

Physik 5

Teilchen und Kerne

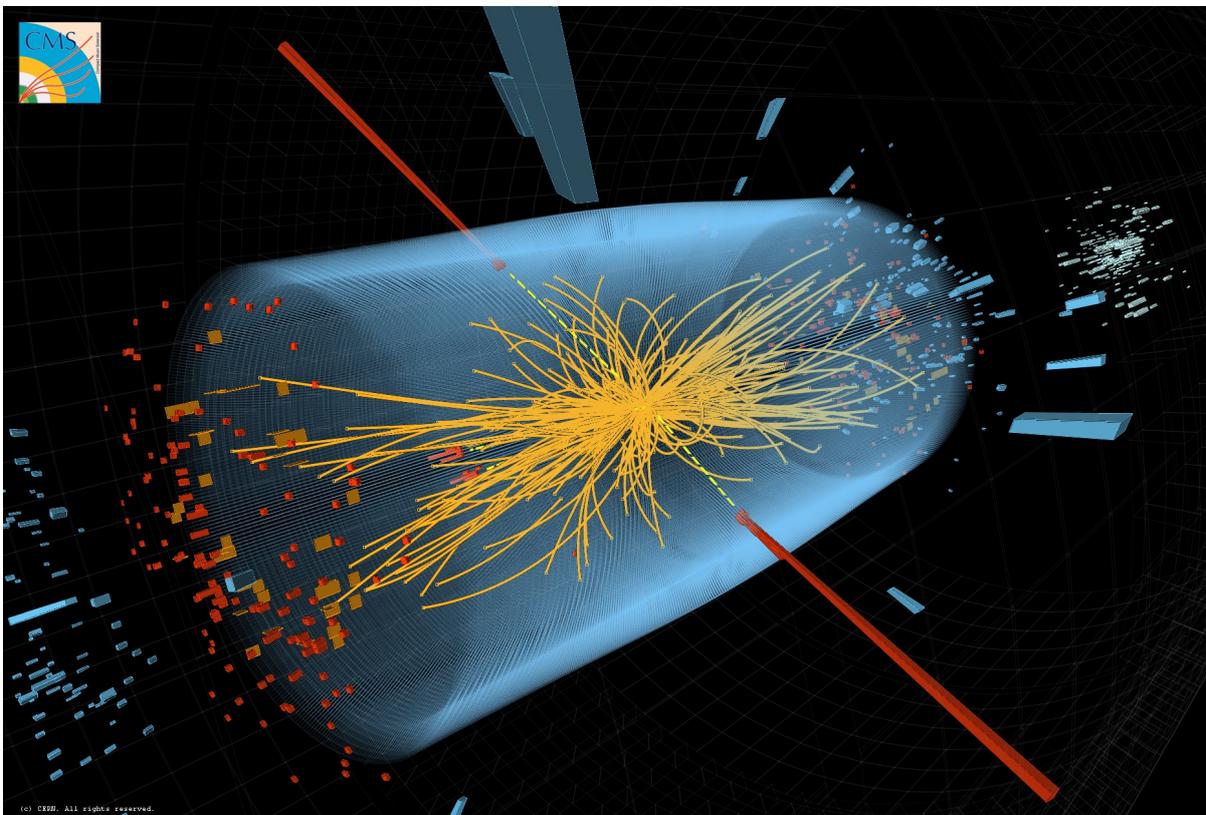
Notizen zur Vorlesung im Wintersemester 2014-2015

Peter Schleper

19. Oktober 2015

Institut für Experimentalphysik, Universität Hamburg
peter.schleper@physik.uni-hamburg.de

http://www.desy.de/~schleper/lehre/physik5/WS_2014_15



Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	8
1.1	Bausteine der Materie	8
1.2	Kräfte	11
2	Streuprozesse und Zerfälle	17
2.1	Wirkungsquerschnitt	17
2.2	Rutherford-Streuung klassisch	20
2.3	Streuprozesse in der Quantenmechanik	23
2.3.1	Fermi's Goldene Regel	23
2.3.2	Rutherford-Streuung	26
2.4	Struktur der Hadronen und Kerne	28
2.4.1	Formfaktor	28
2.4.2	Messungen der Proton- und Kernstrukturen	29
2.5	Relativistische Quantenmechanik	34
2.5.1	Schrödinger-Gleichung	34
2.5.2	Klein-Gordon-Gleichung	34
2.5.3	Dirac Gleichung	35
2.6	Yukawa Potential und Reichweite der Kräfte	36
2.7	Zerfälle	38
2.7.1	Zerfallsgesetz	38
2.7.2	Breit-Wigner Verteilung und virtuelle Teilchen	39
2.8	Quantenfelder und Feynman-Diagramme	41
2.9	Feynman-Graphen und Wirkungsquerschnitte	44
2.10	Wirkungsquerschnitte und Zerfallsraten	46
3	Wechselwirkungen und Symmetrien	48
3.1	Fundamentale Graphen	48
3.1.1	Elektromagnetismus	48
3.1.2	Starke Wechselwirkung	49
3.1.3	Schwache Wechselwirkung	50
3.2	Quantenzahlen und Erhaltungssätze	52
3.3	Symmetrie	54
3.3.1	Klassische Impulserhaltung	54
3.3.2	U(1) Phaseninvarianz und Ladung in der Quantenmechanik	55
3.3.3	U(1) Eichinvarianz und Elektromagnetismus	56
3.3.4	Vorhersagen der Eichtheorien	57
3.4	Messungen zur Fermion-Fermion-Streuung	58
4	Schwache Wechselwirkung	63
4.1	Historie der Schwachen Wechselwirkung	63
4.2	Fermi-Konstante und W-Propagator	64
4.3	Paritätsverletzung und V-A Theorie	65
4.4	Standard-Model der elektroschwachen Wechselwirkung	68
4.5	SU(2) Symmetrie der schwachen Wechselwirkung	70

