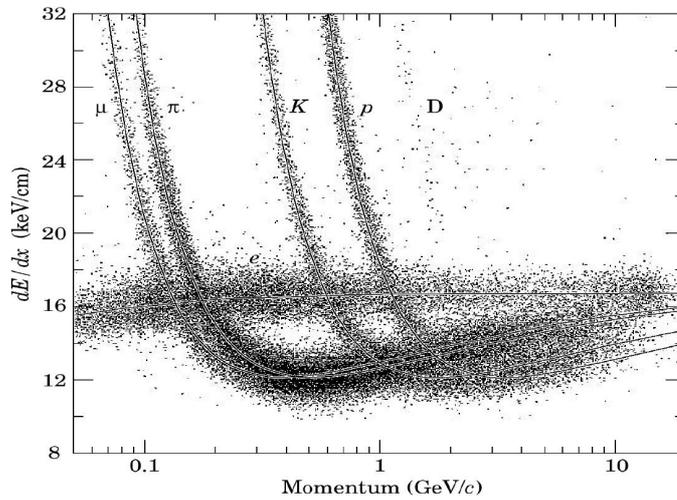


Abb. 6.2

Landau-Verteilung des Energieverlusts in einer dünnen Schicht.



**Abb. 6.3** Bethe-Bloch-Formel für verschiedene Materialien und Teilchensorten. Gezeigt ist der Energieverlust normiert auf die Dichte  $\rho$  des Materials,  $-dE/(\rho dx)$ . (Particle Data Group)



**Abb. 6.4** Kurven zeigen die Bethe-Bloch-Formel für eine mit Gas gefüllte Kammer für  $p, K^\pm, \pi^\pm, \mu^\pm$  und  $e$ . Die fast konstante Linie bei etwa  $16 \text{ MeV/cm}$  gilt für Elektronen, wenn man auch Bremsstrahlung berücksichtigt. Die einzelnen Punkte stellen die experimentelle Messung der Ionisierung des Gases entlang einzelner Teilchenspuren dar, deren Impuls durch den Bahnradius im Magnetfeld bestimmt wurde (Messung der OPAL-Kollaboration).

Nach der Rutherford-Formel erfolgt die Streuung ganz dominant unter kleinen Winkeln und damit kleinen Energieüberträgen. Daher durchdringt ein hochenergetisches geladenes Teilchen mehrere

cm bis m dichtes Material und wird dabei immer langsamer, bis es schließlich komplett stoppt. Die Winkelablenkung vieler Stöße addieren sich zu einem Gesamtwinkel  $\theta_P$ . Dessen Projektion auf eine Richtung senkrecht zum Anfangsimpuls folgt (zentraler Grenzwertsatz der Statistik) näherungsweise einer Gauß-Verteilung mit Breite  $\theta_0$ ,

$$f(\theta_p) \sim e^{-\theta_p^2/2\theta_0^2} \quad (6.2)$$

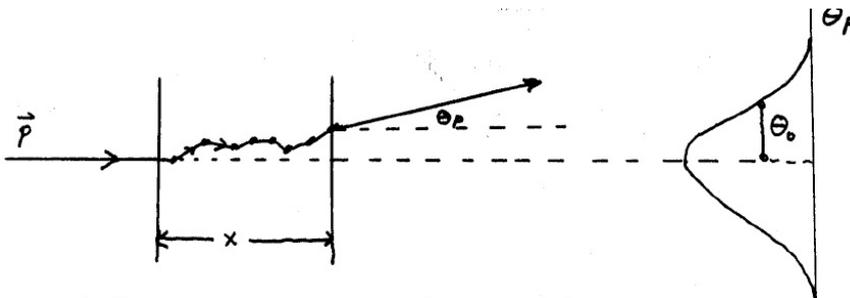


Abb. 6.5 Prinzip der Vielfachstreuung.

Eine statistische Rechnung ergibt für ein Teilchen mit Ladung  $z_i$

$$\theta_0 = \underbrace{\frac{13,6 \text{ MeV}}{\beta pc}}_{\text{Teilchen}} z_i \underbrace{\sqrt{\frac{x}{X_0} \left(1 + 0,038 \ln \frac{x}{X_0}\right)}}_{\text{Material}} \quad (6.3)$$

Die Strahlungslänge  $X_0$  charakterisiert allgemein elektromagnetische Wechselwirkungen,

$$\frac{1}{X_0} = \frac{4\hbar^2 c^2}{m^2 c^4} \cdot (Z^2 + Z) \cdot \alpha^3 \cdot n_a \ln(183 \cdot Z^{-\frac{1}{3}}) \quad (6.4)$$

mit  $Z$  = Ladungszahl für Kern/Hülle und  $n_a$  = Anzahl Atome / Volumen.  $m$  ist die Masse des Elektrons, wenn  $X_0$  für  $e^+e^-$ -Paarbildung oder für Vielfachstreuung verwendet wird. Für Bremsstrahlung ist  $m$  die Masse des Teilchens, das das Photon abstrahlt, in der Regel also ebenfalls die Elektronenmasse.

	Z	Dichte $\rho$ [g cm <sup>-3</sup> ]	$-\frac{dE}{dx} _{\text{Ion,min}}$ [MeV cm <sup>-1</sup> ]	$X_0$ [cm]	$E_c$ [MeV]
C	6	2,27	3,97	18,8	103
Al	13	2,7	4,37	8,9	47
Fe	26	7,87	11,4	1,8	24
Pb	82	11,35	12,7	0,56	7

Beispiel: Für ein Muon mit  $P = 1 \text{ GeV}$ ,  $\beta \approx 1$ ,  $z_i = 1$ , in Eisen ( $x = 1 \text{ cm}$  dick, Strahlungslänge  $X_0 = 1,8 \text{ cm}$ ) folgt  $\theta_0 \approx 0,6^\circ$ . Die Ablenkung ist also in der Regel sehr klein.

Insbesondere in Gasen ergibt sich damit die Möglichkeit, Teilchenbahnen über lange Strecken zu vermessen, indem man die Ionisation misst. Das ist das Prinzip der Spurdetektoren.

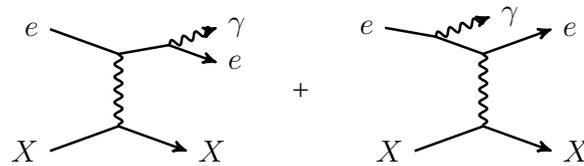
Vielfach-Streuung um kleine Winkel

### 6.2.2 Bremsstrahlung

Wie schon vom Herz'schen Dipol bekannt, erzeugen beschleunigte elektrische Ladungen elektromagnetische Wellen. Hochenergetische geladene Teilchen werden in einem Material besonders stark beschleunigt, wenn sie leicht sind und in der Nähe eines (schweren) Kerns mit hoher Kernladungszahl  $Z$  vorbeilaufen. Besonders wichtig ist Bremsstrahlung daher für Elektronen, da sie die mit Abstand leichtesten geladenen Teilchen sind.

Als Feynman-Graphen dargestellt entspricht die Aussendung der elektromagnetischen Welle der Abstrahlung eines Photons vom Elektron im Anfangs- oder Endzustand.

$$e + X \rightarrow e + \gamma + X \tag{6.5}$$



**Abb. 6.6** Feynman-Diagramme zur Bremsstrahlung.

**Aufgabe 6.1:** Begründen Sie anhand von Energie- und Impulserhaltung, warum ein freies Teilchen kein Photon abstrahlen kann, sondern die Nähe eines anderen Teilchens braucht. Argumentieren Sie im Schwerpunktsystem des freien Teilchens.

In diesen Diagrammen gibt es jeweils 3 Vertizes von Photonen und Elektronen. Die Rate für diese Prozesse ist daher  $\sim \alpha^3$ . Die Rechnungen hierzu sind aufwendig. Als Resultat ergibt sich für sehr hohe Energien, dass das Energiespektrum der emittierten Photonen  $\sim 1/E_\gamma$  ist. Gemittelt über viele dieser Prozesse in einer Materialschicht der Dicke  $dx$  ergibt sich der Energieverlust des geladenen Teilchens zu

$$\boxed{-\frac{dE_{Brems}}{dx} \approx \frac{E}{X_0}} \tag{6.6}$$

Die Anfangsenergie nimmt also exponentiell ab mit der Strahlungslänge  $X_0$  als charakteristische Länge,

$$E(x) = E(0) e^{-x/X_0} \tag{6.7}$$

Dies wird oft auch als Definition der Strahlungslänge verwendet. Der Energieverlust durch Bremsstrahlung wird für Elektronen bei Energien oberhalb der sogenannten kritischen Energie  $E_c$  deutlich wichtiger als der Energieverlust durch Ionisation. Näherungsweise ist dies für Elektronen der Fall bei

$$E_e > E_c \approx 600 \text{ MeV} / Z \tag{6.8}$$

Werte für  $E_c$  sind bei Gl. 6.4 gelistet. Abb. 6.4 zeigt für Elektronen also dominant Bremsstrahlung.

Aus der Formel (Gl. 6.4) für die Strahlungslänge entnimmt man

$$-\frac{dE_{Brems}}{dx} \sim \frac{E}{m^2}$$

Für ein Muon z.B. ist Bremsstrahlung bei gleicher Energie daher um einen Faktor  $(m_e/m_\mu)^2 = (0,5/106)^2$  kleiner und bis zu Energien von mehreren 100 GeV gegenüber Energieverlust durch Ionisation vernachlässigt werden.

Da hochenergetische Teilchen auch in der Nähe eines Kerns nur wenig abgelenkt werden, fliegen auch die Photonen im Mittel unter sehr kleinen Winkeln zur Elektron-Richtung. Diese sind typisch von der Größenordnung

$$\theta \lesssim m/E \quad (6.9)$$

## 6.3 Spurdetektoren

### 6.3.1 Impulsmessung im Magnetfeld

Der Nachweis der geometrischen Bahnen von Teilchen über möglichst lange Strecken ist besonders wichtig, da man so mit sehr hoher Genauigkeit Teilchenimpulse messen kann. In einem homogenen Magnetfeld ergibt sich eine Spiralbahn, aus deren Radius  $R$  die Impulskomponente  $P_\perp$  in der Ebene senkrecht zum Magnetfeld folgt,

$$P_\perp = 0,3 \cdot z \cdot \frac{R}{\text{m}} \cdot \frac{B}{\text{T}} \text{ GeV} \quad (6.10)$$

Der numerische Faktor ergibt sich aus der Wahl der Einheiten (m, T, GeV). Diese Formel gilt auch relativistisch.

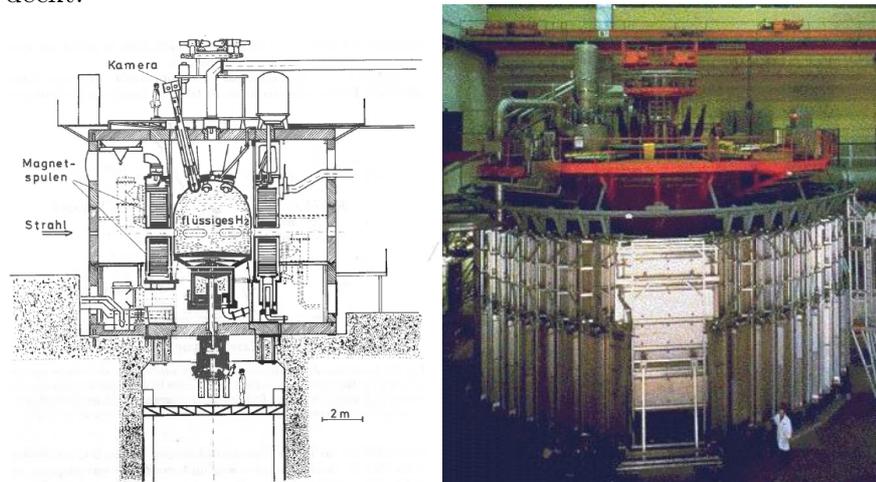
Beispiel: Für ein Teilchen mit  $P_\perp = 1000 \text{ GeV}$  ergibt sich in einem Magnetfeld von  $B = 1 \text{ T}$  ein Radius von  $R = 3000 \text{ m}$ . Auf einer Spurlänge von  $l = 1 \text{ m}$  ist dann die Abweichung von einer Geraden  $\approx l^2/(2R) = 0,5 \text{ mm}$ . Die geometrische Messung der Teilchenbahn muss also deutlich besser als diese Länge sein.

### 6.3.2 Nebelkammern und Blaskammern

Historisch besonders wichtiges Beispiel sind Nebelkammern und Blaskammern: Nebelkammern arbeiten mit unterkühlten Flüssigkeiten, die kurz vor der Kondensation stehen. Blaskammern arbeiten mit überhitzten Flüssigkeiten, die kurz vor der Verdampfung stehen. Bei beiden dienen ionisierte Atome und freie Elektronen entlang der Teilchenbahnen als Kondensationskeime für Tropfen beziehungsweise Gasblasen, ähnlich wie die Rußpartikel aus einer Flugzeugdüse als Kondensationskeime für Kondensstreifen am Himmel sorgen. Die Tropfen oder Gasblasen können fotografiert

### 6.3 Spurdetektoren

und die Bilder später geometrisch vermessen werden. Mit diesen Methoden wurden seit ca. 1930 viele neue Elementarteilchen entdeckt.



**Abb. 6.7** Skizze und Foto der "Big European Bubble Chamber" BEBC am CERN

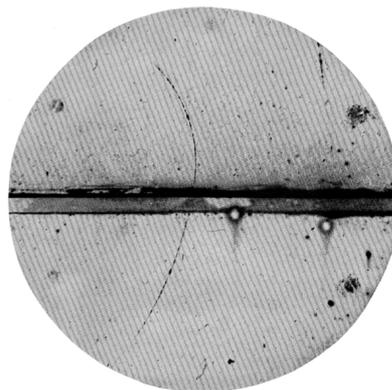
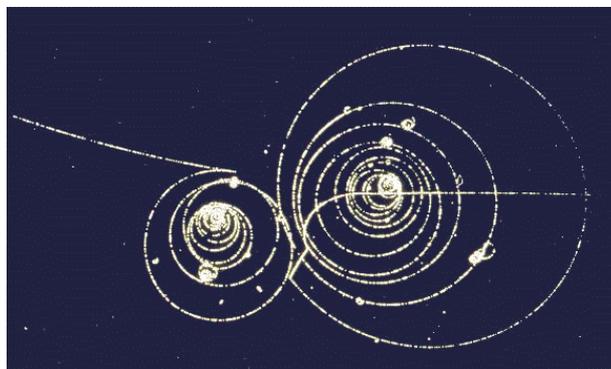
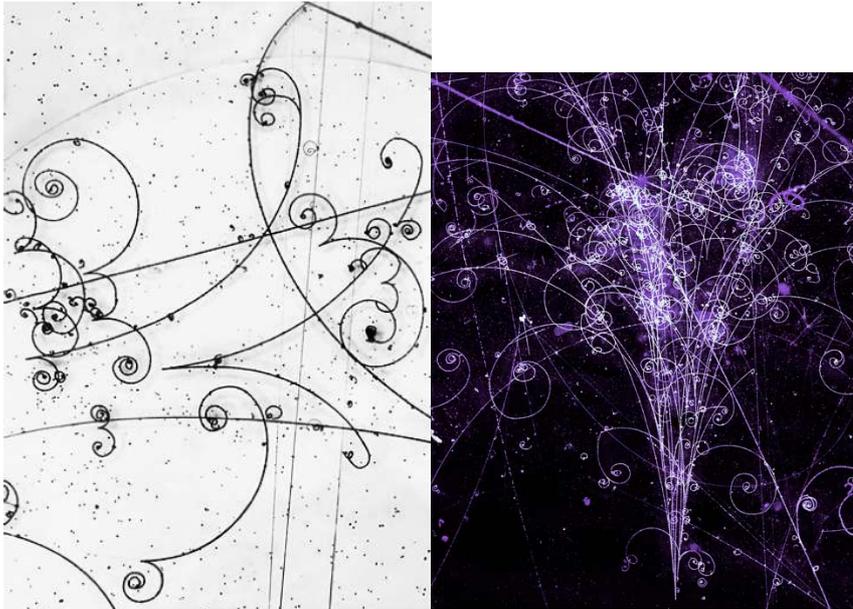


FIG. 1. A 63 million volt positron ( $H_0 = 2.1 \times 10^9$  gauss-cm) passing through a 6 mm lead plate and emerging as a 23 million volt positron ( $H_0 = 7.5 \times 10^8$  gauss-cm). The length of this latter path is at least ten times greater than the possible length of a proton path of this curvature.

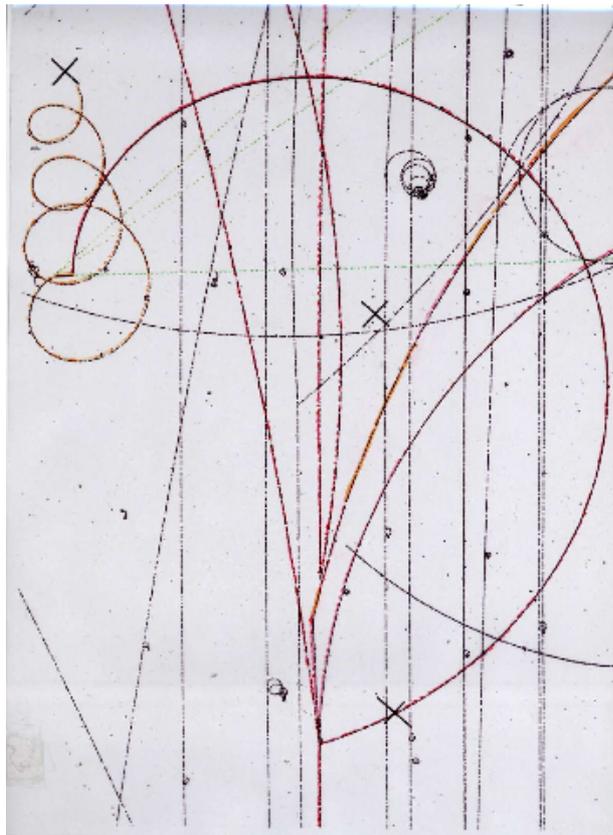
**Abb. 6.8** Ein positiv geladenes Teilchen dringt von unten in die Nebelkammer ein und verliert in einer 6mm dicken Bleiplatte Energie. Die Reichweite danach ist zu groß für ein Proton. Dies ist die Entdeckung des  $e^+$  durch Anderson 1933.



**Abb. 6.9** Fotografie einer Reaktion in einer Blasen-kammer. Die Dichte der Blasen ist ein Maß für den Energieverlust  $-dE/dx$ .



**Abb. 6.10** Links: Ausschnitt eines elektromagnetischen Schauers in einer Blasenkammer mit mehreren Photon-Konversionen in  $e + e^-$  Paare. Rechts: Elektromagnetischer Schauer



**Abb. 6.11** Zerfall eines Pions. Das Pion wird zusammen mit anderen Teilchen erzeugt, stoppt im Detektor und zerfällt anschließend in  $\pi \rightarrow \mu \bar{\nu}_\mu$ . Das Muon hat nur wenig Energie und stoppt schnell, bevor es zerfällt in  $\mu \rightarrow e \nu \bar{\nu}$ . Die Spiralbahn des Elektrons wird durch Energieverlust immer enger.

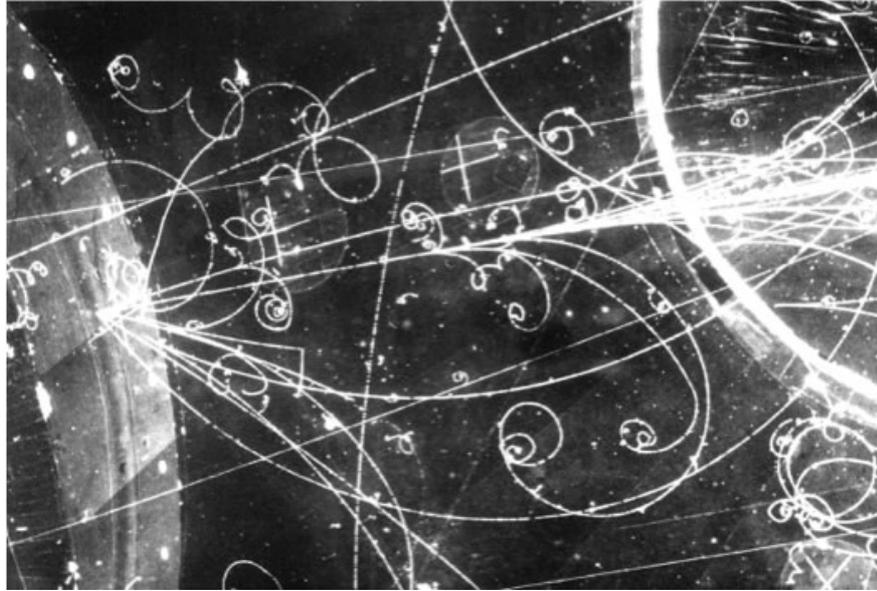


Abb. 6.12 Erzeugung eines Jets aus Hadronen in einer Blasenkammer.

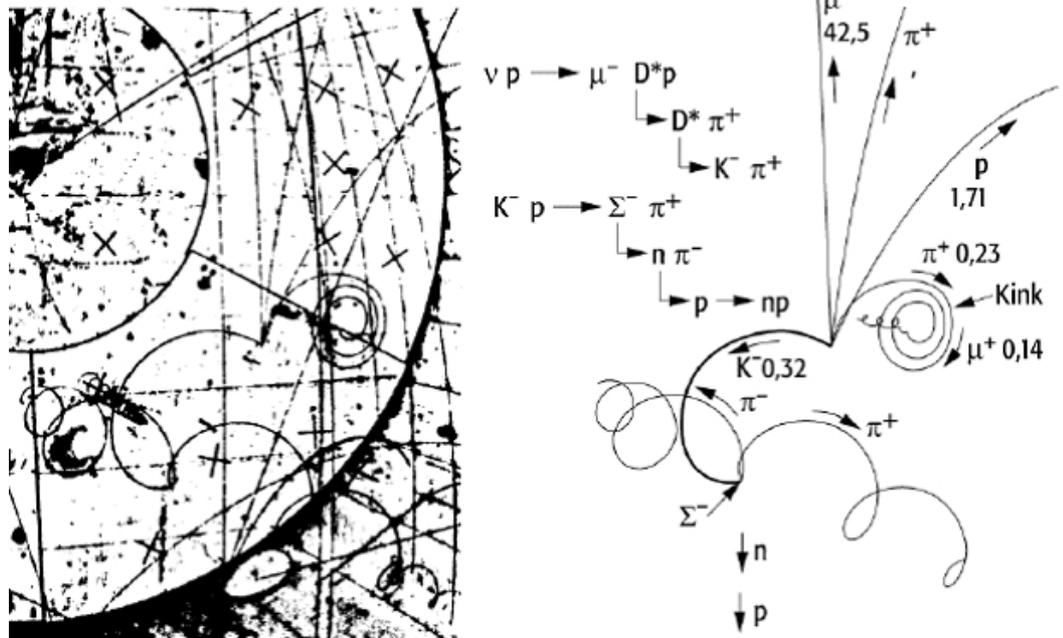


Abb. 6.13 Erzeugung eines Charm-Hadrons mit anschließenden Zerfällen.

### 6.3.3 Gas-Detektoren

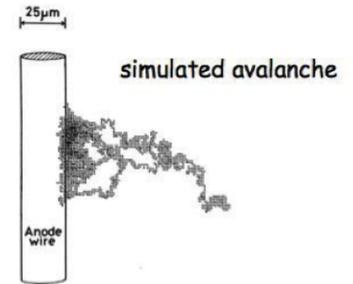
In Gasen ist aufgrund der geringen Dichte die Wechselwirkung geladener (und auch neutraler) Teilchen gering, so dass ihre Bahnen kaum gestört werden und Impulse mit hoher Präzision gemessen werden können. Allerdings ist die Anzahl ionisierter Atome in der Regel (bei Normalbedingungen) gering, so dass Mechanismen der "Gasverstärkung" notwendig sind, um messbare Signale zu erzeugen<sup>6</sup>.

**Drahtkammern:** Hier werden in dem Gasvolumen dünne Drähte gespannt und auf hohes positives elektrisches Potential gesetzt. Werden nun durch ein hochenergetisches Teilchen Paare von Elektronen und Ionen erzeugt, so driften die Elektronen zum Draht.

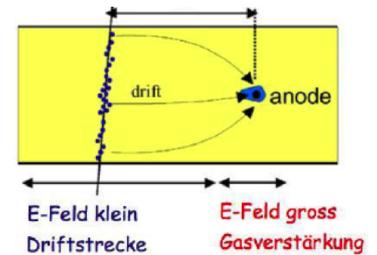
Nahe am Draht ist das elektrische Feld sehr hoch ( $E \sim 1/\text{Radius}$ ), die Elektronen werden stark beschleunigt und sind in der Lage, weitere Atome zu ionisieren. Die dadurch frei werdenden Elektronen werden durch das  $E$ -Feld ebenfalls stark beschleunigt, so dass durch viele derartige Prozesse eine Lawinenbildung entsteht. Auf diese Weise kann die Anzahl der primär entstandenen Elektronen um einen Faktor 10-10000 erhöht werden, so dass empfindliche und rauscharme Verstärker in der Lage sind, ein Signal auf dem Draht zu messen.

In einem homogenen elektrischen Feld ist - weit entfernt vom Draht - die Driftgeschwindigkeit nahezu konstant (typisch  $5 \text{ cm}/\mu\text{s}$ ). Daher kann aus dem Zeitunterschied zwischen Durchgang des primären Teilchens und Signalankunft am Draht der Abstand des primären Teilchens vom Draht berechnet werden. So können Ortsauflösungen bis zu  $100 \mu\text{m}$  erreicht werden.

In Driftkammern wird in der Regel eine Spur an mehreren Dutzend Drähten gemessen, so dass aus der Ortsauflösung je Draht und der Anzahl der Messungen die Messgenauigkeit für den Impuls senkrecht zu den Drähten folgt. Daher werden die Drähte parallel zum Magnetfeld gespannt.



**Abb. 6.14**  
Gasverstärkung nahe am Draht.



**Abb. 6.15**  
Drift von Elektronen zum Draht.

<sup>6</sup> Typisch sind dies entsprechend der Bethe-Bloch-Formel in einem Gas pro cm Weglänge

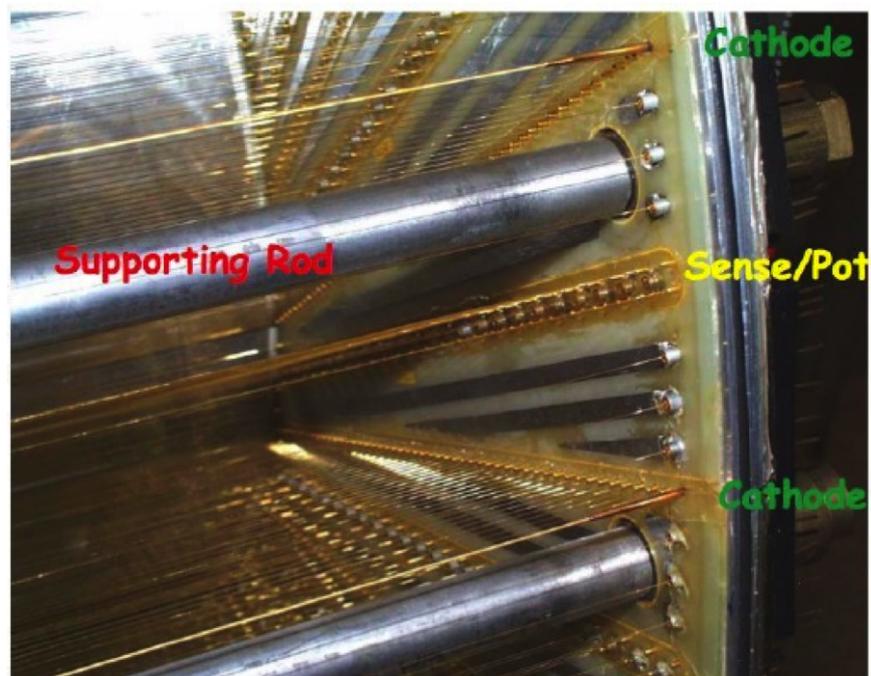
$$N_e \approx \frac{-dE/dx}{I} \approx \frac{2 \text{ MeV g}^{-1} \text{ cm}^2}{10 \text{ eV}} \cdot 10^{-3} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 200/\text{cm} \quad (6.11)$$

Elektronen, also zu wenig Ladung für normale Elektronik.

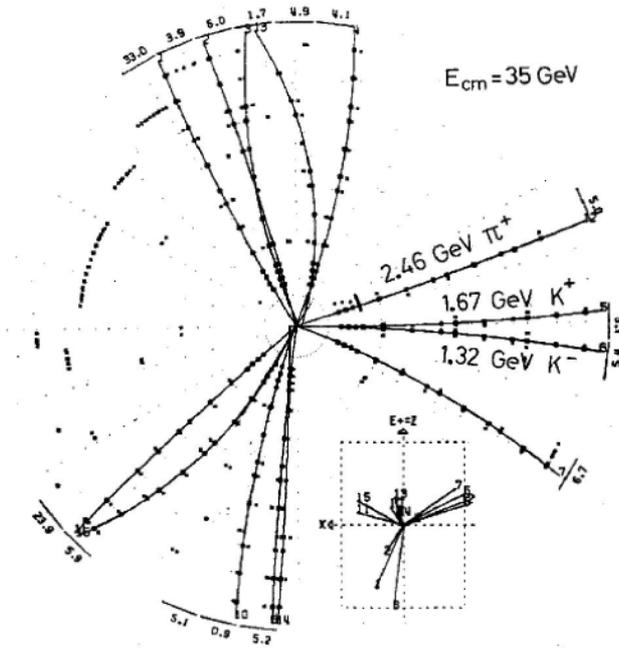


**H1 Central Jet Chamber**

**Abb. 6.16** Teilansicht der Driftkammer des H1-Experiment am HERA Beschleuniger bei DESY. Die zylinderförmige Kammer umgibt das Strahlrohr. Die Drähte sind entlang der Achse des Zylinders parallel zum Magnetfeld gespannt.

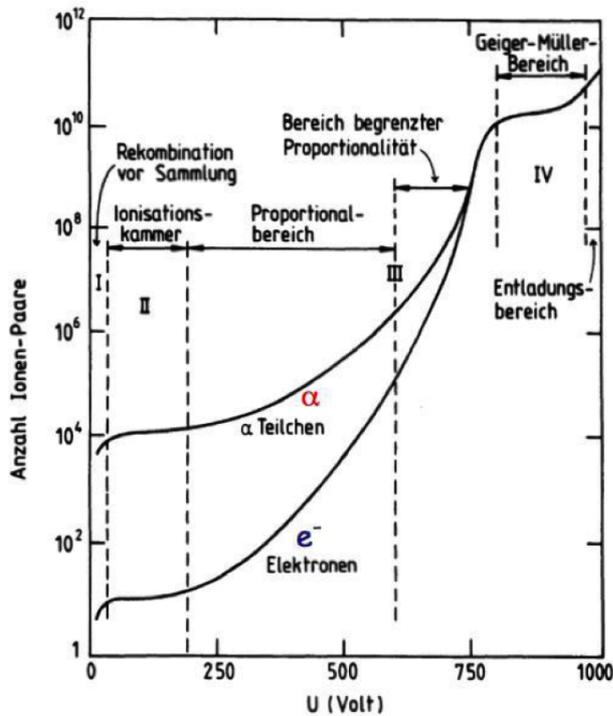


**Abb. 6.17** Innenansicht der Driftkammer des H1-Experiment am HERA Beschleuniger bei DESY.



22.9.80

**Abb. 6.18** Ereignis in der Driftkammer des JADE Experiments am PETRA Beschleuniger bei DESY. Man erkennt drei Bündel von Teilchen (Jets). Aus solchen Ereignissen wurde auf die Existenz von Gluonen geschlossen,  $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g$ .



**Abb. 6.19** Gasverstärkung als Funktion der Anodenspannung bei Gasdetektoren. Je nach Spannung am Draht unterscheidet man Ionisationskammern (ohne Gasverstärkung), Driftkammern mit nahezu linearer Gasverstärkung und Geiger-Müller-Zähler.

### 6.3 Spurdetektoren

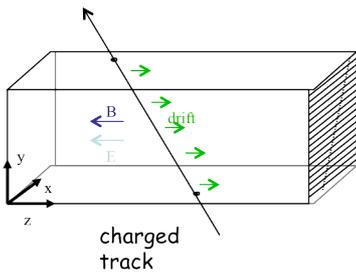


Abb. 6.20  
Schema einer TPC.

**TPC:** Ein anderes Prinzip wird bei einer "Time Projection Chamber" verfolgt. Hier wird ein starkes elektrisches Feld parallel zum Magnetfeld angelegt. Die primär erzeugten Elektronen und Ionen driften über lange Strecken zu den Enden des Gasvolumens und werden dort über Drahtverstärkung oder andere Mechanismen nachgewiesen. Hierdurch ergibt sich ein zweidimensionales Bild der Teilchenbahnen an den Enden der Kammer. Die Koordinate senkrecht dazu wird aus der Ankunftszeit der Signale an den Enden gemessen, so dass insgesamt ein dreidimensionales Bild entsteht.

### Schema der ALICE TPC (CERN)

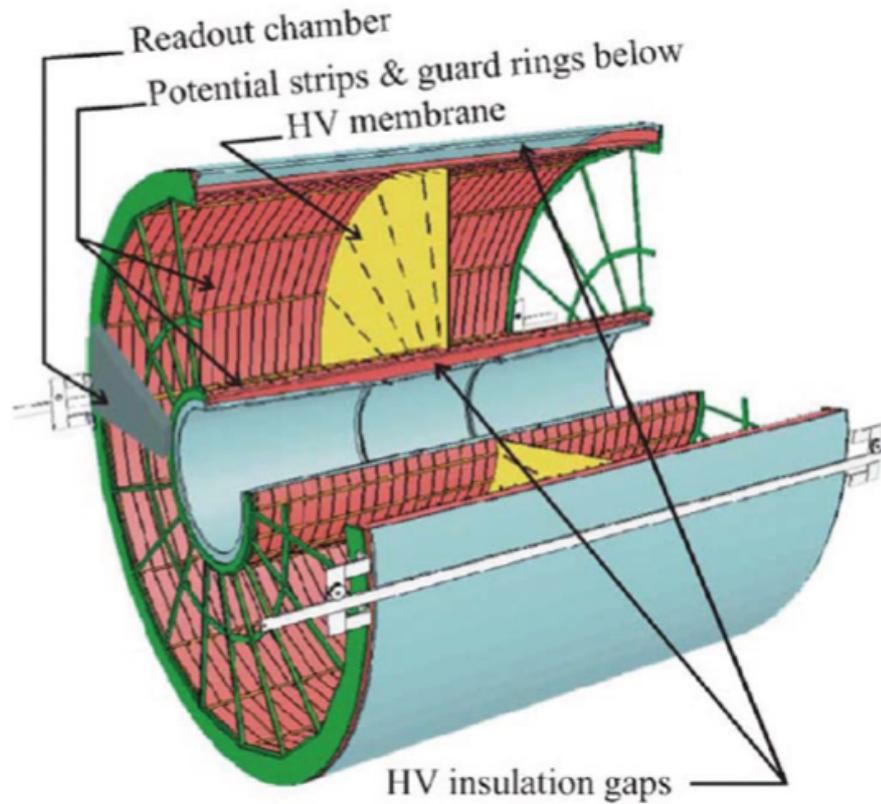


Abb. 6.21 Die TPC des ALICE Experiments am LHC am CERN.

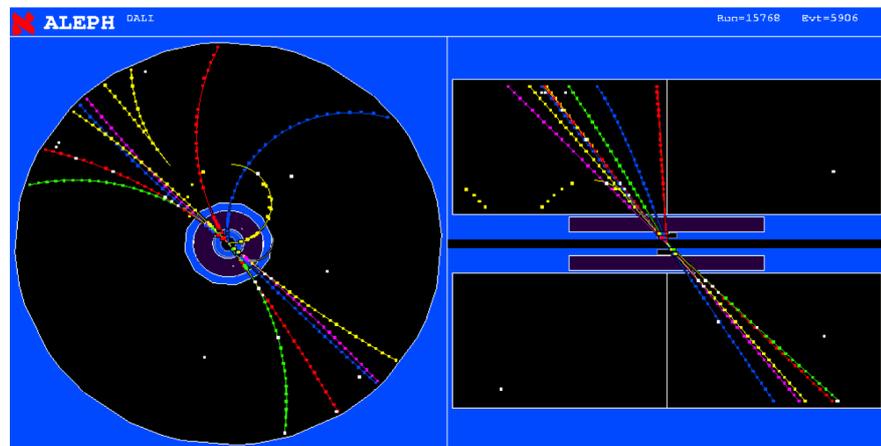
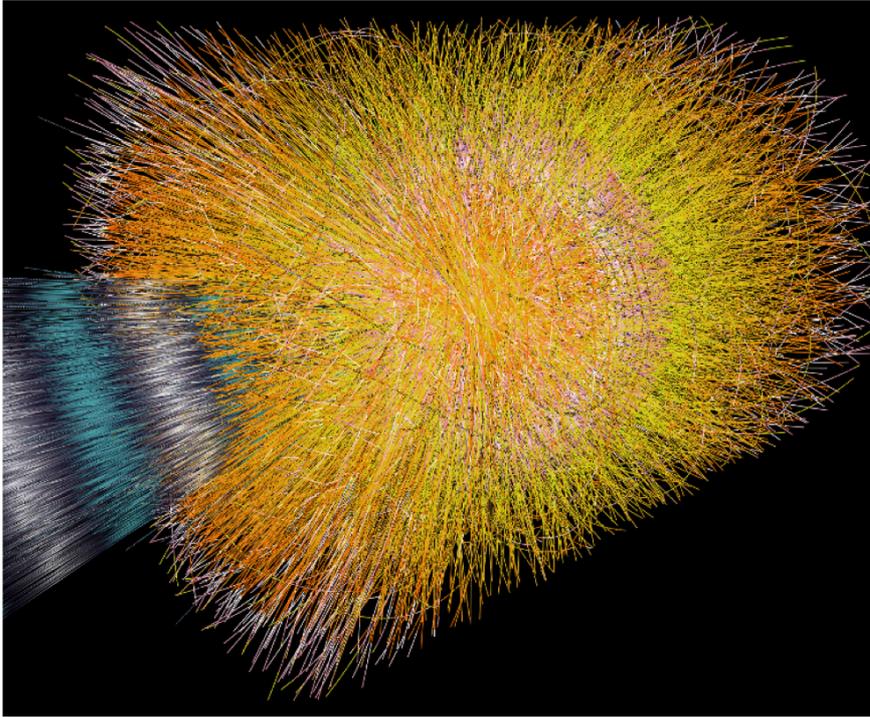


Abb. 6.22 Bild eines Ereignisses in der TPC des ALEPH Experiments am LEP Beschleuniger am CERN,  $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ .



**Abb. 6.23** Bild eines Ereignisses in der TPC des ALICE Experiments am LHC. Das Bild zeigt die Kollision zweier Gold-Kerne bei TeV Energien je Nukleon.

### 6.3.4 Halbleiter-Detektoren

Die zentrale Komponente in fast jedem modernen Detektor besteht aus dünnen Halbleitern, die an den Oberflächen durch Metallflächen fein segmentiert sind. Da in Silizium der Bandabstand nur 1.1 eV beträgt, erzeugt ein hochenergetisches Teilchen bereits im Mittel bei einem Energieverlust von  $dE/dx = 3\text{ eV}$  ein Elektron-Loch Paar. In typisch 0,3mm dicken Si-Kristallen werden daher von einem MIPS 30000 Elektron-Loch-Paare erzeugt, so dass keine weitere Ladungsverstärkung notwendig ist.

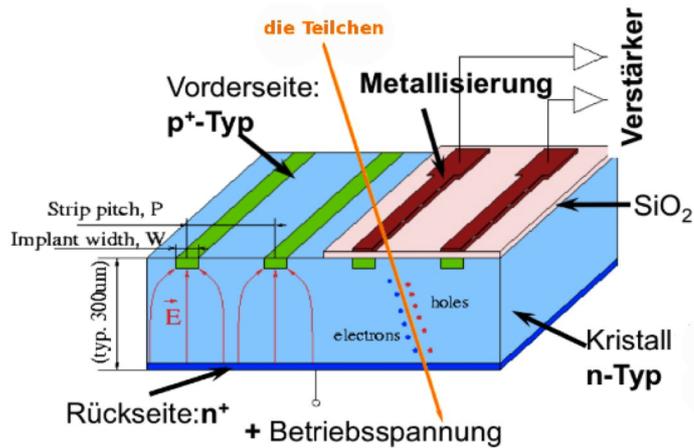


Abb. 6.24 Prinzip eines Halbleiter-Detektors.

Die Elektronen (oder Löcher) driften dann durch eine äußere Spannung zu den Metallkontakten. Da die Driftstrecken sehr klein sind, entstehen die Signale in weniger als 10 ns. Da die Metallkontakte fein segmentiert werden können, sind Ortsauflösungen im Bereich  $5\ \mu\text{m}$  möglich. Verwendet werden Streifendetektoren und Pixeldetektoren.

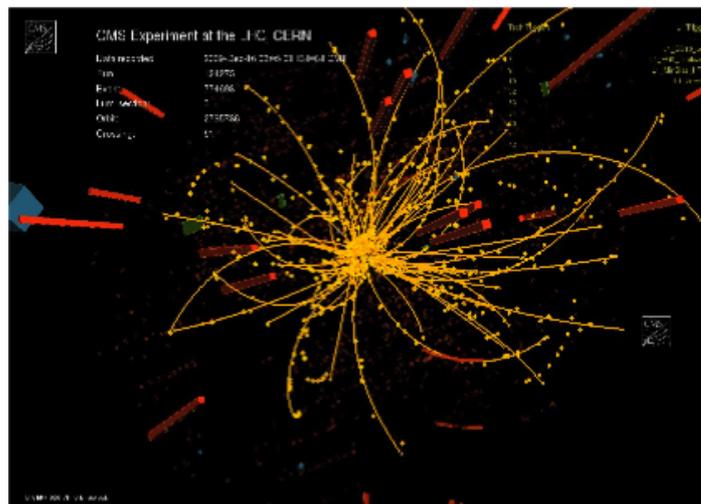


Abb. 6.25 Eines der ersten Ereignisse, das am LHC mit dem CMS Silizium-Detektor gemessen wurde.

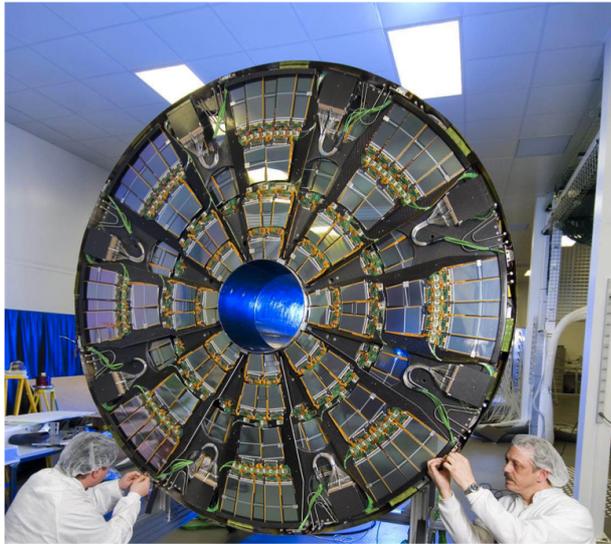


Abb. 6.26 Endkappen des CMS Streifendetektors.



Abb. 6.27 Foto des CMS Streifendetektors von innen.

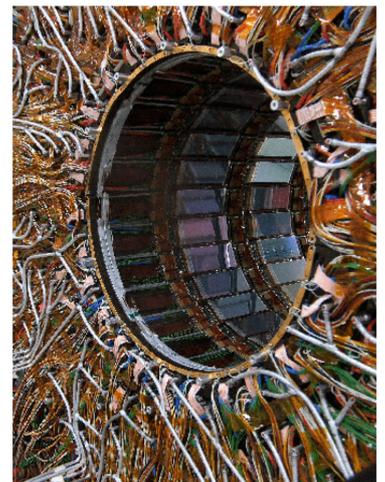


Abb. 6.28 Verkabelung des CMS Streifendetektors.

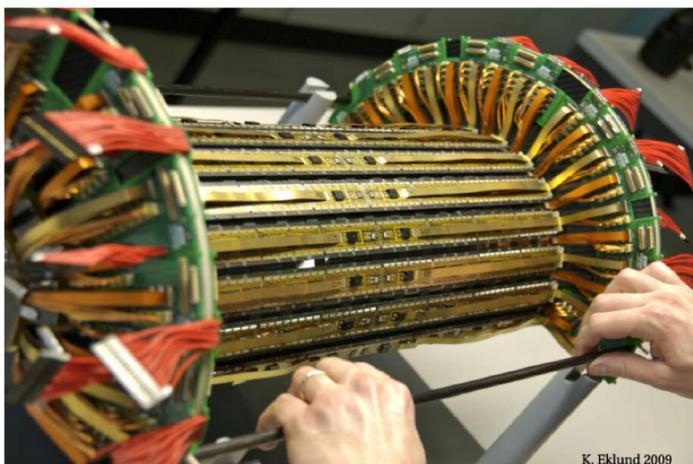


Abb. 6.29 CMS Pixel-Detektor.

## 6.4 Photonen und elektromagnetische Schauer

Photonen wechselwirken mit Atomen hauptsächlich durch Photoeffekt, Compton-Effekt oder Paarbildung.

**Photoeffekt:** Hierbei wird das Photon absorbiert und überträgt seine Energie  $E_\gamma$  in der Regel auf ein einzelnes Elektron. Ist  $E_\gamma$  größer als die Bindungsenergie, wird das Atom ionisiert.

$$\gamma e_{\text{H\u00fclle}}^- \rightarrow e_{\text{frei}}^- \quad (6.12)$$

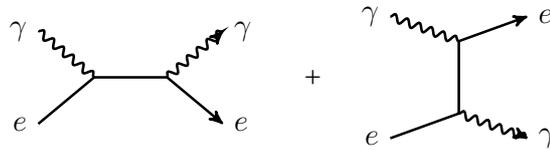
Der Wirkungsquerschnitt f\u00fcr Photoeffekt zeigt daher charakteristische Kanten in der Energieabh\u00e4ngigkeit, die die Energieniveaus des Atoms kennzeichnen. Der Wirkungsquerschnitt f\u00e4llt steil mit  $E_\gamma$  und dominiert bei kleinen  $E_\gamma$ .

$$\sigma_{\text{Photo}} \sim Z^5 E_\gamma^{-7/2} \quad \text{f\u00fcr} \quad E_\gamma \ll m_e \quad (6.13)$$

$$\sim Z^5 E_\gamma^{-1} \quad \text{f\u00fcr} \quad E_\gamma \gg m_e \quad (6.14)$$

**Compton-Effekt:** Bei h\u00f6heren Energien wird das  $\gamma$  an Elektronen gestreut,

$$\gamma + e_{\text{H\u00fclle}} \rightarrow \gamma + e_{\text{frei}} \quad (6.15)$$



**Abb. 6.30** Feynman-Diagramme f\u00fcr Compton-Effekt.

F\u00fcr hohe Energien  $E_\gamma \gg m_e$  f\u00e4llt der Wirkungsquerschnitt mit  $E_\gamma$ ,

$$\sigma_{e\gamma \rightarrow e\gamma} \approx \pi\alpha^2 \frac{1}{m_e E_\gamma} \left( \ln \frac{2E_\gamma}{m_e} + \frac{1}{2} \right) \quad (6.16)$$

**Paarerzeugung:** Hierbei erzeugen Photonen im Feld eines Kerns  $X$  ein  $e^+e^-$ -Paar,

$$\gamma + X \rightarrow e^+e^- + X \quad (6.17)$$

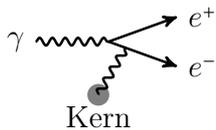
Die Mindestenergie hierf\u00fcr ist

$$E_\gamma \gtrsim 2m_e \quad (6.18)$$

Ein freies  $\gamma$  kann ohne Sto\u00dfpartner nicht in reelle  $e^+e^-$ -Paare zerfallen. Der Kern erh\u00e4lt einen R\u00fccksto\u00df. Die Paarbildung ist der dominante Effekt bei gro\u00dfen  $E_\gamma$ . F\u00fcr  $E_\gamma \gg 2m_e$  gilt

$$\sigma_{\text{Pair}} = \frac{7}{9} \frac{1}{X_0 n_k} \Rightarrow I(x) = I_0 e^{-\frac{7}{9} \frac{x}{X_0}} \quad (6.19)$$

Hierbei ist  $n_K$  die Dichte der Kerne,  $n_K = \frac{\#\text{Kerne}}{\text{Volumen}}$ . Der Wirkungsquerschnitt wird also unabh\u00e4ngig von der Photon-Energie.