4.6	Neutrino-Streuung	72
4.6.1	Geladener Strom	72
4.6.2	Neutrale Ströme: Z^0 Austausch	73
4.7	Entdeckung von W und Z	74
4.8	Z^0 -Physik an e^+e^- Beschleunigern	76
4.9	WW Produktion in e^+e^- Kollisionen	80
4.10	W und Z Produktion in $p\bar{p}$ Kollisionen	81
5	Elektroschwache Symmetriebrechung: Higgs	83
5.1	Der Higgs-Mechanismus im Standard-Modell	84
5.2	Fermion-Higgs Kopplung und Fermion-Massen	86
5.3	Eigenschaften des Higgs-Teilchens	87
5.4	Higgs Zerfälle	87
5.5	Entdeckung des Higgs-Bosons	89
5.6	Zusammenfassung der Resultate zum Higgs vom LHC	93
6	Flavour und Mischung der Fermionen	95
6.1	Übergänge zwischen Quarks verschiedener Genera- tionen	95
6.2	Massen und Mischungen der Neutrinos	98
7	Starke Wechselwirkung	100
7.1	Quarks und Gluonen	100
7.2	Potential der QCD	102
7.3	Fragmentation und Jets	104
7.4	Proton-Struktur	106
7.5	Farbe und $SU(3)_C$	109
8	Kerne	111
8.1	Untersuchungsmethoden zur Kernphysik	111
8.2	Eigenschaften der Kerne	111
8.2.1	Ausdehnung des Kerne	111
8.2.2	Massen und Bindungsenergien der Kerne	112
8.3	Kernmodelle	114
8.3.1	Tröpfchen-Modell der Kerne	114
8.3.2	Fermi-Gas-Modell der Kerne	116
8.3.3	Schalenmodell	116
8.4	Kernzerfälle	117
8.4.1	α -Zerfall der Kerne	117
8.4.2	β -Zerfälle der Kerne	119
8.4.3	γ -Zerfälle und innere Konversion	123
8.5	Anwendungen der Kernphysik	123
9	Kosmologie und Physik jenseits des Standard-Modells	124
9.1	Grenzen des Standard-Modells	124
9.2	Phasen und Phasenübergänge im Kosmos	126
9.3	Kerne im Kosmos	127
9.3.1	Sterne und die Entstehung der Elemente	127
9.3.2	Big Bang Nukleonsynthese	128
9.4	Teilchen-Epochen im frühen Universum	129

9.5	Dunkle Materie und Dunkle Energie	130
Anhang		132
A Natürliche Einheiten		133
B Relativistische Kinematik		135
B.1	4-er Vektoren und Lorentz-Transformation	135
B.2	4-er Impulse	137
B.3	Mehr-Teilchen Systeme	138
B.4	Zwei-Körper-Zerfall	140
C Detektoren zur Messung elementarer Teilchen		141
C.1	Übersicht	141
C.2	Geladene Teilchen	141
C.2.1	Ionisation und Bethe-Bloch-Formel	141
C.2.2	Bremsstrahlung	144
C.3	Spurdetektoren	146
C.3.1	Impulsmessung im Magnetfeld	146
C.3.2	Nebelkammern und Blaskammern	146
C.3.3	Gas-Detektoren	150
C.3.4	Halbleiter-Detektoren	155
C.4	Photonen und elektromagnetische Schauer	157
C.5	Hadronische Schauer	159
C.6	Kalorimeter	160
C.7	Detektorkonzepte und Identifizierung von Teilchen . .	161
D Dirac-Gleichung		164
D.1	Kovariante Form und Hamilton	164
D.2	Bestimmung der γ -Matrizen	165
D.3	Lösungen der Dirac-Gleichung	166
D.4	Drehimpuls und Spin	168
D.5	Helizität und Chiralität	169
D.6	Chiralitätserhaltung an Vertizes mit Vektorströmen .	170

Vorwort

Scheinbar besteht die uns umgebende Natur und auch wir selber aus Atomen mit einem zentralen Kern und einer Hülle aus Elektronen, die über elektrische Kräfte (oder Photonen) aneinander gebunden sind. Die Kerne wiederum bestehen aus Protonen und Neutronen, aus deren Zahl sich im Wesentlichen die Masse der Atome, ihre elektrische Ladung und die Chemie der Atome ergibt.