**Abb. 6.31** Feynman-Diagramm f\u00fcr  $e^+e^-$ -Paarbildung im Feld eines Kerns.

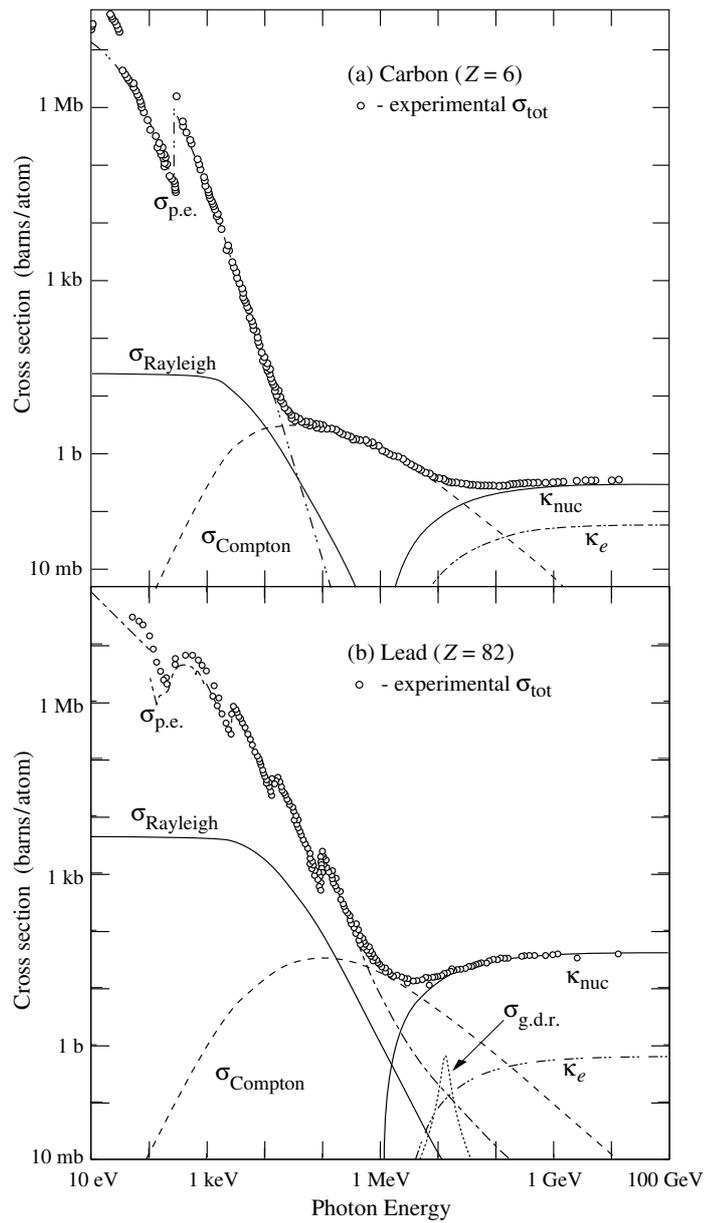


Abb. 6.32 Wirkungsquerschnitt für Photonen in Blei.

Abb. 6.32 zeigt die Beiträge für Photoeffekt, Compton-Effekt und Paarbildung als Funktion der Energie  $E_\gamma$ .

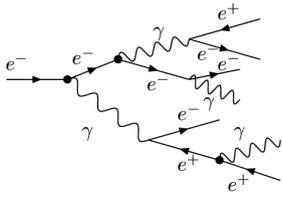


Abb. 6.33  
Elektromagnetischer Schauer.

**Elektromagnetische Schauer** Bei großen Elektronenergien  $E_e$  oder Photonenergien  $E_\gamma$  dominieren Bremsstrahlung und Paarbildung.

$$e^\pm \rightarrow e^\pm \gamma \quad \gamma \rightarrow e^+ e^- \quad (6.20)$$

Es entsteht eine Lawine neuer Teilchen, in der sich diese Prozesse jeweils abwechseln. Erst für Photonen mit  $E_\gamma < 2m_e$  entfällt die Paarbildung und Elektronen werden nur noch durch Compton- und Photoeffekt freigesetzt. Für Elektronen mit  $E_e < E_c$  wird Bremsstrahlung weniger wichtig als Ionisation, so dass bei kleinen Energien im Schauer insgesamt die Energie durch Ionisation im Detektor deponiert wird. Die typische Anzahl der  $e^\pm$  und  $\gamma$  im Schauer ist daher

$$n_{e,\gamma} \approx \text{const} \frac{E}{2m_e} \approx \frac{E}{1\text{MeV}} \quad (6.21)$$

Abb. 6.10 zeigt die Photographie eines elektromagnetischen Schauers in einer Blasenkammer.

## 6.5 Hadronische Schauer

Hadronen bestehen aus Quarks und Gluonen. Sie reagieren außer durch elektromagnetische und schwache Wechselwirkung auch durch die starke Wechselwirkung mit Atomkernen. Bei elastischen Wechselwirkungen von Hadronen mit dem Detektormaterial wie z.B.

$$p + \text{Kern} \rightarrow p + \text{Kern} \quad (6.22)$$

$$\pi^\pm + p \rightarrow \pi^\pm + p \quad (6.23)$$

wird kinetische Energie auf den Kern beziehungsweise das Proton übertragen, aber es werden keine weiteren Teilchen erzeugt. Oberhalb der Schwellenenergien zur Erzeugung neuer Teilchen überwiegen aber inelastische Reaktionen wie z.B.

$$p + p \rightarrow p + p + \pi^+ + \pi^- \quad (6.24)$$

Durch inelastische Reaktionen werden, wie in Abb. 6.34 und Abb. 6.35 gezeigt, hadronische Schauer ausgelöst. Die Schauerbildung stoppt, wenn die Schwellenenergien zur Bildung neuer Teilchen unterschritten werden (typisch im GeV Bereich). Diese Energie ist viel höher als die entsprechenden kritischen Energien bei elektromagnetischen Schauern, so dass in hadronischen Schauern nur relativ wenige zusätzliche Teilchen erzeugt werden.

In hadronischen Schauern werden häufig  $\pi^0$  Mesonen erzeugt, die nach sehr kurzer Zeit in Photonen zerfallen,  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ . Diese erzeugen wiederum durch Paarbildung  $e^+e^-$  Paare, so dass in hadronischen Schauern fast immer auch elektromagnetische Schauer vorhanden sind.

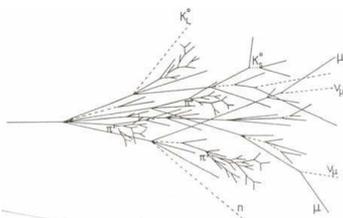


Abb. 6.34  
Skizze eines hadronischen Schauers.



Abb. 6.35  
Erzeugung eines Jets aus Hadronen in einer Blasenkammer.

Für den Wirkungsquerschnitt für Hadronen in Materialien gilt

$$\sigma = \sigma_{elastisch} + \sigma_{inelastisch} \quad (6.25)$$

Da die Reichweite der starken Wechselwirkung zwischen Hadronen und Kernen sehr klein ist, ergibt sich für die freie Weglänge

$$\lambda = \frac{1}{\sigma n_{Kern}} \quad (6.26)$$

bis zur nächsten hadronischen Wechselwirkung (die Wechselwirkungslänge) z.B für Eisen  $\lambda = 17,6$  cm. Die Strahlungslänge in Eisen zum Vergleich beträgt 1,8 cm. Hadronische Schauer bilden sich in Materialien also typisch erst viel tiefer im Material.

## 6.6 Kalorimeter

Die Energiemessung von Elektronen und Photonen erfolgt bei hohen Energien durch die Messung ihrer elektromagnetischen Schauer. Die vielen hierbei entstehenden  $e^\pm$  und Photonen deponieren gegen Ende des Schauers ihre Energie in Form von Ionisation und Anregung von Atomen. Es ist ausreichend, diese Energie in ihrer Summe zu messen, so dass relativ grob strukturierte Detektoren verwendet werden können. Günstig sind Materialien mit hoher Kernladungszahl  $Z$ .

In hadronischen Schauern werden weniger neue Teilchen erzeugt, aber auch hier gilt das Prinzip, dass sich die zu messende Energie der ursprünglichen Hadronen durch die Summe der im Detektor deponierten Energien (Ionisation, Photonen, ..) rekonstruieren lässt.

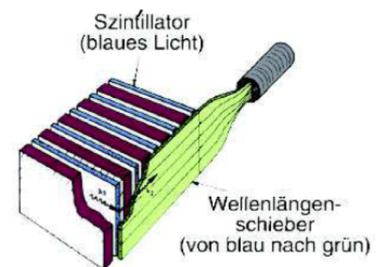
Wichtig ist in jedem Fall, dass alle Energie der Teilchen absorbiert werden muss. Hierfür werden Kalorimeter verwendet, die ausreichend hohe Dichte und Kernladungszahl haben und mehrere Meter dick sind.

Einfache Detektoren für Kalorimeter sind Szintillatoren. Diese bestehen z.B. aus Plexiglas oder anderen Materialien, in denen Anregungsenergien effizient in Form von Licht abgegeben werden. Häufig haben diese Materialien aber eine zu kleine Dichte und Kernladungszahl, so dass sie z.B. zwischen dünnen Bleiplatten als Absorber eingefügt werden. In diesen findet dann die Schauerbildung statt und die entstehenden Teilchen werden in den Szintillatorplatten gemessen. Hierbei bleibt aber immer die im Absorber deponierte Energie nicht messbar, so dass die relative Auflösung der Energiemessung für elektromagnetische Schauer ca.

$$\frac{\delta E}{E} \approx \frac{10\%}{\sqrt{E/\text{GeV}}} \quad (6.27)$$

und für hadronische Schauer

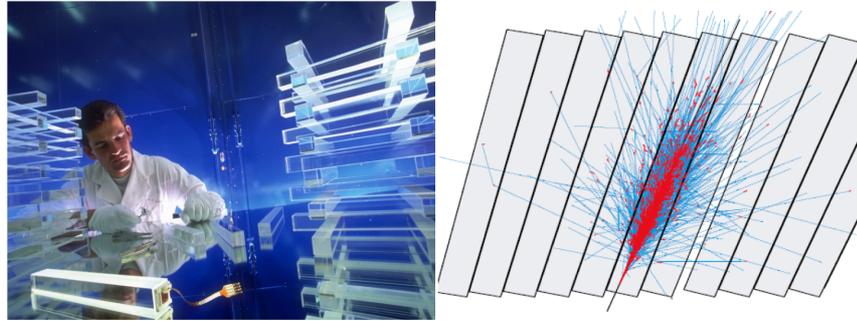
$$\frac{\delta E}{E} \approx \frac{70\%}{\sqrt{E/\text{GeV}}} \quad (6.28)$$



**Abb. 6.36**  
Schema eines Hadron-Kalorimeters mit Szintillatoren und Eisenplatten.

beträgt.

Speziell für elektromagnetische Schauer eignen sich Bleiglas oder transparente Kristalle aus schweren Elementen. Das CMS Experiment am LHC benutzt Kristalle aus  $PbWO_4$ . In ihnen ist die Dichte fast wie in Blei, so dass auch Elektronen oder Photonen mit  $10^3$  GeV Energie auf ca. 20 cm Länge komplett absorbiert werden. Die Energieauflösung beträgt etwa  $2,5\%/\sqrt{E/\text{GeV}}$ .



**Abb. 6.37** Elektromagnetisches Kalorimeter des CMS Experiments (links) und Simulation eines elektromagnetischen Schauers in mehreren Kristallen (rechts).

## 6.7 Detektorkonzepte und Identifizierung von Teilchen

Zur Energie und Impulsbestimmung stehen verschiedene Detektortypen zur Verfügung:

- Der Impuls kann für geladene Teilchen durch die Kreisbahn im Magnetfeld, also durch Spurdetektoren, bestimmt werden.
- Die Energie kann in Kalorimetern für alle langlebigen Teilchen außer Muonen und Neutrinos gemessen werden.
- Flugzeitmessungen können benutzt werden, um die Geschwindigkeit zu messen. Falls die Geschwindigkeit klein genug ist, kann hieraus direkt  $\gamma$  und  $\gamma\beta$  und damit bei bekannter Masse auch Energie und Impuls bestimmt werden.
- Cherenkov-Detektoren nutzen aus, dass Teilchen mit Geschwindigkeit  $v > n \cdot c$  in Materialien mit optischem Brechungsindex  $n$  eine charakteristische Strahlung aussenden. Auch damit können bei Teilchensorten identifiziert werden.

Im Umkehrschluß kann aus zwei dieser vier Messungen über die Beziehung

$$m^2 = E^2 - \vec{p}^2$$

auch die Masse bestimmt und damit das Teilchen identifiziert werden. Bei hohen Energien geht das allerdings nicht mehr, da die relativen Unterschiede zwischen Energie und Impuls kleiner als die

Messfehler werden, und die Masse so nicht mehr genau genug bestimmt werden kann.

Die wichtigsten Teilchen unterscheiden sich aber auch in ihrer Wechselwirkung mit Detektormaterialien.

Elektronen und Photonen erzeugen elektromagnetische Schauer, die in Materialien mit hohem  $Z$  schnell abklingen und hohe Teilchendichten haben.

Muonen dagegen machen fast keine Bremsstrahlung und keine hadronischen Wechselwirkungen und durchdringen daher auch mehrere Meter Material mit nur wenigen GeV Energieverlust.

Schwere Teilchen wie  $b$ -Quarks,  $c$ -Quarks und  $\tau$ -Leptonen haben Lebensdauern im  $c\tau \approx \text{mm}$ - Bereich und können über ihre Wegstrecke zum Zerfallsvertex identifiziert gefunden werden. Noch kurzlebige Teilchen ( $W, Z, t, H$ ) sind oft durch charakteristische Zerfallsprodukte und die Rekonstruktion ihrer Massen zu identifizieren.

Moderne Teilchendetektoren an hochenergetischen Beschleunigern machen sich diese Unterschiede zu Nutze. Sie bestehen (wie eine Zwiebel) aus mehreren Schichten von innen nach außen:

- Innen werden hochauflösende Spurdetektoren (z.B. Pixel-Detektoren) verwendet, um Zerfallslängen kurzlebiger Teilchen zu messen.
- Etwas weiter außen werden Spurdetektoren aus mehreren Lagen (Drähte oder Si-Detektoren) verwendet, um im Magnetfeld Impulse zu messen. Hierzu sind bei hohen Impulsen Teilchenbahnen mit einer Länge im Meter-Bereich notwendig. Alle diese Spurdetektoren müssen aus wenig Material mit kleiner Kernladungszahl bestehen, um möglichst Energieverluste oder gar Schauer der zu messenden Teilchen zu vermeiden, die die Impulsmessung stören würden.
- Ein elektromagnetisches Kalorimeter außerhalb des Spurkammer-Bereichs folgt weiter außen. Es muss aus Materialien mit hoher Kernladungszahl bestehen, da hierfür  $X_0 \ll \lambda_{\text{hadronisch}}$  ist. Hierdurch werden kurze elektromagnetische Schauer erzeugt, während hadronische Schauer mit großer Wahrscheinlichkeit erst später beginnen und tiefer eindringen. Dies ist das wichtigste Kriterium zu Identifizierung von Photonen und Elektronen.
- Weiter außen folgt ein hadronisches Kalorimeter mit einer Dicke von 1-2 Metern, um hadronische Schauer komplett zu absorbieren.
- Umgeben ist dieser Aufbau zumeist von einer supraleitenden Solenoid-Spule, die ein Magnetfeld von mehreren Tesla parallel zur Strahlachse erzeugt.

## 6.7 Detektorkonzepte und Identifizierung von Teilchen

- Als Rückflußjoch für das Magnetfeld dienen massive Stahlplatten weiter außen. Sie sind mit mehreren Lagen aus Driftkammern oder anderen Spurdetektoren versehen, um Muonen nachzuweisen, die als einzige Teilchensorte so viel Material durchdringen kann.

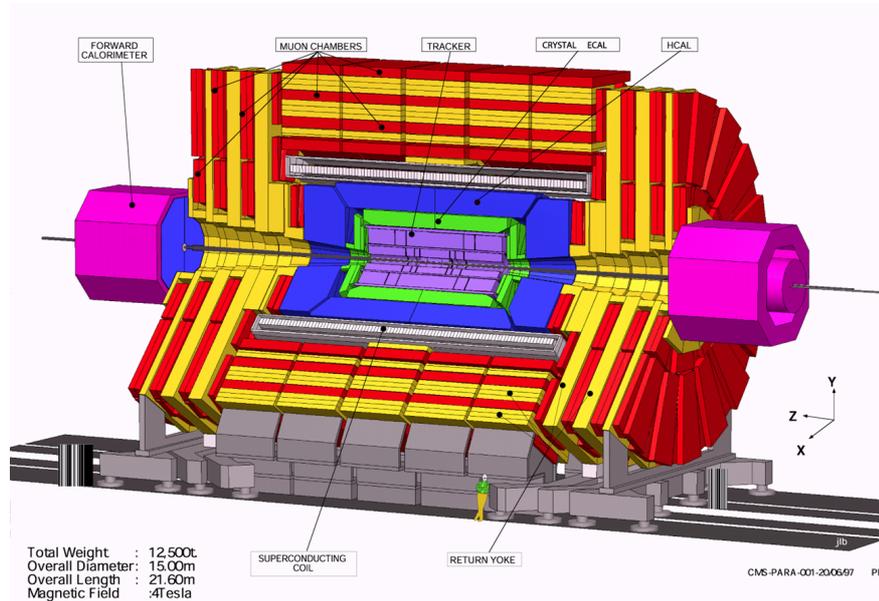


Abb. 6.38 Schnitt durch den CMS-Detektor.

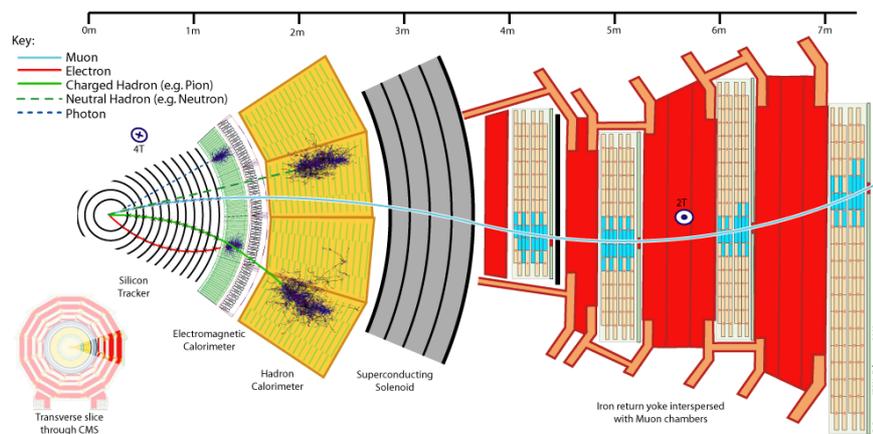


Abb. 6.39 Schnitt durch den CMS-Detektor. Zu sehen ist die Reaktion verschiedener Teilchen in den inneren Si-Detektoren, dem elektromagnetischen und hadronischen Kalorimeter sowie dem Muon-System.

# 7 Relativistische Quantenmechanik

---

7.1	Schrödinger-Gleichung . . . . .	61
7.2	Klein-Gordon-Gleichung . . . . .	62
7.3	Dirac-Gleichung . . . . .	64

---

## 7.1 Schrödinger-Gleichung

Grundlage der nicht-relativistischen Quantenmechanik sind die de-Broglie Beziehungen  $E = \hbar\omega$ ,  $\vec{P} = \hbar\vec{k}$  für Energie und Impuls eines Teilchens und dessen Kreisfrequenz und Wellenlänge. In natürlichen Einheiten ( $\hbar = 1$ ) lauten sie

$$\boxed{E = \omega \quad \vec{P} = \vec{k}} \quad (7.1)$$

Ersetzt man in der nicht-relativistischen Energie-Impuls Beziehung für freie Teilchen

$$E = \frac{\vec{P}^2}{2m} \quad (7.2)$$

Energie und Impuls durch die Operatoren

$$\boxed{E \rightarrow i\partial_t, \quad \vec{P} \rightarrow -i\nabla} \quad (7.3)$$

und wendet das Resultat auf eine Wellenfunktion  $\psi(\vec{x}, t)$  an, so folgt die Schrödinger-Gleichung für freie Teilchen,

$$i\partial_t\psi = -\frac{1}{2m}\nabla^2\psi \quad (7.4)$$

Lösungen sind ebene Wellen,

$$\psi = \psi_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{x})} = \psi_0 e^{-i(Et - \vec{P}\vec{x})} \quad (7.5)$$

Setzt man dies in die Schrödinger-Gleichung ein, so erhält man mit  $\partial_t\psi = -iE\psi$ ,  $\nabla\psi = i\vec{P}\psi$  und  $\nabla^2\psi = -\vec{P}^2\psi$  die Gleichung

$$E\psi = \frac{\vec{P}^2}{2m}\psi$$

Dies ist aufgrund der nicht-relativistischen Energie-Impuls Beziehung (Gl. 7.2) erfüllt für beliebige Zeiten und Orte.

Die Schrödingergleichung gilt aber nicht relativistisch, da Gl. 7.2 nur eine nicht-relativistische Näherung für die kinetische Energie ist. Das Problem liegt insbesondere darin, dass in der Schrödinger-Gleichung eine einfache Zeitableitung mit einer zweifachen Ortsableitung vermischt wird. Anders als in der Relativitätstheorie werden also Zeit- und Ortskoordinaten nicht gleichberechtigt behandelt.

## 7.2 Klein-Gordon-Gleichung

Um zu einer relativistischen Quantenmechanik überzugehen, werden alle wesentlichen Aspekte beibehalten:

- die Kopenhagener Deutung zur Wahrscheinlichkeit von Messergebnissen, Unschärferelation, etc.
- Wellenfunktionen als Lösungen von Bewegungsgleichungen. Insbesondere für freie Teilchen treten ebene Wellen auf,

$$\psi = \psi_0 e^{-i(Et - \vec{P}\vec{x})} \quad (7.6)$$

Insbesondere ist die Phase der ebenen Welle bereits ein Produkt zweier 4-er Vektoren und damit Lorentz-invariant,<sup>7</sup>

$$px = \begin{pmatrix} E \\ \vec{P} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} = Et - \vec{P}\vec{x} \quad (7.7)$$

- Die Energie- und Impulsoperatoren bleiben unverändert wie in Gl. 7.3.

Insgesamt ist so gewährleistet, dass sich im nicht-relativistischen Grenzfall wieder die Schrödingergleichung ergibt.

Ziel ist es, eine relativistische Verallgemeinerung der Schrödingergleichung zu finden. Jede solche Bewegungsgleichung für ein freies Teilchen muss offenbar Zeit- und Ortskoordinaten (Energie- und Impulskoordinaten) gleich behandeln, um auch relativistisch gültig zu sein. Hierfür startet man anders als bei der Schrödingergleichung von der relativistischen Energie-Impuls Beziehung

$$E^2 = \vec{P}^2 + m^2 \quad (7.8)$$

Ersetzt man Energie und Impuls durch die gleichen Operatoren wie im nicht-relativistischen Fall (Gl. 7.3) und wendet das Resultat auf eine Wellenfunktion  $\Phi(\vec{x}, t)$  an, so erhält man

$$-\partial_t^2 \Phi = -\nabla^2 \Phi + m^2 \Phi$$

Mit dem d'Alembert Operator  $\square = \partial_t^2 - \nabla^2$  erhält man die Klein-Gordon-Gleichung,

$$\boxed{(\square + m^2) \Phi = 0} \quad (7.9)$$

Sie gilt für relativistische Spin-0 Teilchen. Lösungen sind wieder ebene Wellen,

$$\Phi(x) = \Phi_0 e^{-i(Et - \vec{P}\vec{x})}$$

<sup>7</sup>Dadurch bleibt z.B. das Interferenzmuster beim Doppelspaltexperiment auch aus einem schnell bewegten System heraus beobachtet unverändert.

**Aufgabe 7.1:** Zeigen Sie, dass Einsetzen der ebenen Welle in die Klein-Gordon-Gleichung wieder die relativistische Energie-Impuls Beziehung (Gl. 7.8) liefert.

Für den speziellen Fall ohne Masse,  $m = 0$ , erinnert die Klein-Gordon-Gleichung sehr an die Bewegungsgleichung für elektromagnetische Wellen, z.B.  $\square \vec{E} = 0$ , die ja im Grunde masselose Photonen beschreibt, die sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen.

Die Wellenfunktion  $\Phi$  ist im einfachsten Fall eine einfache Funktion von Ort und Zeit und hat in diesem Sinne nur einen Freiheitsgrad. Die Klein-Gordon-Gleichung beschreibt daher Spin-0 Teilchen.

Im Folgenden wird die relativistische Schreibweise benutzt für 4-er Vektoren, und es werden 4-er Ableitungen benutzt. Für den Impuls als Beispiel soll gelten

$$p^\mu = \begin{pmatrix} E \\ \vec{P} \end{pmatrix} \quad p_\mu = \begin{pmatrix} E \\ -\vec{P} \end{pmatrix} \quad (7.10)$$

Die Einstein'sche Summenkonvention soll gelten, bei der über doppelt auftretende Indizes summiert wird, wenn sie oben und unten stehen. Damit ist das Skalarprodukt einfach

$$p^2 = p_\mu p^\mu = p^\mu p_\mu = E^2 - \vec{P}^2 \quad (7.11)$$

Analog ist  $x^\mu = (t, \vec{x})$  und  $x_\mu = (t, -\vec{x})$ . Die Phase der Wellenfunktion ist dann einfach

$$x^\mu P_\mu = x_\mu P^\mu = Et - \vec{P}\vec{x} \quad (7.12)$$

Die 4-er Ableitung ist als Verallgemeinerung des Nabla-Operators definiert,

$$\partial^\mu = \begin{pmatrix} \partial_t \\ -\vec{\nabla} \end{pmatrix} \quad \partial_\mu = \begin{pmatrix} \partial_t \\ \vec{\nabla} \end{pmatrix} \quad (7.13)$$

Die Vorzeichenkonvention vor  $\nabla$  ist so gewählt, dass der 4-er Impulsoperator mit  $(E = i\partial_t, \vec{P} = -i\vec{\nabla})$  einfach geschrieben werden kann als

$$p^\mu = i\partial^\mu \quad p_\mu = i\partial_\mu \quad (7.14)$$

Damit ist dann der d'Alembert-Operator gleich

$$\square = \partial_t^2 - \nabla^2 = \partial_\mu \partial^\mu \quad (7.15)$$

und die Klein-Gordon Gleichung

$$\boxed{(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \Phi = 0} \quad (7.16)$$

Diese Notation wird bei der Dirac-Gleichung sehr nützlich werden.

## 7.3 Dirac-Gleichung

In relativistischen Wellengleichungen können Ort- und Zeitableitungen nur gleichberechtigt auftreten. Während die Klein-Gordon Gleichung quadratisch in den Ableitungen ist, hat Paul Dirac bereits 1928 eine Gleichung postuliert, die linear in den Ableitungen (und damit den 4-er Impulsoperator und der Masse  $m$ ) ist,

$$(i \gamma^0 \partial_t + i \vec{\gamma} \nabla - m) \psi = 0 \quad (7.17)$$

oder mit der 4-er-Ableitung

$$\boxed{(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0} \quad (7.18)$$

Hierbei sind die vier Komponenten von

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} \gamma^0 \\ \vec{\gamma} \end{pmatrix} \quad (7.19)$$

zunächst unbekannt mathematische Objekte. Da in natürlichen Einheiten sowohl die Masse  $m$  als auch die Ableitungen die Dimension einer Energie (eV) haben, folgt, dass die Faktoren  $\gamma^0, \vec{\gamma}$  keine Dimension haben und daher Konstanten sind.

Mathematisch findet man, dass diese Gleichung tatsächlich nur dann für ebene Wellen zur relativistischen Beziehung  $E^2 = m^2 + \vec{P}^2$  führt, wenn jeder der vier Faktoren  $\gamma^0$  und  $\gamma_i$  nicht einfach eine Zahl ist.

Im Folgenden soll gezeigt werden:

- Für vier Raum-Zeit-Dimensionen folgt, dass jede der vier  $\gamma$ -Matrizen eine 4x4 Matrix und  $\psi$  ein 4-komponentiger "Spinor" sein muss.
- Die Gleichung sagt Spin- $\frac{1}{2}$  Teilchen voraus.
- Die entsprechende Gleichung mit elektromagnetischer Wechselwirkung zeigt, dass jeweils zwei der Lösungen zu unterschiedlichen Vorzeichen der elektrischen Ladungen gehören müssen. Die Dirac-Gleichung sagt daher Teilchen und Anti-Teilchen voraus.

Dieser fundamentalen Vorhersage von Paul Dirac (1928, Nobelpreis 1933) folgte Jahre später die Entdeckung des Anti-Elektrons durch C.D. Anderson (1932, Nobelpreis 1936).

Experimentell findet man, dass z.B. Elektronen und Anti-Elektronen die gleiche Masse  $m$  haben. Außerdem haben beide Teilchen als Spin  $1/2$  Fermionen zwei Polarisationsrichtungen. Insgesamt beschreibt daher die Dirac-Gleichung korrekt alle 4 Freiheitsgrade.

Eine detaillierte Diskussion der Dirac-Gleichung wird erst in Vorlesungen zur fortgeschrittenen Teilchenphysik erfolgen. Im Folgenden werden nur die grundsätzlichen Eigenschaften besprochen.



**Abb. 7.1**  
Paul Dirac  
(Quelle: Wikipedia).

### 7.3.1 Algebra und Hamilton

Die Dirac-Gleichung soll für ebene Wellen die relativistische Energie-Impulsbeziehung  $E^2 - \vec{P}^2 - m^2 = 0$  und damit auch die Klein-Gordon Gleichung erfüllen.

Wendet man  $-(i\gamma^\nu \partial_\nu + m)$  von links auf die Dirac-Gleichung an, so erhält man

$$(\gamma^\nu \partial_\nu \gamma^\mu \partial_\mu + m^2)\psi = (\gamma^\nu \gamma^\mu \partial_\nu \partial_\mu + m^2)\psi = 0 \quad (7.20)$$

Vertauschung der Summationsindizes  $\mu \leftrightarrow \nu$  ergibt  $(\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu + m^2)\psi = 0$ . Addiert man beide Gleichungen so erhält man

$$\left(\frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) \partial_\mu \partial_\nu + m^2\right)\psi = 0 \quad (7.21)$$

Dies ist genau dann die Klein-Gordon Gleichung  $(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\psi = 0$ , wenn die Klammer mit den  $\gamma$ -Matrizen gleich 2 ist für  $\mu = \nu = 0$ , gleich  $-2$  ist für  $\mu = \nu = 1, 2$  oder 3, und gleich 0 ist für alle anderen Fälle. Dies lässt sich schreiben als

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \cdot I_4 \quad \text{mit} \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad (7.22)$$

mit der  $4 \times 4$  Einheitsmatrix  $I_4$ , oder kurz als Anti-Kommutator,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (7.23)$$

Diese Clifford-Algebra ist eine notwendige Bedingung für Lorentz-Invarianz. Aus ihr folgt insbesondere (mit  $i = 1, 2, 3$ )

$$(\gamma^0)^2 = 1, \quad (\gamma^i)^2 = -1 \quad \gamma^0 \gamma^i = -\gamma^i \gamma^0 \quad (7.24)$$

Multipliziert man die Dirac-Gleichung  $(i\gamma^0 \partial_t + i\vec{\gamma} \vec{\nabla} - m)\psi = 0$  von links mit  $\gamma^0$  und benutzt  $(\gamma^0)^2 = 1$ , so folgt

$$i\partial_t \psi = H\psi = -i\gamma^0 \vec{\gamma} \vec{\nabla} \psi + m\gamma^0 \psi \quad (7.25)$$

Der Hamiltonoperator der Dirac-Gleichung ist also

$$H = \gamma^0 \vec{\gamma} \vec{P} + m\gamma^0 \quad (7.26)$$

### 7.3.2 Bestimmung der $\gamma$ -Matrizen

Wegen den Antikommutator-Beziehungen in Gl. 7.23 sind die  $\gamma^\mu$  keine einfachen Zahlen. Dirac hatte die Idee, vier verschiedene  $n \times n$  Matrizen anzusetzen. Wiederum aus Gl. 7.23 folgt dann für die Spur (Tr)<sup>8</sup> und die Hermitizität<sup>9</sup> der Matrizen

$$Tr(\gamma^\mu) = 0 \quad (\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 \quad (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i \quad (7.27)$$

<sup>8</sup> Für  $\mu \neq 0$  gilt z.B.  $\gamma^\mu \gamma^0 = -\gamma^0 \gamma^\mu$  und damit  $\gamma^\mu = -\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$  sowie  $Tr(\gamma^\mu) = -Tr(\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0) = -Tr(\gamma^0 \gamma^0 \gamma^\mu) = -Tr(\gamma^\mu)$ , so dass  $Tr(\gamma^\mu) = 0$ . Hier wurde benutzt, dass man die Reihenfolge der Matrizen unter einer Spur zyklisch vertauscht werden darf,  $Tr(AB) = Tr(BA)$ .

<sup>9</sup> Da der Hamiltonoperator  $H$  in Gl. 7.26 links hermitesch sein muss, sind auch die Matrizen rechts hermitesch, also  $\gamma^0 = (\gamma^0)^\dagger$  und  $\gamma^0 \gamma^i = (\gamma^0 \gamma^i)^\dagger = (\gamma^i)^\dagger (\gamma^0)^\dagger$ . Multipliziert man die letztere Gleichung von links mit  $\gamma^0$  und benutzt  $(\gamma^0)^2 = 1$ , folgt außerdem  $\gamma^i = \gamma^0 (\gamma^i)^\dagger \gamma^0 = -(\gamma^i)^\dagger \gamma^0 \gamma^0 = -(\gamma^i)^\dagger$ .

### Forderung nach relativistischer Invarianz

### Clifford-Algebra

Man kann zeigen, dass für  $n = 2, 3, 5, 7, \dots$  keine Matrizen diese Kriterien erfüllen.

- $n = 2$ : Die drei Pauli-Matrizen  $\sigma_i$  bilden bereits einen vollständigen Satz von spurlosen, antikommutierenden  $2 \times 2$  Matrizen. Für  $\gamma^i = \sigma^i$  müsste sich  $\gamma^0$  damit als eine Linearkombination der Pauli-Matrizen und der  $I_2$  ausdrücken lassen. Eine solche Matrix antikommutiert aber nicht mit den Pauli-Matrizen. Daher kann für  $n = 2$  die Clifford-Algebra Gl. 7.23 nicht erfüllt sein.
- $n = 3, 5, \dots$  (ungerade): Da  $\gamma^0$  hermitesch und  $(\gamma^0)^2 = 1$  ist, sind die Eigenwerte von  $\gamma^0$  gleich  $\pm 1$ . Wegen  $Tr(\gamma^0) = 0$  müssen gleich viele Eigenwerte mit  $+1$  wie mit  $-1$  auftreten, so dass nur eine gerade Anzahl von Eigenwerten möglich ist. Damit ist  $n$  gerade.

Die kleinste mögliche Dimension der  $\gamma$ -Matrizen ist also  $4 \times 4$ . Damit ist die Dirac-Gleichung zu lesen als

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m I_4)\psi = 0_4$$

Hier ist  $\psi$  ein vier-komponentiger Spinor,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad (7.28)$$

der vier verschiedene Freiheitsgrade beschreibt, die jeweils die Klein-Gordon Gleichung erfüllen.

Es gibt verschiedene explizite Darstellungen der  $\gamma$ -Matrizen, die die Clifford-Algebra erfüllt. In der Regel benutzt man dafür die standard Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \quad (7.29)$$

um die  $4 \times 4$  Matrizen in etwas übersichtlicherer  $2 \times 2$  Form zu schreiben. Im Folgenden wird die sog. Weyl-Darstellung benutzt,

$$\boxed{\gamma^0 = \begin{pmatrix} & I \\ I & \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} & \sigma_i \\ -\sigma_i & \end{pmatrix} \quad \text{für } i = 1, 2, 3} \quad (7.30)$$

Hier ist  $I$  die  $2 \times 2$  Einheitsmatrix. Man kann leicht nachprüfen, dass diese Matrizen die Clifford-Algebra erfüllen. Setzt man hier die Pauli-Matrizen ein, so ergeben sich die  $4 \times 4$  Gamma-Matrizen

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.31)$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.32)$$

In dieser Weyl-Notation lautet die Dirac-Gleichung

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = \begin{pmatrix} -m & i\partial_t + i\vec{\sigma}\vec{\nabla} \\ i\partial_t - i\vec{\sigma}\vec{\nabla} & -m \end{pmatrix} \psi = 0 \quad (7.33)$$

### 7.3.3 Drehimpuls und Spin

Für ein abgeschlossenes System wie ein einzelnes Dirac-Teilchen muss der Gesamtdrehimpuls erhalten sein und daher mit dem Hamilton-Operator

$$H = \gamma^0 \gamma^i P^i + m\gamma^0 \quad (7.34)$$

aus Gl. 7.26 kommutieren. Für den Operator des Bahn-Drehimpulses definiert als

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} \quad (7.35)$$

findet man jedoch<sup>10</sup>

$$[H, \vec{L}] = \gamma^0 \gamma^i [P^i, \vec{r} \times \vec{P}] + m[\gamma^0, \vec{r} \times \vec{P}] \quad (7.36)$$

$$= -i\gamma^0 \vec{\gamma} \times \vec{P} \quad (7.37)$$

Es muss also außer dem Bahndrehimpuls einen weiteren Beitrag zum Gesamtdrehimpuls geben, der Eigendrehimpuls oder *Spin*  $\vec{S}$  genannt wird. Einen ganz ähnlichen Ausdruck wie für  $[H, L_i]$  findet man für eine Matrix, die nicht vom Impuls oder Bahndrehimpuls abhängt und daher ein Eigendrehimpuls sein kann,

$$S_i = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_i & \\ & \sigma_i \end{pmatrix} \quad \vec{S} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & \\ & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad (7.38)$$

denn<sup>11</sup>

$$[H, \vec{S}] = i\gamma^0 \vec{\gamma} \times \vec{P} \quad (7.39)$$

Damit folgt, dass für genau diese Wahl des Spinoperators, einschließlich des Faktors 1/2, der Gesamtdrehimpuls  $\vec{J}$

$$\boxed{\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}} \quad (7.40)$$

mit dem Hamilton-Operator kommutiert,  $[H, \vec{J}] = 0$ .

<sup>10</sup>Die  $\gamma$ -Matrizen wirken im Spinorraum, der nichts mit dem Orts- oder Impulsvektorraum zu tun hat. Sie kommutieren daher mit den Operatoren  $\vec{r}$  und  $\vec{P}$ . Daher ist z.B.

$$[\gamma^0 \gamma^i P^i, \vec{r} \times \vec{P}] = \gamma^0 \gamma^i [P^i, \vec{r} \times \vec{P}]$$

und

$$\begin{aligned} \gamma^i [P^i, \epsilon_{klm} x^l P^m] &= \gamma^i \epsilon_{klm} (x^l [P^i, P^m] + [P^i, x^l] P^m) \\ &= -i\gamma^i \epsilon_{klm} \delta_{il} P^m = -i\vec{\gamma} \times \vec{P} \end{aligned}$$

<sup>11</sup>  $[H, \vec{S}]$  beinhaltet Ausdrücke wie  $[\gamma^0 \gamma^i P^i, S_j]$ . Gleichung 7.39 folgt daher aus

$$[\gamma^0 \gamma^i, S_j] = \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} -\sigma_i & \\ & \sigma_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_j & \\ & \sigma_j \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -[\sigma_i, \sigma_j] & \\ & [\sigma_i, \sigma_j] \end{pmatrix} = i\epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma_k & \\ & \sigma_k \end{pmatrix} = i\epsilon_{ijk} \gamma^0 \gamma^k$$

### 7.3.4 Lösungen der Dirac-Gleichung

Für ein freies Teilchen wird eine ebene Welle

$$\psi = u(P) \cdot e^{-i(Et - \vec{P}\vec{x})} \quad (7.41)$$

als Lösung erwartet. Hierfür gilt

$$i\partial_\mu \psi = p_\mu \psi \quad (7.42)$$

Für den Spinor  $u$ , der unabhängig von Ort und Zeit ist, gilt damit

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) u = 0 \quad (7.43)$$

In der Weyl-Darstellung und mit dem Ansatz

$$u = \begin{pmatrix} u_L \\ u_R \end{pmatrix} \quad (7.44)$$

lautet diese Gleichung in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} -m & E - \vec{\sigma}\vec{P} \\ E + \vec{\sigma}\vec{P} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_L \\ u_R \end{pmatrix} = 0 \quad (7.45)$$

Dies ist allgemein eine gekoppelte Matrix für die Komponenten  $u_L$  und  $u_R$ . Hier wie auch im Folgenden wurden Einheitsmatrizen  $I$  weggelassen, um die Notation zu vereinfachen. Wir verzichten hier auf die Herleitung einer allgemeinen Lösung sondern betrachten lediglich einige Grenzfälle, um die Bedeutung der einzelnen Komponenten von  $u$  zu verstehen.

**Ruhesystem** Betrachtet wird ein Teilchen in seinem eigenen Ruhesystem, d.h.  $\vec{P} = 0$  und  $E = m$ , so dass

$$\begin{pmatrix} -m & m \\ m & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_L \\ u_R \end{pmatrix} = 0 \quad (7.46)$$

Hieraus folgt sofort  $u_L = u_R$ . Lösungen der Dirac-Gleichung sind also zum Beispiel

$$u^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7.47)$$

Wendet man nun die  $z$ -Komponente des Spin-Operators an, so findet man wegen

$$S_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad (7.48)$$

**Spin**  $\frac{1}{2}$

auch das

$$S_z u^{(1)} = \frac{1}{2} u^{(1)} \quad S_z u^{(2)} = -\frac{1}{2} u^{(2)} \quad (7.49)$$

Da der Spin-Operator nicht frei wählbar ist folgt, dass Teilchen, die der Dirac-Gleichung folgen, Spin-1/2 haben.

**Helizität** Allgemein kann man nun einen Lorentz-Boost für Spinoren formulieren, mit dem die Lösungen für Spinoren mit beliebigen Geschwindigkeiten abgeleitet werden können. Diese Spinoren sind im Allgemeinen keine Eigenzustände des Spin-Operators. Für Teilchen, die sich in  $+z$ -Richtung bewegen, sind die Spinoren jedoch Eigenzustände von  $S_z$ . Es wird daher der Helizitätsoperator definiert,

$$\lambda = \frac{\vec{S} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} = \frac{1}{2|\vec{p}|} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \vec{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \vec{p} \end{pmatrix}$$

der die Spin-Komponente parallel zum Impuls  $\vec{p}$  für beliebige Impulsrichtungen beschreibt. Helizität ist bedeutsam, weil der Spin zur Drehimpulserhaltung beiträgt.

**Ultra-Relativistisch** Hier beschränken wir uns darauf, den ultrarelativistischen Grenzfall zu betrachten. Im Limes  $E \gg m$  beziehungsweise für masselose Teilchen,  $m = 0$ , entkoppeln die Gleichungen für  $u_L$  und  $u_R$  und es gilt

$$(E + \vec{\sigma} \vec{P}) u_L = 0 \quad (E - \vec{\sigma} \vec{P}) u_R = 0 \quad (7.50)$$

Für ein Teilchen, das sich in  $z$ -Richtung bewegt, bleibt nur  $\sigma_z$  übrig und man erhält wegen  $E = |\vec{P}|$  sofort

$$(1 + \sigma_z) u_L = 0 \quad (1 - \sigma_z) u_R = 0 \quad (7.51)$$

Ein Teilchen mit sehr großem Impuls kann also komplett rechtshändig oder komplett linkshändig sein.

### 7.3.5 Antimaterie

Bisher haben wir gesehen, dass die Dirac-Spinoren Teilchen mit zwei verschiedenen Spin-Richtungen beschreiben. Die Dirac-Spinoren haben aber nicht zwei Komponenten sondern vier. Es stellt sich also die Frage, welche Zustände sich hinter den anderen beiden Freiheitsgraden verbergen.

Wir betrachten dazu die Dirac-Gleichung einschliesslich Elektromagnetismus. Dazu nehmen wir an, dass genau wie bei der Schrödinger-Gleichung das Prinzip der 'Minimalen Kopplung' gilt, d.h., dass der Impulsoperator erweitert wird um ein Vektorfeld. Allerdings geschieht das hier direkt für den 4-er Impuls. Das 4-er Vektorfeld  $A$  werden wir später mit den elektromagnetischen Potentialen identifizieren,  $A = (\varphi, \vec{A})$ . Dieses Prinzip werden wir später aus der Eichtheorie des Elektromagnetismus explizit ableiten.

Wir ersetzen also die Dirac-Gleichung  $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$  durch

$$[i\gamma^\mu (\partial_\mu + iqA_\mu) - m] \psi = 0 \quad (7.52)$$

Eine Lösung hierzu findet man, wenn man die Dirac-Gleichung komplex konjugiert, so dass  $i\partial_t$  und  $P = -i\nabla$  sowie  $\gamma^2$  ihr Vorzeichen relativ zum Massenterm ändern. Um zu verhindern, dass  $\gamma^2$  und damit die Impulskomponente  $P_2$  eine Sonderrolle einnehmen, muss

**Helizität von Fermionen:**

$\lambda = +\frac{1}{2} \Rightarrow \vec{S}$  parallel  $\vec{P}$

$\lambda = -\frac{1}{2} \Rightarrow \vec{S}$  antiparallel  $\vec{P}$

Chiralität (= Händigkeit)

### 7.3 Dirac-Gleichung

anschliessend von links mit  $\gamma^2$  multipliziert werden, und dann  $\gamma^2$  nach rechts durchgeschoben werden.

Insgesamt ergibt sich ein relatives Minuszeichen zwischen  $\partial_\mu$  und  $iqA_\mu$ . Daher folgt für

$$\psi_c = i\gamma^2\psi^* \quad (7.53)$$

die Gleichung

$$[i\gamma^\mu(\partial_\mu - iqA_\mu) - m] \psi_c = 0 \quad (7.54)$$

Die Bewegungsgleichung für die Lösungen  $\psi$  und  $\psi_c$  unterscheiden sich also gerade um das Vorzeichen des Terms mit der Ladung  $q$ . Dies gilt für alle Ladungen aller Eichwechselwirkungen. Daher werden die Lösungen  $\psi$  als Felder der Teilchen und die Lösungen  $\psi_c$  als Felder der zugehörigen Antiteilchen bezeichnet. Teilchen und zugehörige Antiteilchen haben die gleiche Masse  $m$  und unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen der Ladungen.

#### Anti-Teilchen

# 8 Streuprozesse und Zerfälle in der Quantenmechanik

---

8.1	Fermi's Goldene Regel . . . . .	71
8.2	Fermi's Regel im Schwerpunktsystem . . . . .	73
8.3	Zerfallsgesetz . . . . .	75
8.4	Breit-Wigner Verteilung und virtuelle Teilchen . . . . .	77

---

## 8.1 Fermi's Goldene Regel

Gegeben sei ein Problem mit Hamiltonoperator

$$H = H_0 + V(|\vec{r}|) \quad (8.1)$$

wobei  $H_0$  der Hamilton-Operator für ein freies Teilchen ist und das Streupotential  $V$  zeitunabhängig und radialsymmetrisch sein soll. Im Fall der Streuung eines elektrisch geladenen Teilchens ist  $V$  das Coulomb-Potential des Streuzentrums.

Ohne äußeres Potential,  $V = 0$ , also für ein freies Teilchen, seien die zeitunabhängigen Teile der Lösungen  $|u_n\rangle$ , so dass

$$H_0 |u_n\rangle = E_n |u_n\rangle \quad \langle u_m | u_n \rangle = \delta_{mn} \quad (8.2)$$

Gesucht wird die Lösung der Schrödinger-Gleichung

$$i \partial_t |\Psi\rangle = (H_0 + V) |\Psi\rangle \quad (8.3)$$

Man kann  $|\Psi\rangle$  als Entwicklung nach ungestörten Eigenfunktionen ansetzen,

$$|\Psi\rangle = \sum_n c_n(t) |u_n\rangle e^{-iE_n t} \quad (8.4)$$

so dass  $|c_n(t)|^2$  die Wahrscheinlichkeit angibt, das Teilchen zum Zeitpunkt  $t$  im Zustand  $n$  mit Energie  $E_n$  anzutreffen. Aus der Schrödinger-Gleichung folgt dann (Produktregel)

$$i \sum_n \dot{c}_n |u_n\rangle e^{-iE_n t} + \sum_n E_n c_n |u_n\rangle e^{-iE_n t} = \sum_n c_n (H_0 + V) |u_n\rangle e^{-iE_n t}$$

mit  $\partial_t c_n = \dot{c}_n$ . Wegen Gleichung 8.2 fallen zwei der vier Terme weg und es folgt

$$i \sum_n \dot{c}_n |u_n\rangle e^{-iE_n t} = \sum_n c_n V |u_n\rangle e^{-iE_n t} \quad (8.5)$$

Durch Multiplikation von links mit  $\langle u_m |$  erhält man

$$i \dot{c}_m = \sum_n \langle u_m | V | u_n \rangle c_n e^{i(E_m - E_n)t} \quad (8.6)$$

Mit dem Matrixelement

$$\boxed{\mathcal{M}_{mn} = \langle u_m | V | u_n \rangle} \quad (8.7)$$

ist also

$$i \dot{c}_m = \sum_n \mathcal{M}_{mn} c_n e^{i(E_m - E_n)t} \quad (8.8)$$

### Wechselwirkungsbild der Quantenmechanik

In diesem sog. Wechselwirkungsbild der Quantenmechanik entsprechen diese Gleichungen der Schrödinger-Gleichung. Die Zeitentwicklung ist für ein statisches Potential völlig in den  $c_n(t)$  enthalten.

Dieses System gekoppelter Differentialgleichungen wird in der sogenannten Born'schen Näherung gelöst. Betrachtet wird die Streuung im Zeitintervall  $-T \leq t \leq T$ . Im Anfangszustand ( $t = -T$ ) soll das Teilchen in einem bestimmten Zustand  $i$  sein, so dass

$$c_i(t = -T) = 1 \quad c_j(t = -T) = 0 \quad \text{für } j \neq i \quad (8.9)$$

### Born'sche Näherung

Es wird angenommen, dass die Störung durch das Potential so klein ist, dass der Anfangszustand nur wenig entvölkert und andere Zustände nur wenig bevölkert werden, so dass

$$c_i(t > -T) \approx 1 \quad c_j(t > -T) \approx 0 \quad \text{für } j \neq i \quad (8.10)$$

Insgesamt entspricht dies der Näherung, dass eine ebene Welle in die Reaktion einläuft und nur ein einzelnes Teilchen (Photon) ausgetauscht wird. In dieser Näherung folgt

$$i \dot{c}_m = \mathcal{M}_{mi} e^{i(E_m - E_i)t} \quad (8.11)$$

Bei konstanter Störung ergibt die Integration (für  $m \neq i$ , d.h. für gestreute Zustände)

$$i c_m(T) = \mathcal{M}_{mi} \int_{-T}^{+T} dt e^{i(E_m - E_i)t} \quad (8.12)$$

$$= \mathcal{M}_{mi} \frac{1}{i(E_m - E_i)} (e^{i(E_m - E_i)T} - e^{-i(E_m - E_i)T}) \quad (8.13)$$

$$= \mathcal{M}_{mi} \frac{2i \sin((E_m - E_i)T)}{i(E_m - E_i)} \quad (8.14)$$

Aus dieser Amplitude für den Übergang von  $i$  nach  $m$  folgt für die Wahrscheinlichkeit  $P_{mi}$ , das System zur Zeit  $T$  im Zustand  $m$  zu finden,

$$P_{mi} = |c_m|^2 = 4 |\mathcal{M}_{mi}|^2 \frac{\sin^2((E_m - E_i)T)}{(E_m - E_i)^2} \quad (8.15)$$

Für die gesamte Übergangswahrscheinlichkeit bis  $t = T$  muss

$$P(T) = \sum_m P_{mi} = 4 \sum_m |\mathcal{M}_{mi}|^2 \frac{\sin^2((E_m - E_i)T)}{(E_m - E_i)^2} \quad (8.16)$$

berechnet werden. Diese Summe betrifft alle internen Freiheitsgrade im Endzustand wie Spin, Farbe und die Impulszustände für die jeweilige Energie. In Streuprozessen sind kontinuierliche Werte der Energien möglich, so dass zu einem Integral über die Energie übergegangen werden muss. Ist  $\varrho(E_m)$  die Dichte der Endzustände in einem Energieintervall  $dE_m$ , so ist

$$P(T) = \int dE_m \varrho(E_m) P_{mi} \quad (8.17)$$

$$= 4 \int dE_m |\mathcal{M}_{mi}|^2 \varrho(E_m) \frac{\sin^2((E_m - E_i)T)}{(E_m - E_i)^2} \quad (8.18)$$

Der Faktor  $\varrho(E)$  wird "Phasenraumfaktor" genannt. Für unendlich große Zeiten  $T$  wird das relevante Energieintervall  $dE_m$  beliebig klein. Dies entspricht der Unschärferelation und für lange Zeiten der Energieerhaltung zwischen Anfangszustand und Endzustand. Daher kann  $\mathcal{M}_{mi}$  und  $\varrho(E_m)$  über die Breite des Intervalls als konstant gesetzt werden. Für einen messbaren Endzustand der Energie  $E_m = E$  ist mit  $\mathcal{M}_{mi} = \mathcal{M}_{fi}$  ( $f$ ="final") also

$$P(T) = 4 |\mathcal{M}_{fi}|^2 \varrho(E) \int dE \frac{\sin^2((E - E_i)T)}{(E - E_i)^2} \quad (8.19)$$

Substituiert man  $x = E - E_i$ , so ist das Integral im Intervall  $-\infty < E - E_i < \infty$  gleich  $\pi \cdot T$ ,

$$P(T) = 4\pi T |\mathcal{M}_{fi}|^2 \varrho(E) \quad (8.20)$$

Die Übergangsrate ist die Übergangswahrscheinlichkeit pro betrachtetem Zeitraum, hier also  $-T \leq t \leq T$ ,

$$W = 2\pi |\mathcal{M}_{fi}|^2 \varrho(E) \quad (8.21)$$

Diese Formel ist die Grundlage der Berechnung von Streuprozessen.

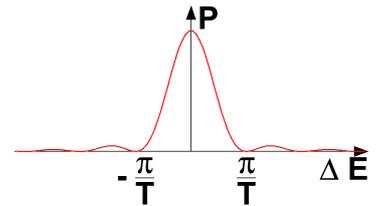
- Das Matrixelement  $\mathcal{M}_{fi}$  beinhaltet die Information über die Wechselwirkung zwischen Teilchen und Streuzentrum.
- Der Phasenraumfaktor  $\varrho(E)$  beschreibt die Kinematik des Streuprozesses. Er ist proportional zur Dichte der möglichen Endzustände.

Diese Übergangsrate ist bezogen auf ein einzelnes Strahlteilchen und ein einzelnes Target-Teilchen. Der Zusammenhang mit dem messbaren Wirkungsquerschnitt ergibt sich mit Gleichung 5.5,

$$W = \frac{dN/dt}{N_a N_b} = \sigma \cdot v_a \cdot \frac{n_a}{N_a} \quad (8.22)$$

## 8.2 Fermi's Regel im Schwerpunktsystem

Für die Berechnung von Wirkungsquerschnitten und Zerfallsraten muss nach Fermi's Goldener Regel außer dem Matrixelement auch



**Abb. 8.1**  
Unschärfe-Relation bei der Ableitung der Goldenen Regel.

### Fermi's Goldene Regel

der Phasenraum und der Fluss der einlaufenden Teilchen berechnet werden.

Der Phasenraum für ein einzelnes Teilchen beschreibt die Anzahl-dichte der Endzustände in einem Intervall von  $E$  bis  $E + dE$ . Hierzu gehört ein entsprechendes 3-er Impulsintervall von  $|\vec{P}|$  bis  $|\vec{P}| + |d\vec{P}|$ . Dies entspricht einer Schale der Dicke  $|d\vec{P}|$  auf der Oberfläche einer Impulskugel mit Radius  $|\vec{P}|$ , also einem Volumen im Impulsraum von  $4\pi\vec{P}^2 |d\vec{P}|$ . Je größer, bei gleichem Energieintervall, also der Impuls  $|\vec{P}|$  der Teilchen im Endzustand ist, um so größer ist der Phasenraum und der Wirkungsquerschnitt. Der Phasenraum ist also größer für leichte Teilchen im Endzustand. Bei mehreren Teilchen im Endzustand müssen deren Phasenraumfaktoren multipliziert werden. Allerdings sind die 4-er Impulse aufgrund von Energie- und Impulserhaltung voneinander abhängig.

Der Flußfaktor der einlaufenden Teilchen entspricht bei einem Streuprozess der Relativgeschwindigkeit zwischen den Teilchen. Außerdem muss die Normierung der Wellenfunktionen aller Teilchen berücksichtigt werden.

All diese Zusammenhänge lassen sich relativistisch invariant formulieren. Insbesondere im Schwerpunktsystem der Prozesse ergeben sich folgende einfache Beziehungen:

**2 → 2 Streuprozesse** Für einen Prozess

$$a + b \rightarrow c + d \tag{8.23}$$

mit zwei Teilchen im Anfangszustand mit Impulsen  $\vec{P}_i$  (im CMS System) und zwei Teilchen im Endzustand mit Impulsen  $\vec{P}_f$  ist der Wirkungsquerschnitt im CMS-System:

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{|\vec{P}_f|}{|\vec{P}_i|} |\mathcal{M}|^2} \tag{8.24}$$

Hierbei ist wie üblich die Schwerpunktsenergie  $s = (a + b)^2$ . Zu beachten ist, dass im Falle gleicher Teilchenmassen im Anfangs und Endzustand  $|\vec{P}_f| = |\vec{P}_i|$  gilt, so dass der auf den Phasenraum zurückgehende Faktor  $|\vec{P}_f|/|\vec{P}_i| = 1$  ist. Das Matrixelement  $\mathcal{M}$  ist dimensionslos.

---

**Aufgabe 8.1:** Zeigen Sie, dass im ultrarelativistischen Limes jeder Wirkungsquerschnitt mit der Schwerpunktsenergie fällt,  $\sigma \sim \frac{1}{s}$ . Begründen Sie, dass dies direkt aus Dimensionsbetrachtungen folgen muss.

---

**2-Körper-Zerfall** Für einen Zerfall

$$a \rightarrow b + c \tag{8.25}$$

im Schwerpunktsystem von Teilchen  $a$  mit zwei Teilchen im Endzustand mit Impulsen  $|\vec{P}_f|$  ist die Zerfallsbreite

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega_f} = \frac{1}{32\pi^2} \frac{|\vec{P}_f|}{m_a^2} |\mathcal{M}|^2 \quad (8.26)$$

Wenn das Teilchen  $a$  nicht polarisiert ist, gibt es keine Vorzugsrichtung im Raum. Es kann daher sofort über den Raumwinkel integriert werden, so dass

$$\Gamma = \frac{1}{8\pi} \frac{|\vec{P}_f|}{m_a^2} |\mathcal{M}|^2 \quad (8.27)$$

**Aufgabe 8.2:** Zeigen Sie, dass schwere Teilchen eine kurze Lebensdauer haben, wenn sie in viel leichtere Teilchen zerfallen.

## 8.3 Zerfallsgesetz

Zerfälle von Teilchen treten in zwei Spielarten auf:

- Fundamentale Teilchen können nur durch die schwache Wechselwirkung zerfallen, d.h. spontan in zwei oder mehr andere fundamentale Teilchen übergehen.
- Gebundene Systeme (angeregte Atome, Kerne oder Hadronen) zerfallen entweder elektromagnetisch oder durch die starke Wechselwirkung. Die schwache Wechselwirkung spielt nur dann eine messbare Rolle, wenn das System bereits im Grundzustand ist und der Zerfall durch die anderen Wechselwirkungen nicht möglich ist.

Für ein bestimmtes Teilchen, das zur Zeit  $t_1$  existiert, sei  $\Gamma dt$  die Wahrscheinlichkeit, in einem kleinen Zeitintervall von  $t_1$  bis  $t_1 + dt$  zu zerfallen. Diese Wahrscheinlichkeit soll unabhängig von der Vorgeschichte (Alter) des Teilchens sein, so dass  $\Gamma$  eine Konstante ist. Bei  $N(t)$  identischen, voneinander unabhängigen Teilchen ist dann die Änderung  $dN$  dieser Zahl gegeben durch

$$dN = -\Gamma N(t) dt \quad (8.28)$$

Diese Änderung von  $N(t)$  muss negativ sein, denn die Anzahl der noch vorhandenen Teilchen nimmt ab. Die Lösung dieser Differentialgleichung ergibt sich aus

$$\int_{N(t=0)}^{N(t)} \frac{-dN}{N} = \int_{t=0}^t \Gamma dt \quad (8.29)$$

zu

$$N(t) = N_0 e^{-\Gamma t} \quad (8.30)$$

mit  $N_0 = N(t = 0)$ . Die Anzahl der messbaren Zerfälle ist  $-dN$ . Die Wahrscheinlichkeitsdichte  $P(t)$  ist definiert über die Anzahl der messbaren Zerfälle  $dN$  im Zeitintervall von  $t$  bis  $t + dt$ , relativ zur ursprünglich zur Zeit  $t = 0$  vorhanden gewesenen Teilchen  $N_0$ ,

$$P(t) dt = \frac{-dN}{N_0} = \Gamma \frac{N(t)}{N_0} dt \quad (8.31)$$

Damit ist die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\boxed{P(t) = \Gamma e^{-\Gamma t}} \quad (8.32)$$

korrekt normiert, denn die Wahrscheinlichkeit für dieses Teilchen irgendwann zu zerfallen ist

$$\int_0^\infty P(t) dt = \int_0^\infty \Gamma e^{-\Gamma t} dt = 1 \quad (8.33)$$

Die mittlere Zeit bis zum Zerfall ist

$$\langle t \rangle = \int_0^\infty t P(t) dt = \frac{1}{\Gamma} \quad (8.34)$$

Diese Zeitdauer wird daher auch mittlere Lebensdauer  $\tau$  genannt<sup>12</sup>,

$$\boxed{\tau = \frac{1}{\Gamma}} \quad (8.37)$$

Falls ein Teilchen in mehrere Endzustände  $f$  zerfallen kann, dann gilt für die Partialbreiten  $\Gamma_f$

$$dN_f = -\Gamma_f N(t) dt \quad (8.38)$$

und daher

$$dN = \sum_f dN_f \quad \tau^{-1} = \Gamma = \sum_f \Gamma_f \quad (8.39)$$

Das Verzweigungsverhältnis ('branching ratio' BR) gibt an, welcher Prozentsatz der Teilchen in einen bestimmten Endzustand zerfällt,

$$BR_f = \frac{\Gamma_f}{\Gamma} \quad (8.40)$$

<sup>12</sup> Im Vergleich dazu ist die Halbwertszeit definiert als die Zeit, bei der die Anzahl der ursprünglichen Teilchen auf die Hälfte abgenommen hat,

$$N(t_{1/2}) = \frac{1}{2} N_0 = N_0 e^{-t_{1/2}/\tau} \quad (8.35)$$

so dass

$$t_{1/2} = \tau \ln 2 = 0,693 \tau \quad (8.36)$$

## 8.4 Breit-Wigner Verteilung und virtuelle Teilchen

Quantenmechanisch ist die Wellenfunktion eines freien Teilchens in seinem eigenen Ruhesystem gegeben durch

$$\Psi(t) = \Psi_0 e^{-i(Et - \vec{P}\vec{x})} = \Psi_0 e^{-imt} \quad (8.41)$$

denn in diesem System ist  $\vec{P} = 0$  und  $E = m$ . Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit ist

$$|\Psi(t)|^2 = |\Psi_0|^2 \quad (8.42)$$

und damit zeitlich konstant. Für Teilchen, die zerfallen, muss aber gelten

$$|\Psi(t)|^2 = |\Psi_0|^2 e^{-\Gamma t} \quad (8.43)$$

Daher muss die Wellenfunktion verändert werden. Mit dem Ansatz

$$\Psi(t) = \Psi_0 e^{-iFt} \quad (8.44)$$

findet man

$$|\Psi(t)|^2 = \Psi \Psi^* = \Psi_0 \Psi_0^* e^{-i(F-F^*)t} = |\Psi_0|^2 e^{-\Gamma t} \quad (8.45)$$

so dass  $i(F - F^*) = -2 \operatorname{Im}(F) = \Gamma$  ist. Lässt man den Realteil von  $F$  unverändert gleich  $m$ , so erfüllt der Ansatz mit  $F = m - i\Gamma/2$  das exponentielle Zerfallsgesetz. Damit ist

$$\boxed{\Psi(t) = \Psi_0 e^{-imt - \Gamma t/2}} \quad (8.46)$$

Um die Energie dieses Zustands zu verstehen, führen wir eine Fourier-Transformation des zeitabhängigen Zustands  $\Psi(t)$  in einen energieabhängigen Zustand  $\tilde{\Psi}(E)$  durch,

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(E) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t) e^{iEt} dt = \frac{\Psi_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(m-E)t - \Gamma t/2} dt \\ &= \frac{\Psi_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{i}{(E - m) + i\Gamma/2} \end{aligned} \quad (8.47)$$

Die Wahrscheinlichkeit, einen Zustand mit Energie  $E$  zu finden, ist proportional zu

$$|\tilde{\Psi}(E)|^2 = \tilde{\Psi}(E) \tilde{\Psi}^*(E) = \frac{|\Psi_0|^2}{2\pi} \frac{1}{(E - m)^2 + \Gamma^2/4} \quad (8.48)$$

Aus der Normierung

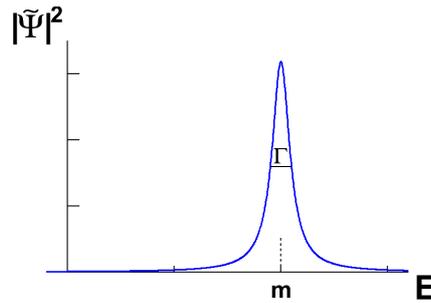
$$\int_0^{\infty} |\tilde{\Psi}(E)|^2 dE = |\Psi_0|^2 \frac{2\pi}{\Gamma} = 1 \quad (8.49)$$

folgt

$$\boxed{|\tilde{\Psi}(E)|^2 = \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma}{(E - m)^2 + \Gamma^2/4}} \quad (8.50)$$

Dies ist die Breit-Wigner Resonanzkurve. Sie beschreibt die Energieabhängigkeit der Produktion eines instabilen Teilchens.

## 8.4 Breit-Wigner Verteilung und virtuelle Teilchen



**Abb. 8.2** Breit-Wigner-Resonanz als Funktion von  $E$  mit Breite  $\Gamma = 0.1 m$ .

Die Produktionsrate ist maximal bei  $E = m$  und ist halb so groß bei  $E = m \pm \Gamma/2$ . Daher wird  $\Gamma$  auch Halbwertsbreite oder natürliche Resonanzbreite genannt, denn das Verhalten erinnert z.B. an die Anregung eines Pendels nahe der Resonanzfrequenz.

Die Energie des kurzlebigen Teilchens ist nicht scharf. Schreibt man Gleichung 8.37 in der Form

$$\tau \Gamma = 1 \quad (8.51)$$

so entspricht sie der Heisenberg'schen Unschärferelation. Um die Energie des Zustands mit der Genauigkeit  $\Delta E = \Gamma$  zu messen, ist mindestens die Zeit  $\Delta t = \tau$  notwendig.

Wenn im Ruhesystem des Teilchens ( $\vec{P} = 0$ ) die Energie nicht genau der Masse entspricht, dann ist

$$p^2 = E^2 - \vec{P}^2 = E^2 \neq m^2 \quad (8.52)$$

### Virtuelles Teilchen

Das Teilchen erfüllt also nicht mehr die relativistische Energie-Impuls-Beziehung, es ist nicht auf seiner "Massenschale"  $E^2 - \vec{P}^2 = m^2$ . Dies ist offenbar - für eine kurze Zeit - möglich. Man spricht in diesem Fall von einem virtuellen Teilchen.

# 9 Struktur der Hadronen und Kerne

---

9.1	Rutherford-Streuung . . . . .	79
9.2	Mott-Wirkungsquerschnitt . . . . .	80
9.3	Formfaktor . . . . .	81
9.4	Messungen der Proton- und Kernstrukturen . . . . .	82

---

Die historisch wichtigste Methode zur Messung der Ausdehnung, der Anregungszustände und der inneren Struktur von Kernen und auch von Protonen und Neutronen ist die Streuung mit hochenergetischen Teilchen, insbesondere Elektronen. Im Prinzip ist das die Rutherford-Streuung, allerdings können bei hohen Energien quantenmechanische und Spin-Effekte, Rückstoß auf das Target und schließlich Anregungen oder Auflösung des Targets beobachtet werden.

## 9.1 Rutherford-Streuung

Zunächst wird eine quantenmechanische Berechnung der Rutherford-Streuung gezeigt für den Fall einer elastischen Streuung an einem schweren Target. Hierbei werden zunächst der Rückstoß auf den Kern sowie Spin-Effekte nicht berücksichtigt.

Berechnet werden muss das Matrixelement

$$\mathcal{M}_{fi} = \langle u_f | V | u_i \rangle \quad (9.1)$$

Mit ebenen Wellen für das einlaufende Teilchen  $i$  und das auslaufende Teilchen  $f$ ,

$$|u_i\rangle = e^{i\vec{P}_i\vec{r}} \quad |u_f\rangle = e^{i\vec{P}_f\vec{r}} \quad (9.2)$$

ergibt sich

$$\mathcal{M}_{fi} = \langle u_f | V | u_i \rangle = \int d^3r u_f^* V u_i = \int d^3r e^{-i\vec{P}_f\vec{r}} V e^{i\vec{P}_i\vec{r}} \quad (9.3)$$

Mit dem Impulsübertrag

$$\vec{q} = \vec{P}_i - \vec{P}_f \quad (9.4)$$

ist

$$\boxed{\mathcal{M}_{fi} = \int d^3r e^{i\vec{q}\vec{r}} V} \quad (9.5)$$

Das Matrix-Element  $\mathcal{M}_{fi}$  ist in diesem Fall also einfach die Fourier-Transformierte des Streupotentials.

Eine allgemeine Lösung erhält man durch<sup>13</sup>

$$\mathcal{M}_{fi} = \int d^3r e^{i\vec{q}\vec{r}} V \quad (9.7)$$

$$= \frac{-1}{\vec{q}^2} \int d^3r (\nabla^2 e^{i\vec{q}\vec{r}}) V \quad (9.8)$$

$$= \frac{-1}{\vec{q}^2} \int d^3r e^{i\vec{q}\vec{r}} \nabla^2 V \quad (9.9)$$

Speziell für die Coulomb-Wechselwirkung mit statischem Streupotential für ein Teilchen  $a$  mit Ladung  $Z_a e$  ergibt sich  $V$  aus dem skalaren Coulomb-Potential  $\Phi$ , das über die Poisson-Gleichung mit der Ladungsdichte des Streuzentrums zusammenhängt,

$$V = Z_a e \Phi(\vec{r}) \quad \nabla^2 \Phi(\vec{r}) = -\varrho(\vec{r}) \quad (9.10)$$

Daher folgt

$$\boxed{\mathcal{M}_{fi} = \frac{Z_a e}{\vec{q}^2} \int d^3r e^{i\vec{q}\vec{r}} \varrho(\vec{r})} \quad (9.11)$$

**Punktförmiges Streuzentrum** Für eine punktförmige Ladung  $Z_b e$  im Streuzentrum ist

$$\varrho(\vec{r}) = Z_b e \delta^3(\vec{r}) \quad (9.12)$$

Damit ist das Integral über die Ladungsverteilung gleich 1 und das Matrixelement ist

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{Z_a Z_b e^2}{\vec{q}^2} \quad (9.13)$$

Für Fermi's Goldene Regel wird

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{(Z_a Z_b e^2)^2}{\vec{q}^4} \quad (9.14)$$

benötigt. Bis auf Vorfaktoren, die sich aus der Normierung der Wellenfunktionen und dem Phasenraum ergeben, ist dies gerade der klassisch abgeleitete Rutherford Wirkungsquerschnitt von Gleichung 5.37.

## 9.2 Mott-Wirkungsquerschnitt

Für die Rutherford-Formel wurde nicht-relativistisch gerechnet, kein Spin berücksichtigt und auch der Rückstoß auf den Kern vernachlässigt. Um die Strukturen von Hadronen oder Kernen mit Elektronenstrahlen auflösen zu können, müssen hohe Elektronenergien von

<sup>13</sup> Für eine nach außen hinreichend schnell abfallende Funktion  $f(\vec{r})$  ist bei Integration bis ins Unendliche  $\int d^3r \nabla f = 0$ . Mit  $f = (V \nabla U) - (U \nabla V)$  folgt

$$0 = \int d^3r \nabla f = \int d^3r (V \nabla^2 U) - (U \nabla^2 V) \quad (9.6)$$

Mit  $U = e^{i\vec{q}\vec{x}}$  folgt Gleichung 9.9.

mehreren 100 MeV verwendet werden. Dann kann man weder den Rückstoß auf die Kerne noch relativistische Effekte und auch den Spin nicht vernachlässigen. Für diesen Fall gilt die Mott-Formel. Sie muss aus der Dirac-Gleichung abgeleitet werden. Mit  $Z_e = -1$  und  $E_e$  als Gesamtenergie des Elektrons gilt

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{Mott} = \left( \frac{Z\alpha}{2E_e\beta^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \left( 1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (9.15)$$

Der Term mit  $\beta^2 \sin^2 \theta/2$  ist der Beitrag durch den Spin des Elektrons. Er wird bei  $\beta \rightarrow 1$  ebenso groß wie die Coulomb-Wechselwirkung.

Mit dem 4-er Impulsübertrag

$$q^2 = (e - e')^2 \approx 4E_e E'_e \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (9.16)$$

folgt für  $\beta \approx 1$

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{Mott} = (2Z\alpha)^2 \frac{E_e'^2}{q^4} \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (9.17)$$

Ohne Rückstoß auf den Kern müsste  $E_e'$  durch  $E_e$  ersetzt werden.

## 9.3 Formfaktor

Für eine radialsymmetrische, aber nicht punktförmige Ladungsverteilung

$$\varrho(r) = Z_b e f(r) \quad \text{mit} \quad \int d^3r f(r) = 1 \quad (9.18)$$

ist das Matrixelement nach Gleichung 9.11

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{Z_a e}{\vec{q}^2} \int d^3r e^{i\vec{q}\vec{r}} \varrho(\vec{r}) = \frac{Z_a Z_b e^2}{\vec{q}^2} F(\vec{q}) \quad (9.19)$$

mit dem Formfaktor

$$F(\vec{q}) = \int d^3r e^{i\vec{q}\vec{r}} f(r) \quad (9.20)$$

Der Formfaktor ist also die Fourier-Transformierte der geometrischen Form der normierten Ladungsverteilung  $f(r)$  des Streuzentrums. Daraus folgt für den Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma_{\text{Rutherford}}}{d\Omega} |F(\vec{q})|^2 \quad (9.21)$$

Aus der Messung des differentiellen Wirkungsquerschnitts im Impulsraum kann also der Formfaktor bestimmt werden. Durch Rücktransformation kann daraus im Prinzip die Ladungsverteilung  $f(r)$  bestimmt werden. Das Integral der Rücktransformation muss jedoch den ganzen  $|\vec{q}|$  Bereich umfassen, also auch unendlich hohe Werte umfassen. Dies ist aufgrund der beschränkten Schwerpunktsenergie nicht möglich. Man kann jedoch verschiedene Ladungsverteilungen  $f(r)$  ausprobieren, bis deren Fouriertransformierte zu den Daten passt.

**Aufgabe 9.1:** Zeigen Sie durch Integration in Kugelkoordinaten, dass

$$\int d^3r f(r) e^{i\vec{q}\vec{r}} = 4\pi \int_0^\infty dr f(r) r^2 \frac{\sin(qr)}{qr} \quad (9.22)$$

Damit lassen sich die folgenden Beziehungen zwischen Ladungsverteilungen und Formfaktoren ausrechnen.

Ladungsverteilung $f(r)$		Formfaktor $F(\mathbf{q}^2)$	
Punkt	$\delta(r)/4\pi$	1	konstant
exponentiell	$(a^3/8\pi) \cdot \exp(-ar)$	$(1 + \mathbf{q}^2/a^2\hbar^2)^{-2}$	Dipol
Gauß	$(a^2/2\pi)^{3/2} \cdot \exp(-a^2r^2/2)$	$\exp(-\mathbf{q}^2/2a^2\hbar^2)$	Gauß
homogene Kugel	$\begin{cases} 3/4\pi R^3 & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$	$3\alpha^{-3}(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)$ mit $\alpha =  \mathbf{q} R/\hbar$	oszillierend

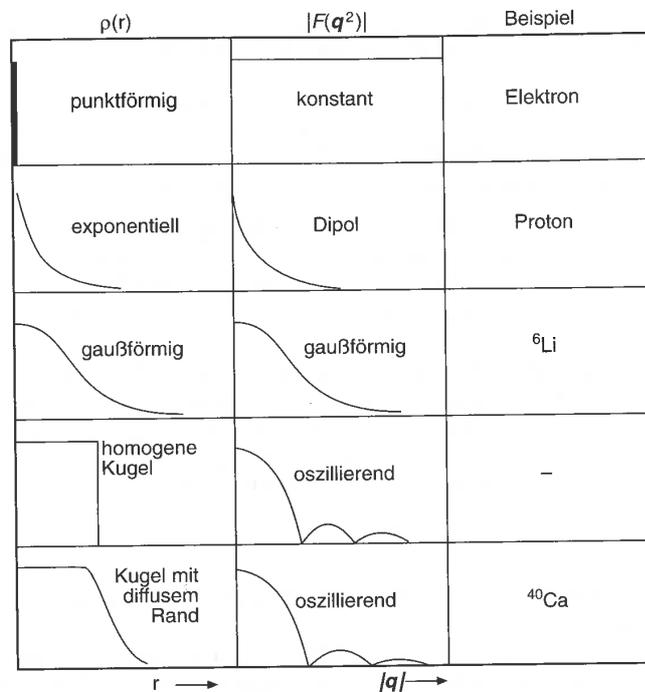


Abb. 9.1 Ladungsverteilungen und Formfaktoren.

## 9.4 Messungen der Proton- und Kernstrukturen

Seit den 1950er Jahren wurden in Elektron-Streuexperimenten die Strukturen und Anregungen von Protonen und Kernen untersucht. Die folgenden Bilder zeigen einige experimentelle Resultate. Aus ihnen folgt:

- Hadronen wie Protonen, Neutronen oder Pionen haben eine Ausdehnung.

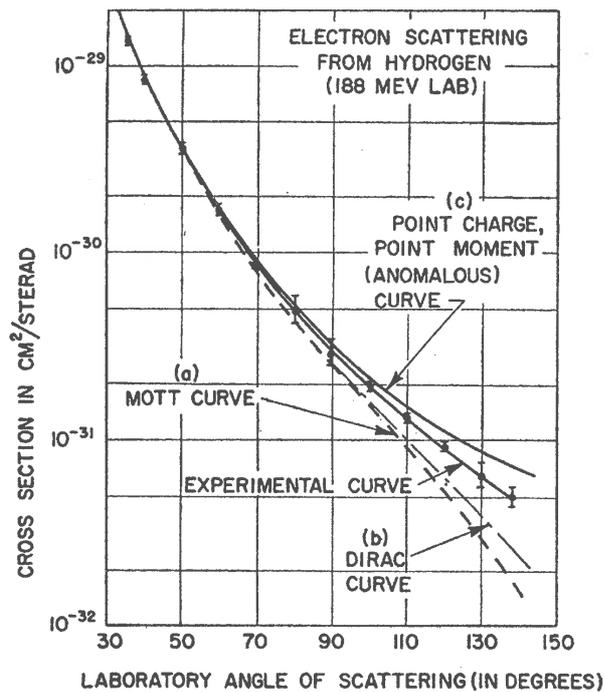
- Der Formfaktor des Protons zeigt keine Beugungsminima. Die Ladungsdichte des Protons fällt etwa exponentiell nach außen ab

$$\rho(r) = \rho_0 e^{-r/a} \quad (9.23)$$

mit  $a = 0,23 \text{ fm}$ . Der mittlere Ladungsradius ist

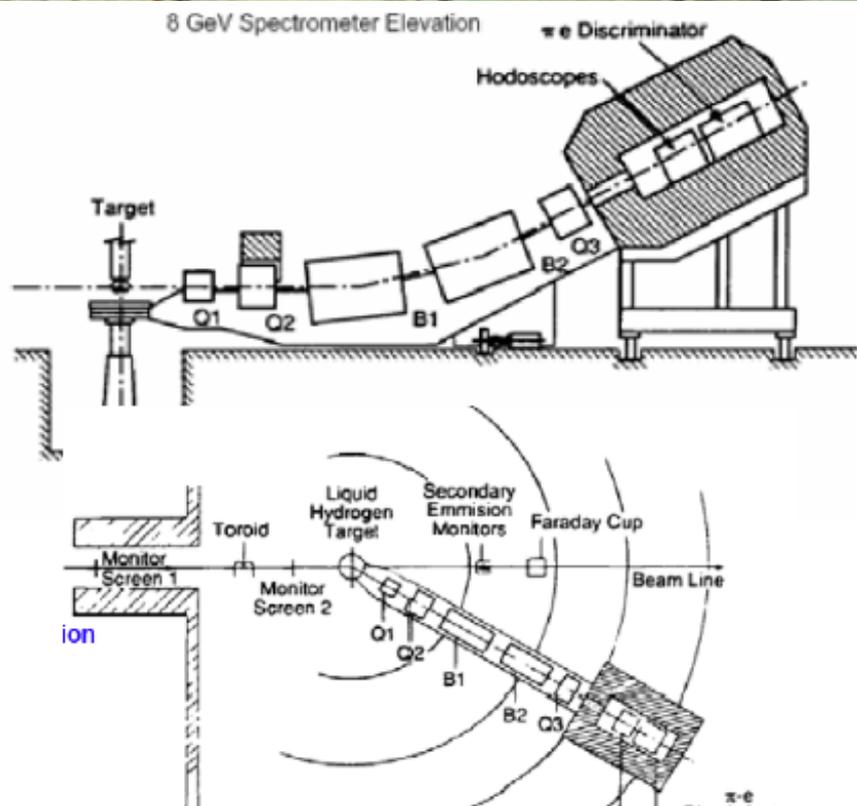
$$\langle r^2 \rangle = \int d^3r r^2 f(r) \approx 0,74 \text{ fm}^2 \quad (9.24)$$

- Bei Energien im GeV Bereich kann das Proton angeregt werden. Die Massen der Anregungszustände liegen typisch 100 MeV höher als die Proton-Masse.
- Kerne zeigen Beugungsminima. Sie haben eine Nukleonendichte, die im Zentrum fast konstant und unabhängig von der Kernmasse ist. Weiter außen fällt die Ladungsdichte kontinuierlich ab. Die Beugungsminima sind daher nicht sehr ausgeprägt. Der Radius der Kerne steigt mit  $A^{1/3}$  mit der Massenzahl  $A$ .

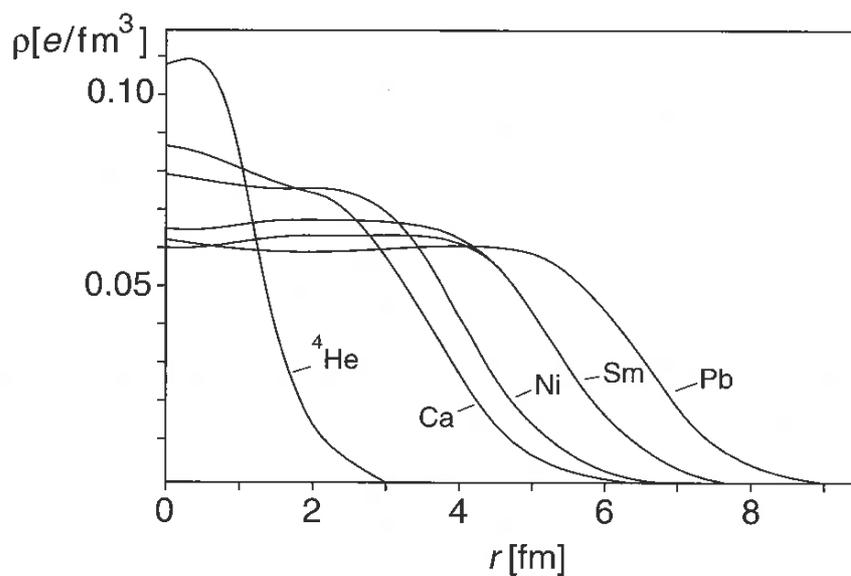
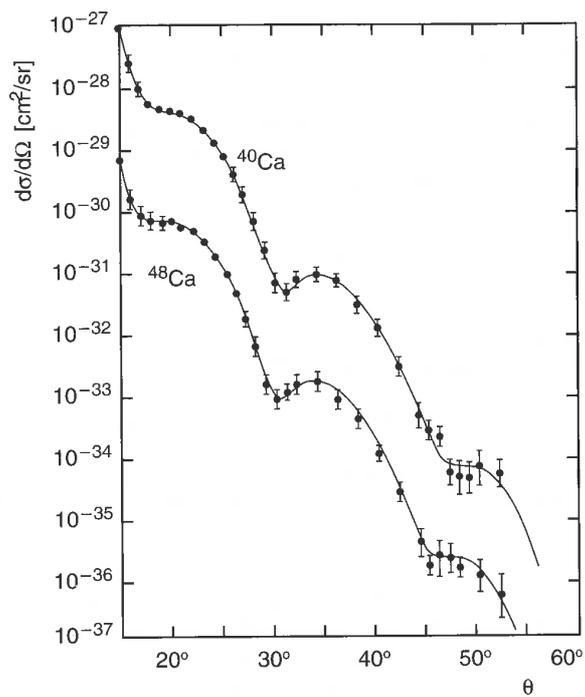


**Abb. 9.2** Wirkungsquerschnitt als Funktion des Streuwinkels in Elektron-Proton Streuung. Die Elektronenergie betrug 188 MeV. Die Daten lassen sich weder durch den Rutherford- noch den Mott- oder der kompletten Dirac-Theorie erklären. Der Unterschied zu diesen Vorhersagen war die erste Beobachtung einer Ausdehnung des Protons durch Hofstadter 1956.

## 9.4 Messungen der Proton- und Kernstrukturen



**Abb. 9.3** Schema und Foto eines typischen Experiments zur Elektron-Proton Streuung. Mit diesem Experiment am SLAC konnte erstmals die innere Struktur der Protonen aufgelöst und der Nachweis von Quarks geführt werden.



**Abb. 9.4** Oben: Elektron Streuung an Calcium mit verschiedenen Massenzahlen. Man erkennt mehrere Beugungsminima, wie es einer Streuung an einer Kugel entspricht. Die Minima sind aber nicht sehr ausgeprägt. Daraus ergibt sich ein nicht sehr schneller Abfall der Ladungsdichte am Rand der Kugel.

Unten: Berechnete Ladungsdichte in verschiedenen Kernen.

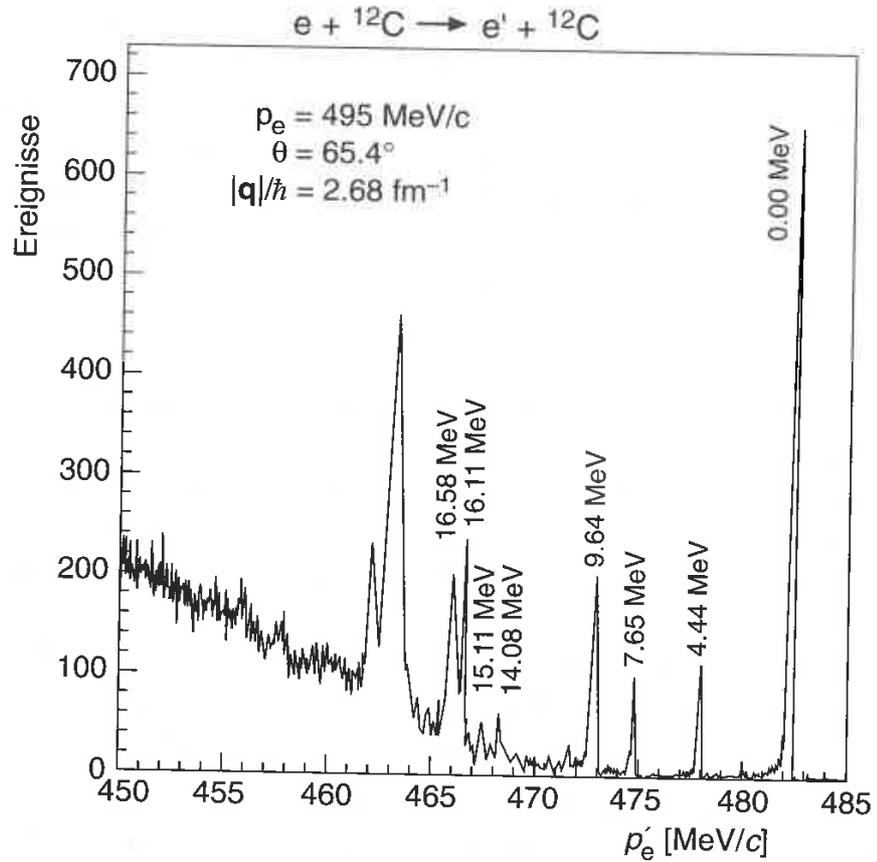


Abb. 9.5 Energiespektrum inelastisch gestreuter Elektronen an  $^{12}\text{C}$  Kernen. Die Elektronenergie betrug 495 MeV.

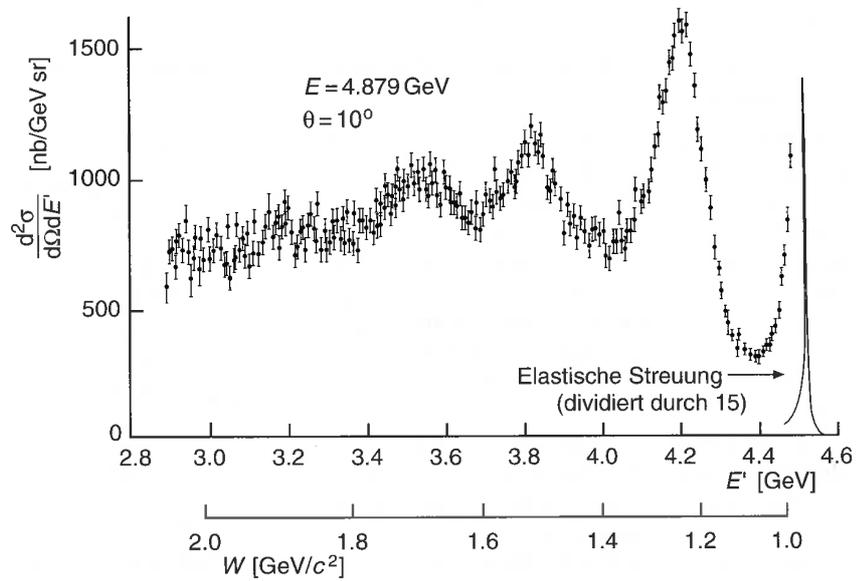


Abb. 9.6 Wirkungsquerschnitt als Funktion der Energie gestreuter Elektronen an Protonen. Die Elektronenergie betrug 4,879 GeV. Der dominante Anteil elastisch gestreuter Elektronen ist verkleinert dargestellt. Man erkennt die ersten Anregungsniveaus der Protonen.

# 10 Wechselwirkungen und Symmetrien

---

10.1 Yukawa Potential und Reichweite der Kräfte . . . . .	87
10.2 Quantenfelder und Feynman-Graphen . . . . .	89
10.3 Beispiele . . . . .	93
10.4 Fundamentale Graphen . . . . .	95
10.5 Quantenzahlen und Erhaltungssätze . . . . .	98
10.6 Symmetrie . . . . .	100

---

## 10.1 Yukawa Potential und Reichweite der Kräfte

Hideki Yukawa schlug in den Anfängen der Kernphysik einen Ansatz mit schweren Austauscheteilchen vor, um die endliche Reichweite der Kernkräfte zu erklären. Die Idee ist aber auch für andere Wechselwirkungen mit schweren Austauscheteilchen relevant, insbesondere für die schwache Wechselwirkung mit  $W^\pm$  und  $Z^0$ .

Zunächst wird der Zusammenhang zwischen Wellengleichung eines freien Teilchens und dem statischen Potential in der Elektrodynamik erklärt. Die Wellengleichung für das skalare, elektrische Potential  $\varphi(\vec{x}, t)$  lautet (in Lorentz-Eichung)

$$\square\varphi = \rho$$

- Ohne äußere Ladungsdichte,  $\rho(\vec{x}, t) = 0$  ist die Lösung von  $\square\varphi = 0$  eine ebene Welle,  $\varphi \sim e^{-i(Et - \vec{P}\vec{r})}$  mit  $E^2 - \vec{P}^2 = 0$ , die freien, masselosen Photonen entspricht.
- Für eine punktförmige, statische Ladung  $\rho = q\delta(\vec{r})$  im Zentrum gibt es eine statische Lösung für das Potential,  $\partial_t\varphi = 0$ , für das die entstehende Poisson-Gleichung

$$\nabla^2\varphi = -q\delta(\vec{r}) \quad (10.1)$$

als Lösung das bekannte Coulomb-Potential ergibt<sup>14</sup>,

$$\varphi = \frac{q}{4\pi|\vec{r}|}$$

Die Reichweite dieses Potentials fällt nur sehr langsam mit dem Abstand von der Quelle und ist praktisch unendlich.

<sup>14</sup>Man kann dies durch Einsetzen in die Poisson Gleichung leicht zeigen, wenn man die Eigenschaft

$$\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r}|} = -4\pi\delta(\vec{r})$$

der  $\delta$ -Funktion benutzt.



**Abb. 10.1**  
Hideki Yukawa  
(Quelle Wikipedia).

Yukawa ging von der Klein-Gordon-Gleichung in der Form

$$(\square + m^2) \Phi = \rho(x)$$

aus, wobei  $\rho(x)$  die Farbladungs-Dichteverteilung eines Kerns darstellen soll.

- a) Ohne äußeres Feld ist die Lösung wiederum eine ebene Welle für ein freies Teilchen mit Masse  $m$ ,

$$\Phi(x) \sim e^{-i(Et - \vec{P}\vec{r})} \quad \text{mit } E^2 - \vec{P}^2 = m^2$$

- b) Für eine punktförmige, statische Ladungsverteilung des Kerns gilt

$$\rho(\vec{r}) = g\delta(\vec{r})$$

wobei  $g$  eine Kopplungskonstante für die Kernkraft, also die Kraft zwischen den Protonen und Neutronen, ist. Hierfür gibt es auch eine statische Lösung,  $\partial_t \Phi = 0$ . Die hierfür geltende Gleichung

$$(\nabla^2 - m^2)\Phi = -g\delta(\vec{r})$$

hat die Lösung

$$\Phi = g \frac{e^{-mr}}{4\pi r} \quad (10.2)$$

## Yukawa-Potential

Dieses Potential fällt wegen der Exponentialfunktion sehr schnell nach außen ab, d.h. diese Kraft hat eine endliche Reichweite, die typisch von der Größe  $1/m$  ist.

Diese Interpretation für ein schweres Austauscheteilchen stimmt mit der Überlegung überein, dass eine statische Ladungsverteilung für kurze Zeit ein massives Quant der Energie  $\Delta E \approx m$  emittieren kann, dessen Lebensdauer  $\Delta t$  aufgrund der Unschärferelation  $m \Delta t \approx 1$  und Reichweite  $r$  durch die Lichtgeschwindigkeit auf

$$r \approx c \Delta t \approx \frac{1}{m}$$

beschränkt ist (mit  $\hbar = c = 1$ ).

## Reichweite der Kernkraft

Setzt man für die Reichweite der Kernkraft den Radius des Protons an,  $r \approx 1\text{fm}$ , so ergibt sich  $m \approx 200\text{MeV}$ . Dies ist tatsächlich die Größenordnung für die Masse des leichtesten Hadrons, des Pions ( $m_\pi = 140\text{MeV}$ ), das Jahre später entdeckt wurde. Pion-Austausch stellt demnach eine erste plausible Näherung für die Kräfte zwischen den Protonen und Neutronen im Kern dar. Diese Vorstellung wurde später durch den Austausch auch schwererer Hadronen zur Regge-Theorie verallgemeinert, die erfolgreich zahlreiche Phänomene der Hadron-Hadron-Streuung bei kleinen Impulsüberträgen erklären kann. In diesem Energiebereich ist das ansonsten natürlich fundamentalere Quark-Gluon-Bild der Hadronen nicht anwendbar, da das Auflösungsvermögen für die Quarks und Gluonen fehlt.

## Reichweite der Starken Wechselwirkung

Die starke Wechselwirkung entsteht durch den Austausch von Gluonen. Ihre Reichweite ist ebenfalls von der Größenordnung von nur 1 fm, obwohl die Masse der Gluonen null ist. Der Grund für die kleine Reichweite ist also nicht in der Masse der Gluonen zu finden, sondern vielmehr in der Farbladung der Gluonen, die verhindert, dass sich Gluonen wie Photonen frei über große Abstände bewegen können. Dies wird später im Abschnitt zur starken Wechselwirkung genauer erklärt.

## Reichweite der Schwachen Wechselwirkung

Die Eichbosonen  $W$  und  $Z$  der schwachen Wechselwirkung sind Spin-1 Teilchen, die wie das Photon durch Vektorfelder beschrieben werden. Zwar gilt für diese die Proca-Gleichung und nicht die Klein-Gordon Gleichung, aber das Prinzip der obigen Überlegungen von Yukawa bleibt gültig. Den Massen  $M_W = 80,4$  GeV und  $M_Z = 90,1$  GeV entsprechen Reichweiten der schwachen Wechselwirkung von ca.  $1/m \approx 2,5 \cdot 10^{-3}$  fm. Die schwache Wechselwirkung ist also bei kleinen Energien schwach, weil die Reichweite der schweren Bosonen und damit auch alle Wirkungsquerschnitte klein sind.

Bei hohen Energien können  $W$  und  $Z$  auch als reelle Teilchen produziert werden. Die Reichweite ergibt sich dann aus der Lebensdauer der Teilchen. Bei einer totalen Breite von ca.  $\Gamma = 2$  GeV ergibt sich eine typische Reichweite von  $c\tau = c/\Gamma = 0.1$  fm. Werden  $W$  und  $Z$  in Proton-Proton Kollisionen erzeugt, so zerfallen sie demnach noch innerhalb des Proton-Radius.

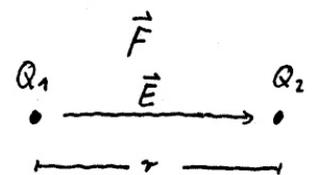
## 10.2 Quantenfelder und Feynman-Graphen

Fasst man die Ergebnisse der Diskussion zum Yukawa-Potential und zur Breit-Wigner-Resonanz zusammen, so ergibt sich der Zusammenhang zwischen dem Begriff der Kraft in der klassischen Physik und in der Quantenfeldtheorie.

Klassisch wird eine Kraft (hier Coulomb-Kraft) beschrieben durch ein Feld, das von einer Ladung ausgeht und auf eine zweite Ladung wirkt (und umgekehrt). Die Stärke der Kraft ist  $F \sim Q_1 \cdot Q_2/r^2$ .

- Aus den Wellengleichungen (Maxwell oder Klein-Gordon) folgt
  - a) mit äußerer Ladung ein Potential und damit eine Kraft,
  - b) ohne äußere Ladung eine freie Welle eines Teilchens.

Die Maxwell-Gleichungen entsprechen einem masselosen Teilchen (Photon) mit unendlicher Reichweite, die Klein-Gordon-Gleichung einem Teilchen mit Masse  $m$  und Reichweite  $r = 1/m$  des Potentials.



**Abb. 10.2**  
Klassisches Bild der Coulomb-Kraft.

- Aus der Breit-Wigner-Formel ergibt sich, dass ein Teilchen für kurze Zeit als virtuelles Teilchen produziert werden kann. Je größer die Virtualität ist, d.h. je weiter das Teilchen von seiner Massenschale entfernt ist, desto unwahrscheinlicher ist der Prozess.

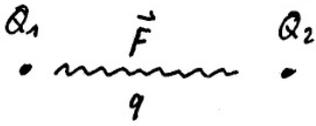


Abb. 10.3 Kraft durch Austausch von Quanten.

In der Quantenfeldtheorie wird daher angenommen, dass jedes geladene Teilchen ständig von einer Wolke virtueller Feldquanten (z.B. Photonen) umgeben ist. Diese Feldquanten können von anderen Ladungen absorbiert werden. Der Impuls, den die Feldquanten von einem Teilchen auf das andere übertragen, entspricht in diesem quantenmechanischen Bild der Kraft in der klassischen Physik.<sup>15</sup> Am Beispiel der Rutherford-Streuung erkennt man, dass sich die Ereignisrate wie folgt verstehen lässt:

- Die Kopplung des Teilchens  $a$  an Photonen ist  $\sim Z_a \cdot e$ , die des Teilchens  $b$  ist  $\sim Z_b \cdot e$ .
- Der Photonaustausch wird im Wirkungsquerschnitt durch den 4-er Impulsübertrag  $q$  dargestellt. Hohe Virtualitäten  $q^2 \gg 0$  sind dabei unwahrscheinlich.

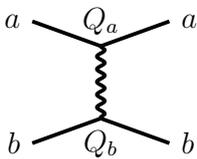


Abb. 10.4 Rutherford-Streuung als Feynman-Diagramm.

Das Matrixelement ist proportional zum Produkt dieser 3 Faktoren,

$$\mathcal{M} \sim \frac{Z_a e Z_b e}{q^2} \tag{10.4}$$

Der Wirkungsquerschnitt ist proportional zu

$$|\mathcal{M}|^2 \sim \frac{(Z_a Z_b e^2)^2}{q^4} \tag{10.5}$$

Für eine exakte Ableitung der Berechnung von Matrixelementen muss man die Felder quantisieren und im Rahmen dieser Quantenfeldtheorie rechnen. Die Felder z.B. der Dirac-Gleichung werden dann zu Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, so dass die Entstehung neuer Teilchen beschrieben werden kann. Dies geht über den Rahmen dieser Vorlesung hinaus. R. Feynman hat aber erstmals für die Quantenelektrodynamik (QED) gezeigt, dass sich aus der Quantenfeldtheorie allgemeine Regeln für die Berechnung von Matrixelementen formulieren lassen, die für jede Wechselwirkung ähnlich angewendet werden können. Diese Regeln lassen sich aus der Lagrange-Funktion der jeweiligen Theorie ableiten.



Abb. 10.5 Richard Feynman

<sup>15</sup> Trägt ein virtuelles Feldquant den Impuls  $\Delta q$ , so ist (semiklassisch) die Kraft gegeben durch den Impulsübertrag pro Zeit,  $F = \Delta q / \Delta t$ . Die Reichweite  $r = \Delta x$  des virtuellen Feldquants ergibt sich aus der Unschärferelation  $\Delta q \cdot \Delta x \approx 1$ . Damit ist

$$F = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \underbrace{\frac{\Delta q}{\Delta x}}_{(\sim 1/\Delta x)^2} \underbrace{\frac{\Delta x}{\Delta t}}_{\sim c} \sim \frac{1}{r^2} \tag{10.3}$$

Diese grobe Abschätzung ergibt also wieder die klassische Anhängigkeit  $\sim 1/r^2$  der Kraft vom Abstand zwischen den Ladungen.

Die Feynman-Graphen sind als symbolische Rechenregeln zu verstehen. Zeichnet man für einen Prozess, d.h. für einen festen Anfangszustand und Endzustand, alle möglichen Feynman-Graphen, so stellt die Summe der jeweiligen Amplituden ein exaktes Ergebnis dar. Die Feynmangraphen stellen so eine Entwicklung ähnlich der Taylor-Entwicklung dar.

Hier werden nur die prinzipiellen Abhängigkeiten gezeigt, die Vertexfaktoren und die Propagatoren. Wir betrachten zunächst Feynman-Graphen niedrigster Ordnung, d.h. es wird nur ein Teilchen ausgetauscht.

**Vertexfaktoren :**

Beispiel: Für die Elektron-Quark Streuung

$$e\bar{u} \rightarrow e\bar{u}$$

mittels Photon-Austausch ist die Ladung am Elektron-Photon-Vertex =  $e$ , am Quark-Photon-Vertex =  $-e \cdot 2/3$ . Das Matrixelement ist also

$$\mathcal{M} \sim e \cdot (-e \cdot 2/3) = -\frac{2}{3}e^2$$

Mit  $\alpha_{em} = e^2/(4\pi)$  ist die Rate also

$$\sigma \sim \frac{4}{9}\alpha^2$$

Bei  $n$  Photon-Vertizes ist der Wirkungsquerschnitt  $\sim \alpha^n$ . Insbesondere folgt für einen bestimmten Farb-Endzustand der Quarks

$$\frac{|\mathcal{M}(e^+e^- \rightarrow u\bar{u})|^2}{|\mathcal{M}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)|^2} = \frac{4/9}{1} = \frac{4}{9}$$

Experimentell findet man aber  $12/9$ , die Quarks tragen also einen inneren Freiheitsgrad mit 3 Einstellungen, die Farbe:

$$u_{rot}, u_{blau}, u_{grün}$$

Bei anderen Austauscheteilchen als Photonen, also z.B. Gluonen, muss die elektrische Kopplungskonstante  $e$  durch die entsprechenden Kopplungen der anderen Wechselwirkungen ersetzt werden ( $g, g'$ ).

**Propagatoren :**

Virtuelle Teilchen im Zwischenzustand sind unterdrückt durch den Propagator. Ist  $q$  der 4-er Impuls des ausgetauschten Teilchens, so ist das Matrixelement

$$\mathcal{M} \sim \frac{1}{q^2 - m^2} \quad m = m_\gamma, m_{Z^0}, \dots$$

Tatsächlich gilt dies exakt nur für Spin-0 Teilchen, für Spin 1/2 und Spin-1 Teilchen hat der Propagator leicht unterschiedliche Formen. Für instabile Austauscheteilchen muss außerdem die Lebensdauer berücksichtigt werden, siehe Breit-Wigner Formel.

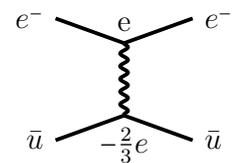


Abb. 10.6

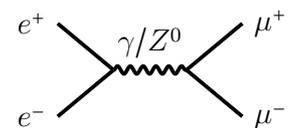
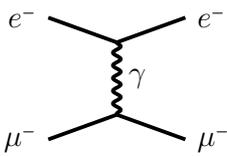


Abb. 10.7



**Abb. 10.8**  
Feynman-Graph:  $t$ -Kanal  
Streuprozess zwischen einem  
Elektron und einem Muon.

**$t$ -Kanal Prozess**

**Streuprozesse** Als Beispiel soll ein Elektron an einem Muon durch elektromagnetische Wechselwirkung streuen,

$$e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^- \tag{10.6}$$

Graphisch lässt sich diese Streuung durch Austausch eines Feldquants wie in Abb. 10.8 darstellen: An jedem der “Vertizes” gilt Energie und Impulserhaltung. Ist  $e$  ( $e'$ ) der 4-er Impuls des Elektrons vor (nach) der Streuung und  $q$  der 4-er Impuls des Photons, so ist

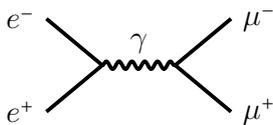
$$q = e - e' \quad t = q^2 = (e - e')^2 \tag{10.7}$$

Die Größe  $t$  wird 4-er Impulsübertrag genannt. Im Allgemeinen wird

$$t = q^2 = e^2 + e'^2 - 2ee' = 2m_e^2 - 2(E_e E_{e'} - \vec{P}_e \vec{P}'_e)$$

nicht gleich Null sein, also nicht gleich der Masse eines reellen Photons. Das Photon ist also virtuell.

**Aufgabe 10.1:** Zeigen Sie, dass bei Streuung ( $\vec{P}_e \neq \vec{P}'_e$ ) immer  $t = q^2 < 0$  gilt, das Photon also raumartig ist.



**Abb. 10.9**  
Feynman-Graph:  $s$ -Kanal  
Paarvernichtung und -  
Erzeugung.

**Paarvernichtung und Paarerzeugung** Ein virtuelles Photon kann auch durch die Vernichtung eines Elektron-Positron Paares erzeugt werden (Abb. 10.9), z.B. in dem Prozess

$$e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \tag{10.8}$$

Der Vierer-Impuls  $q$  des Photons ist in diesem Fall gegeben durch die 4-er Impulse  $e^+$  und  $e^-$  der einlaufenden Teilchen,

$$q = e^+ + e^- \quad s = q^2 = (e^+ + e^-)^2 \tag{10.9}$$

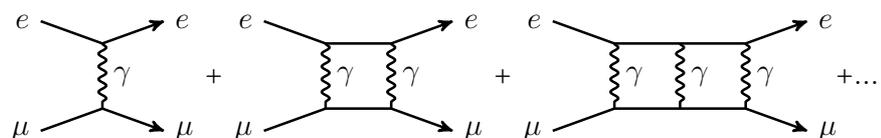
Die Virtualität des Photons ist hier einfach die Schwerpunktsenergie der Reaktion, so dass das Photon immer zeitartig ist,

$$s = q^2 > 0$$

**$s$ -Kanal Prozess**

Da das Photon virtuell ist, kann es nicht lange in diesem Zustand bleiben, sondern wird typisch nach einer Zeit  $t = 1/\sqrt{q^2}$  in andere Teilchen “zerfallen”, z.B. wieder in  $e^+e^-$  oder wie hier gezeigt in  $\mu^+\mu^-$ .

**Prozesse höherer Ordnung** Der Austausch eines einzelnen Photons ist offenbar nur eine erste - wenn auch meistens sehr gute - Näherung.



**Abb. 10.10** Beispiele für Feynman-Graphen für  $e - \mu$  Streuung in 1., 2., und 3. Ordnung.

Höhere Ordnungen wie in Abb. 10.10 beinhalten zum Beispiel den Austausch mehrerer Photonen und auch virtuelle Elektronen und Muonen. Feynman-Graphen sind also als eine Näherung an tatsächliche Prozesse in der Natur zu verstehen. Zu jedem Feynman-Diagramm gehört ein Matrixelement (eine Zahl), die berechnet werden kann. Feynman-Diagramme stellen tatsächlich diese Rechnung graphisch dar. Die hier gezeigten Diagramme sind die höheren Ordnungen einer Reihenentwicklung, die zumeist schnell konvergiert. Bei der Quanten-Elektrodynamik ist  $\alpha = 1/137 \ll 1$ , so dass höhere Ordnungen typisch nur wenige Prozent beitragen und die Reihe schnell konvergiert.

Die Wolke der virtuellen Feldquanten entspricht Feynman-Graphen wie in Abb. 10.11. In den Schleifen der Feldquanten können auch weitere Quanten, z.B.  $e^+e^-$ -Paare, entstehen, die zu messbaren Effekten führen.

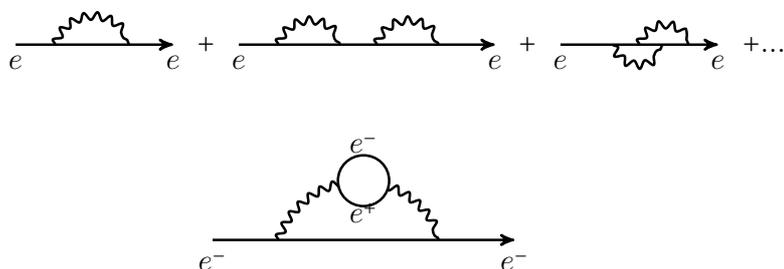


Abb. 10.11 Virtuelle Quanten in der Nähe einer Ladung.

### 10.3 Beispiele

**Beispiel QED/QCD** Mit den Vertexfaktoren und Propagatoren kann man einfache Abschätzung für die relative Rate von Prozessen erhalten. Als Beispiel dient die Rate der Prozesse

$$u\bar{u} \rightarrow d\bar{d} \quad \text{und} \quad e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$$

Bei hohen Energien,  $E_{CMS} \gg m_{u,d}, m_{e,\mu}$ , sind die Massen vernachlässigbar, und es gilt

$$\frac{\sigma(u\bar{u} \rightarrow d\bar{d})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = \frac{\alpha_s^2}{\alpha_{elm}^2} \approx \frac{0,12^2}{\left(\frac{1}{137}\right)^2} \approx 250$$

Hier steht kein Faktor für Farben, da  $u\bar{u}$  bereits in einem Farbzustand vorliegt und Farbe erhalten ist.

**Beispiel QED/schwach** Für

$$\frac{\sigma(e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-)}{\sigma(e^-\mu^+ \rightarrow \nu_e\nu_\mu)} = \frac{\frac{\alpha_{elm}^2}{t^2}}{\underbrace{\frac{\alpha_{weak}^2}{(|t|+M_W^2)^2}}_{Spin} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}$$

Dies gilt, falls  $E_{CMS} \gg m_\nu, m_e, m_\mu$ .

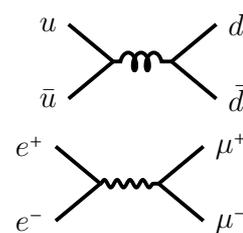


Abb. 10.12

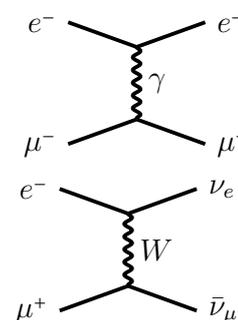


Abb. 10.13

### 10.3 Beispiele

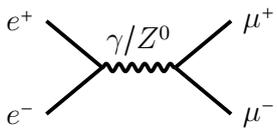


Abb. 10.14

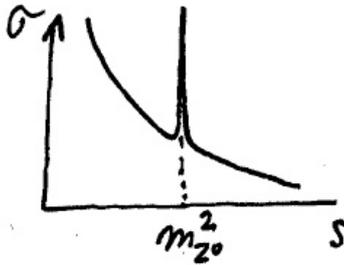


Abb. 10.15

**Summe aus Photon und  $Z^0$ -Austausch** Bei  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  liegt ein  $s$ -Kanal vor, denn

$$q^2 = (e^+ + e^-)^2 = s$$

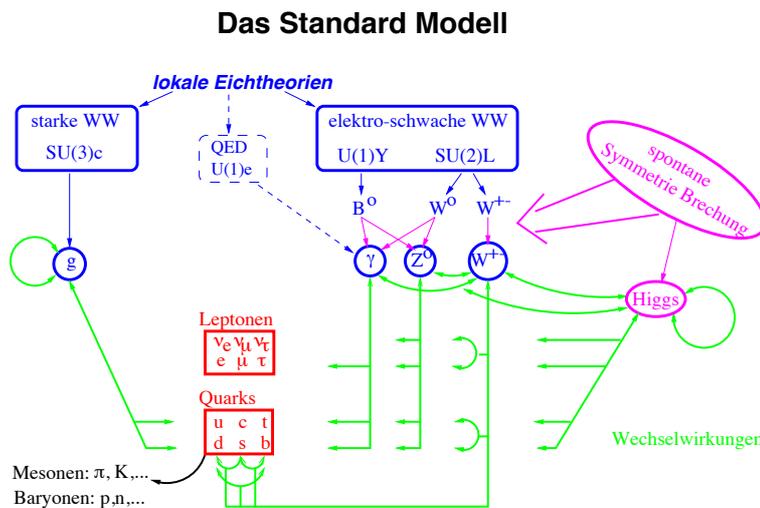
Daher ist

$$\sigma \sim \frac{1}{(s - m^2)^2} \quad m = m_\gamma, m_{Z^0}$$

Die Summe aus Photon und  $Z^0$ -Austausch,  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_\gamma + \mathcal{M}_Z$ , ergibt die Form des Wirkungsquerschnitts als Funktion von  $s$  mit der Resonanz bei  $s = m_Z^2$ .

## 10.4 Fundamentale Graphen

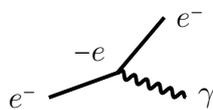
Aus der Eichtheorie und der Quantenfeldtheorie folgt die Vorhersage fundamentaler Vertizes zwischen Fermionen und Bosonen beziehungsweise mehrerer Bosonen. Zudem folgt aus der Dirac-Gleichung, dass einlaufende Teilchen durch auslaufende Anti-Teilchen ersetzt werden können, und umgekehrt. Zusätzlich werden die erlaubten Graphen durch Erhaltungssätze für Energie, Impuls und Ladungen eingeschränkt. Die daraus folgenden Feynman-Graphen zeigen alle erlaubten Prozesse in der Natur.



**Abb. 10.16** Schema des Standard-Modells mit allen Teilchen. Grüne Pfeile stellen Wechselwirkungen dar.

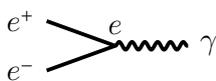
### 10.4.1 Elektromagnetismus

#### Fundamentaler Graph



**Abb. 10.17** Fundamentaler Graph für alle el. geladenen Teilchen, Teilchen ändert 4-er Impuls, Teilchensorte bleibt unverändert, Amplitude  $\sim$  el. Ladung

Hieraus lassen sich folgende weitere Graphen ableiten:



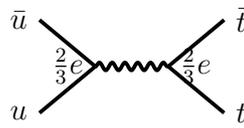
**Abb. 10.18** Ersetze Teilchen im Endzustand durch Anti-Teilchen im Anfangszustand



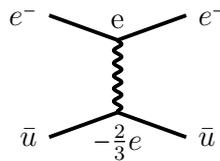
**Abb. 10.19** Zeitumkehr

**Reale Prozesse**

Für sich allein sind diese fundamentalen Vertizes als reale Prozesse wegen Energie- und Impulserhaltung verboten. Reale Prozesse setzen sich daher aus 2 oder mehr dieser fundamentalen Vertizes zusammen.



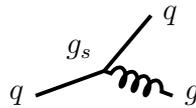
**Abb. 10.20** s-Kanal  
 Paar-Erzeugung neuer Teilchen  
 reelle Teilchen im Anfangs- und  
 Endzustand, virtuelle Teilchen im  
 Zwischenzustand,  
 erlaubt, falls  $p_u + p_{\bar{u}} = p_t + p_{\bar{t}}$   
 Schwellenenergie  $E_{CMS} \geq 2m_t$



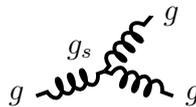
**Abb. 10.21** t-Kanal,  
 keine Schwellenenergie

**10.4.2 Starke Wechselwirkung**

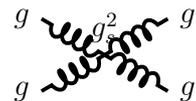
**Fundamentale Graphen**



**Abb. 10.22** Quark strahlt Gluon  
 ab:  
 Kopplung =  $g_s$ , gleich für alle  
 Quarks

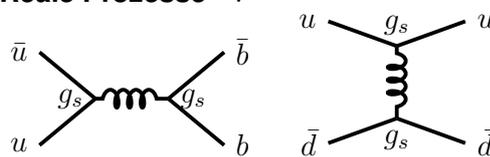


**Abb. 10.23** 3-Gluon Vertex  
 Gluon tragen selber Farbe: Gluon  
 Selbst-Wechselwirkung  
 Kopplung =  $g_s$ , wie für Quarks

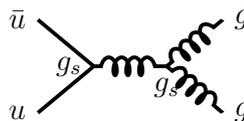


**Abb. 10.24** 4-Gluon Vertex  
 Kopplung =  $g_s^2$ , fast wie für Quarks

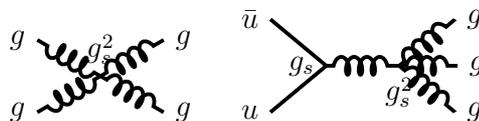
**Reale Prozesse**



**Abb. 10.25**



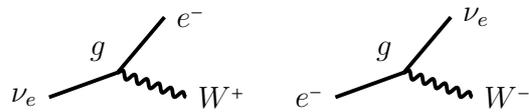
**Abb. 10.26**



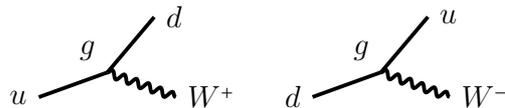
**Abb. 10.27**

### 10.4.3 Schwache Wechselwirkung

#### Fundamentale Graphen



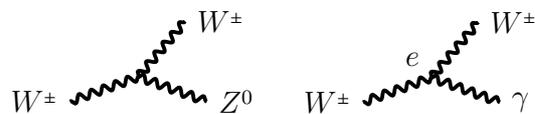
**Abb. 10.28** Lepton strahlt W ab und ändert seinen Typ, Kopplung =  $g$ , gleich für alle Leptonen



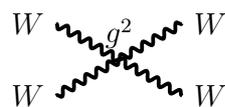
**Abb. 10.29** Quark strahlt W ab und ändert seinen Typ, Kopplung =  $g$ , gleich für alle Quarks



**Abb. 10.30** Quark oder Lepton strahlt Z ab, keine Änderung des Fermion-Typs, Kopplung unterschiedlich für  $\nu_e, e, d, u$

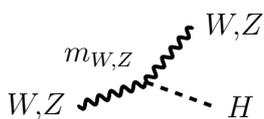


**Abb. 10.31** W und Z tragen schwache Ladung, WWZ Selbstwechselwirkung, W ist elektrische geladen und strahlt  $\gamma$  ab, Kopplung =  $e$

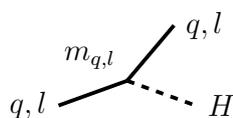


**Abb. 10.32** 4-W Vertex, Kopplung =  $g^2$

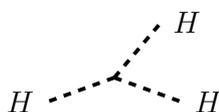
#### Fundamentale Graphen mit Higgs



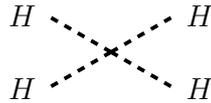
**Abb. 10.33** W, Z strahlt Higgs ab  
Kopplung  $\sim$  Masse von W, Z



**Abb. 10.34** Lepton oder Quark strahlt Higgs ab, keine Änderung des Typs  
Kopplung  $\sim$  Masse des Fermions

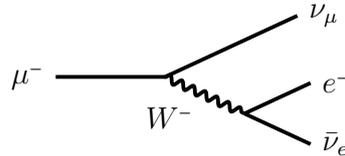


**Abb. 10.35** 3-Higgs- Selbstwechselwirkung

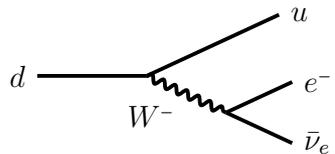


**Abb. 10.36** 4-Higgs- Selbstwechselwirkung

**Reale Prozesse**

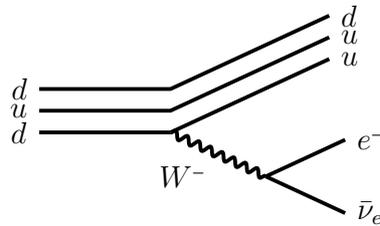


**Abb. 10.37** Muon-Zerfall  $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$ . Das  $\mu$  strahlt zunächst ein virtuelles  $W$  ab und geht in ein Muon-Neutrino über. Das  $W$  zerfällt in Elektron und Elektron-Neutrino.

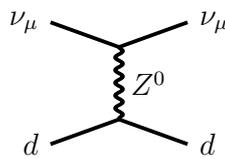


**Abb. 10.38**  $d$ -Zerfall  $d \rightarrow u e^- \bar{\nu}_e$  über ein virtuelles  $W$ . Das  $W$  zerfällt in Elektron und Elektron-Neutrino.

$$\begin{pmatrix} d \\ d \\ u \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u \\ d \\ u \end{pmatrix} e^- \bar{\nu}_e$$



**Abb. 10.39** Neutron-Zerfall  $n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e$ . Eines der  $d$  Quarks zerfällt, die anderen Quarks nehmen nicht direkt am Zerfall teil. Quark-Fluss-Diagramm



**Abb. 10.40**  $Z$ -Austausch ("neutraler Strom") in der Neutrino-Quark-Streuung  $\nu_\mu d \rightarrow \nu_\mu d$ .



**Abb. 10.41**  $W$ -Zerfall. Realer Prozess, möglich auch für ein reelles  $W$ , da  $M_W > m_\tau + m_{\nu_\tau}$



**Abb. 10.42**  $Z$ -Zerfall. Realer Prozess, möglich auch für ein reelles  $Z$ , da  $M_Z > 2m_{b,\bar{b}}$

## 10.5 Quantenzahlen und Erhaltungssätze

Emmy Noether hat 1918 zuerst das nach ihr benannte Theorem bewiesen:

- Aus jeder kontinuierlichen Symmetrie eines physikalischen Systems folgt eine Erhaltungsgröße.
- Die Symmetrie hängt dabei mit einer prinzipiell nicht beobachtbaren Eigenschaft des Systems zusammen.

### Noether-Theorem



**Quark-Flavour-Zahlen:**

Starker Isospin:  $I = 1/2$  für u, d, sonst 0  
 $I_3 = 1/2$  für u,  $I_3 = -1/2$  für d  
 $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$  Isospin (analog Spin)  
 Strangeness:  $S = 1$  für s, sonst 0  
 Charm:  $C = 1$  für c  
 Beauty:  $B = 1$  für b  
 Top:  $T = 1$  für t

Quark-Flavour-Zahlen sind in der schwachen WW nicht erhalten.

	elm WW	starke WW	schwache WW
Leptonzahl L	✓	✓	✓
Lepton-Flavour $L_e, L_\mu, L_\tau$	✓	✓	✓*
Baryonzahl B	✓	✓	✓
Quark-Flavour	✓	✓	nein
Parität	✓	✓	nein
C-Parität	✓	✓	nein
Zeitumkehr T	✓	✓	nein
el. Ladung, Farbe	✓	✓	✓

**Tabelle 10.1** Gültigkeit der Quantenzahlen in den verschiedenen Wechselwirkungen.

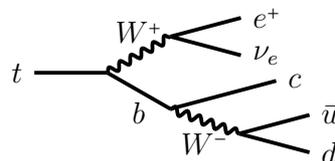
\* Ausnahme:  $L_e, L_\mu, L_\tau$  sind verletzt bei Neutrino-Oszillationen.

Aus der Erhaltung von  $L$  und  $B$  folgt, dass Leptonen und Quarks nicht einzeln erzeugt oder vernichtet werden können, sondern nur paarweise als Teilchen + Anti-Teilchen.

Beispiele:



**Abb. 10.43** Verbotener Prozess, wegen  $L_\mu, L_e$  Erhaltung in der elektromagnetischen WW



**Abb. 10.44** Erlaubter Prozess, denn (nur) die schwache WW ändert die Flavour-Quantenzahlen.

## 10.6 Symmetrie

Ein physikalisches System besitzt eine Symmetrie, wenn es unter einer Transformation seines Zustands seine Eigenschaften und Bewegungsgleichungen nicht ändert. Die Bewegungsgleichungen müssen

also in ihrer mathematischen Form invariant unter der Symmetrie-Transformation sein. Mit einer solchen Symmetrie ist verbunden, dass eine bestimmte Eigenschaft des Systems im System selber nicht beobachtbar ist.

### 10.6.1 Klassische Impulserhaltung

Als Beispiel wird ein isoliertes System aus zwei Teilchen mit Ortskoordinaten  $\vec{x}_1, \vec{x}_2$  betrachtet. Der Raum sei homogen. Dann ist prinzipiell nur die relative Position der beiden Teilchen zueinander beobachtbar, aber nicht die absolute Position des Systems im Raum. Damit kann auch der Ursprung des Koordinatensystems beliebig gewählt werden. Die Bewegungsgleichungen des System müssen also invariant sein unter der räumlichen Translation (Symmetrie-Transformation)

$$\vec{x}_i \rightarrow \vec{x}_i' = \vec{x}_i + \vec{x}_0 \quad (10.10)$$

Das Potential zwischen den beiden Teilchen kann daher nicht von der absoluten Position im Raum abhängen, sondern nur von der relativen Position der beiden Teilchen zueinander,

$$V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \quad (10.11)$$

denn explizit ist

$$\vec{x}_1' - \vec{x}_2' = (\vec{x}_1 + \vec{x}_0) - (\vec{x}_2 + \vec{x}_0) = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \quad (10.12)$$

und damit auch

$$V'(\vec{x}_1' - \vec{x}_2') = V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \quad (10.13)$$

Die Kraft auf die beiden Teilchen ist nach Newton:

$$\partial_t \vec{P}_1 = \vec{F}_1 = -\nabla_1 V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \quad (10.14)$$

$$\partial_t \vec{P}_2 = \vec{F}_2 = -\nabla_2 V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = +\nabla_1 V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \quad (10.15)$$

Der Gesamtimpuls  $\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$  ist daher erhalten,

$$\partial_t \vec{P} = \partial_t \vec{P}_1 + \partial_t \vec{P}_2 = 0 \quad (10.16)$$

Aus der Nicht-Beobachtbarkeit der absoluten Ortes folgt also die Erhaltung des Gesamtimpulses.

Mit Hilfe des Hamilton-Lagrange Formalismus lässt sich in der klassischen Physik allgemein zeigen, dass Symmetrien mit Erhaltungsgrößen zusammenhängen.

Symmetrie	nicht beobachtbar	Transformation	Erhaltungsgröße
Raum ist homogen	Position im Raum	Translation $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{x}_0$	Impuls
Raum ist isotrop	Orientierung	Rotation $\varphi' = \varphi + \varphi_0$	Drehimpuls
Zeit ist homogen	absolute Zeit	Zeit-Versch. $t' = t + t_0$	Energie

## 10.6.2 U(1) Phaseninvarianz und Ladung in der Quantenmechanik

Die Transformation eines quantenmechanischen Zustands  $|\psi\rangle$  sei

$$|\psi'\rangle = U |\psi\rangle \quad \langle\Psi'| = \langle\psi|U^\dagger \quad (10.17)$$

Eine Symmetrietransformation soll Observablen unverändert lassen. Dies gilt insbesondere für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit,

$$\langle\psi'|\psi'\rangle = \langle\psi|U^\dagger U|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle \quad (10.18)$$

so dass  $U$  unitär sein muss,  $U^\dagger = U^{-1}$ . Allgemein lassen sich unitäre Operatoren darstellen als

$$U = e^{-iaQ} \quad (10.19)$$

### globale Eichinvarianz

wobei  $a$  ein freier reeller Parameter (Zahl) und  $Q$  ein Operator sein soll, der Generator der Transformation genannt wird. Die  $e$ -Funktion ist hier als Tayler-Entwicklung aufzufassen. Wegen

$$1 = U^\dagger U = e^{+iaQ^\dagger} \cdot e^{-iaQ} = e^{ia(Q^\dagger - Q)} \quad (10.20)$$

muss  $Q$  also hermitesch und damit eine Observable sein,  $Q^\dagger = Q$ . Ist der Zustand  $|\psi\rangle$  ein Eigenzustand des Operators,  $Q|\psi\rangle = q|\psi\rangle$ , so entspricht die Transformation einfach einer Änderung der Phase des Zustands,

$$U|\psi\rangle = e^{-iaQ}|\psi\rangle = e^{-iaq}|\psi\rangle \quad (10.21)$$

Sowohl  $|\psi\rangle$  als auch der transformierte Zustand  $|\psi'\rangle$  müssen die Schrödinger-Gleichung erfüllen

$$i\partial_t|\psi\rangle = H|\psi\rangle \quad i\partial_t|\psi'\rangle = H|\psi'\rangle = HU|\psi\rangle \quad (10.22)$$

Ist  $U$  nicht explizit von der Zeit abhängig, so folgt

$$i\partial_t|\psi'\rangle = i\partial_t|U\psi\rangle = U i\partial_t|\psi\rangle = UH|\psi\rangle = HU|\psi\rangle \quad (10.23)$$

$H$  und  $U$  kommutieren also. Damit ist der Erwartungswert von  $U$  und von  $Q$  eine Erhaltungsgröße

$$i\partial_t\langle\psi|U|\psi\rangle = 0 \quad i\partial_t\langle\psi|Q|\psi\rangle = i\partial_t q = 0 \quad (10.24)$$

Die erhaltene Größe  $q$  wird Ladung genannt. Dieser einfache Fall, bei dem die unitäre Transformation nur von einem Parameter  $\alpha$  abhängt, wird  $U(1)$ -Transformation genannt. Zwei Beispiele hierfür sind in der Natur tatsächlich vorhanden, die  $U(1)_{em}$  der elektrischen Ladung  $q$  und die  $U(1)_Y$  der elektroschwachen Hyperladung  $Y$  (siehe Kapitel zur schwachen Wechselwirkung.).

### 10.6.3 U(1) Eichinvarianz und Elektromagnetismus

Es reicht für die Invarianz der Aufenthaltswahrscheinlichkeit völlig aus, dass lokal, also an jedem Ort und zu jeder Zeit, die Bedingung

$$\psi'^* \psi' = \psi^* \psi \quad (10.25)$$

erfüllt ist. Der Parameter  $\alpha$  muss also keine universelle Konstante sein, sondern kann selber eine Funktion von Ort und Zeit sein,

$$\Psi' = U \Psi = e^{-i\alpha(x,t)Q} \Psi \quad (10.26)$$

Da die Phase und damit auch  $\alpha$  prinzipiell nicht beobachtbar ist, kann man dies sogar zu einem Postulat erklären. Dies ist die Grundidee der Eichtheorie, mit der man alle Eigenschaften des Elektromagnetismus (und auch der schwachen und starken Wechselwirkung) ableiten kann.

Sehr allgemein kann man dies zeigen, indem man eine Lagrange-Dichte für die Dirac-Gleichung einführt und hierfür lokale Eichinvarianz fordert. Im Folgenden wird dagegen nicht die Lagrange-Dichte sondern direkt die Bewegungsgleichung, also die Dirac-Gleichung, betrachtet.

In allen quantenmechanischen Wellengleichungen für freie Teilchen

$$\underbrace{i\partial_t \Psi = -\frac{\nabla^2}{2m} \Psi}_{\text{Schrödinger}} \quad \underbrace{(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2)\Phi}_{\text{Klein-Gordon}} \quad \underbrace{(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0}_{\text{Dirac}}$$

tauchen Ableitungen nach Ort und Zeit auf, die bei einer lokalen Eichtransformation die Form der Wellengleichung ändern. Zum Beispiel geht bei der Dirac-Gleichung der Massenterm und der kinetische Term durch eine U(1) Eichtransformation über in

$$m\Psi' = e^{-i\alpha q} m\Psi \quad (10.27)$$

$$\partial_\mu \Psi' = e^{-i\alpha q} \partial_\mu \Psi - iq e^{-i\alpha q} (\partial_\mu \alpha) \Psi \quad (10.28)$$

Der letzte Term rechts ändert die Form der Dirac-Gleichung für  $\Psi'$ , die Bewegungsgleichung 10.27 ist also nicht eichinvariant. Wir verallgemeinern daher die Dirac-Gleichung zu einer verbesserten, d.h. eichinvarianten Gleichung mit der sogenannten *kovarianten Ableitung*  $D_\mu$ .

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi = 0 \quad (10.29)$$

Es soll lokale Eichinvarianz gelten, d.h.

$$(i\gamma^\mu D'_\mu - m)\Psi' = e^{-i\alpha q} (i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi = 0 \quad (10.30)$$

Dies ist der Fall, wenn

$$D'_\mu \Psi' = e^{-i\alpha q} D_\mu \Psi \quad (10.31)$$

#### lokale Eichinvarianz

Diese Bedingung für  $D_\mu$  kann man erfüllen mit dem Ansatz

$$D_\mu \Psi = (\partial_\mu + iqA_\mu(\vec{x},t)) \Psi \quad (10.32)$$

denn

$$D'_\mu \Psi' = (\partial_\mu + iqA'_\mu) (e^{-i\alpha q} \Psi) \quad (10.33)$$

$$= e^{-i\alpha q} [(\partial_\mu \Psi) - iq(\partial_\mu \alpha) \Psi + iqA'_\mu \Psi] \quad (10.34)$$

Der Ausdruck in der Klammer ist tatsächlich gleich  $D_\mu \Psi$  falls

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha \quad (10.35)$$

### Eichung des Potentials

Offenbar darf  $A_\mu$  um den Gradienten einer skalaren Funktion verändert werden, ohne dass sich die Bewegungsgleichung ändert. Da  $\alpha = \alpha(\vec{x},t)$  sind auch die vier Komponenten von  $A_\mu$  Funktionen von Ort und Zeit. Es muss daher als ein Potential aufgefasst werden.<sup>16</sup> Damit ist die eichinvariante Dirac-Gleichung für ein Teilchen im Potential  $A_\mu$

$$[i\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) - m] \Psi = 0 \quad (10.39)$$

Multipliziert man von links mit  $\gamma^0$  so folgt daraus

$$i\partial_t \Psi = H\Psi = \gamma^0 \vec{\gamma} (\vec{P} - q\vec{A}) \Psi + m\gamma^0 \Psi + q\varphi \Psi \quad (10.40)$$

Dies entspricht der schon von der Schrödinger-Gleichung bekannten Form der *minimalen Kopplung*, d.h. der Ersetzung der Operatoren  $E, \vec{P}$  durch

$$\vec{P} \rightarrow \vec{P} - q\vec{A}, \quad E \rightarrow E - q\varphi \quad (10.41)$$

bei der Einführung des Elektromagnetismus. Die minimale Kopplung ist also eine Folge der Forderung nach lokaler Eichinvarianz.

Der Ausdruck in der obigen Gleichung

$$q \cdot A^\mu \cdot \psi \quad (10.42)$$

entspricht der Wechselwirkung eines Fermions der Ladung  $q$  mit dem elektromagnetischen Feld. Die Ladung  $q$  oder genauer  $i\gamma^\mu q$  ist genau der Vertexfaktor in einem Feynman-Diagramm, bei dem ein Fermion ein Photon abstrahlt.

<sup>16</sup> Die Eichung des Potentials ist bereits aus der klassischen Elektrodynamik bekannt, wenn man die Komponenten von  $A_\mu$  mit dem skalaren Potential  $\varphi(\vec{x},t)$  und Vektorpotential  $\vec{A}(\vec{x},t)$  identifiziert,

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \varphi \\ \vec{A} \end{pmatrix}^\mu \quad (10.36)$$

für die ja Eichtransformationen der Form

$$\varphi' = \varphi + \partial_t \alpha(\vec{x},t) \quad \vec{A}' = \vec{A} - \nabla \alpha(\vec{x},t) \quad (10.37)$$

das elektrische Feld und das Magnetfeld unverändert lassen,

$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \partial_t \vec{A} \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (10.38)$$

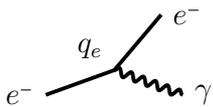


Abb. 10.45

### 10.6.4 Vorhersagen der Eichtheorien

Eichtheorien machen ganz allgemein die folgenden Aussagen, die tatsächlich alle experimentell bestätigt worden sind:

- Es werden neue Vektorfelder  $A_\mu$  vorhergesagt.
- Die Quanten von Vektorfeldern haben Spin 1.
- Die dimensionslose *Ladung*  $q$  von  $\Psi$  ist erhalten, aber der Zahlenwert ist nicht vorhergesagt und eine echte Naturkonstante.
- Die Vektorfelder sind auf ganz bestimmte Weise in den Bewegungsgleichungen mit den Fermionen  $\Psi$  gekoppelt,  $q \cdot A_\mu \cdot \gamma^\mu \Psi$ . Dies entspricht den fundamentalen Vertices der jeweiligen Theorie.
- Diese  $\gamma^\mu$  Kopplungen implizieren, dass die Chiralität der Fermionen an jedem Vertex erhalten bleibt.
- Die Vektorfelder  $A_\mu$  haben keine Masse  $m_A$ , denn ein zusätzlicher Massenterm wie  $m_A A^\mu$  wäre nicht eichinvariant. Dies gilt für Photon und Gluon. Die Massen von  $W, Z$  sind dagegen nicht Null. Der Grund hierfür ist der Higgs-Mechanismus.

#### **Eichfelder:**

Photon: Elektromagn. WW

$W^\pm, Z^0$ : Schwache WW

Gluon: Starke WW