Dieses Weltbild ist sicher zu naiv und so nicht richtig. Beginnend in den 1930er Jahren hat sich zunächst durch experimentelle Entdeckungen in der Höhenstrahlung, später vor allem an hochenergetischen Teilchenbeschleunigern und zunehmend durch theoretische Erkenntnisse ein Weltbild entwickelt, das sich heute das Standard-Modell der Teilchenphysik nennt. Zu diesen Entdeckungen gehört die Anti-Materie (1932), die Entdeckung von insgesamt 12 fundamentalen Teilchen, die ähnliche Eigenschaften wie das Elektron haben, sowie von über hundert weiteren Teilchen, die ähnlich wie Proton und Neutron als gebundene Zustände von sogenannten Quarks interpretiert werden können. Aus diesen Beobachtungen wurde zunächst theoretisch gefolgert, dass die Photonen nur die einfachste Spielart eines allgemeineren Konzepts sind, das auf Symmetrien der Natur beruht, und mit dem zusätzlich zur elektromagnetischen Kraft auch zwei weitere Naturkräfte formuliert werden können, diese sogenannte "schwache" und die "starke" Kraft. Obwohl sie theoretisch sehr ähnlich wie der Elektromagnetismus formuliert werden besitzen sie jedoch auch fundamental andere Eigenschaften. Die schwache Kraft erlaubt Umformungen verschiedener Teilchensorten ineinander, und die starke Kraft bindet die Quarks zu Protonen und Neutronen und diese wiederum zu Atomkernen.

Zu den fundamentalen Erkenntnissen gehört es, dass das Konzept der Symmetrien Vorhersagen von Naturgesetzen erlaubt und Beziehungen zwischen den Zahlenwerten von ansonsten scheinbar unabhängigen Naturkonstanten erfordert. Viele der daraus resultierenden Vorhersagen wurden später experimentell bestätigt, zuletzt die Vorhersage des Higgs-Teilchens durch seine Entdeckung im Jahr 2012.

Das Standard-Modell ist allerdings in seiner derzeitigen Form nicht in der Lage vorherzusagen oder zu erklären, wie sich das Universum aus der heißen Phase nach dem Urknall in seinen jetzigen Zustand entwickelt hat. Hierzu fehlen entscheidende Komponenten wie das Fehlen von Anti-Materie sowie die Existenz großer Mengen dunkler Materie und möglicher dunkler Energie. Erklärungen hierfür erfordern die Verletzung von Symmetrien (CP-Verletzung) oder neue, bisher unbekannte Symmetrien und erhaltene Quantenzahlen, möglicherweise aber auch Effekte durch die Gravitation, die als einzige Naturkraft bisher nicht ins Standard-Modell inkorporiert werden konnte. Es liegt nahe, dass diese Effekte Erweiterungen

Standard-Modell der Teilchenphysik

des Standard-Modells in Energiebereichen oberhalb der jetzigen im Labor erreichten Energien erfordern. Das Standard-Modell ist daher als Approximation an eine allgemeinere Theorie zu verstehen, die aber bereits ausreichend genau ist, um experimentelle Beobachtungen im Rahmen ihrer jetzigen Präzision und bei ihren jetzigen Energien vorherzusagen.

Im Folgenden wird dieses Standard-Modell der Teilchenphysik beschrieben sowie die Experimente, die zu seiner Entwicklung geführt haben. Die Kernphysik wird als Phänomen der starken Wechselwirkung eingeführt. Abschließend werden kosmologische Beobachtungen und Erweiterungen des Standard-Modells andiskutiert.

1 Einleitung

1.1 Bausteine der Materie

Die Natur bei kleinen Längenskalen wird geprägt durch

- Elektronen, u -Quarks und d -Quarks. Diese Teilchen sind vermutlich elementar und punktförmig, d.h. sie haben keine innere Ausdehnung. Sicher ist, dass ihr Radius sehr klein ist,

$$R \leq 10^{-19} \text{ m}$$

- u - und d -Quarks bilden gebundene Systeme, unter anderem

$$\text{Proton } p = uud \quad (1.1)$$

$$\text{Neutron } n = udd \quad (1.2)$$

deren Masse $\approx 1 \text{ GeV}/c^2$ und Radius $\approx 1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$ beträgt.

- Protonen und Neutronen bilden die Kerne der Atome. Volumen, Masse und Ladung der Kerne ergeben sich im Wesentlichen aus der Anzahl der beteiligten Protonen und Neutronen. Die Protonen stoßen sich elektrisch ab. Die Bindung der Kerne muss daher durch eine neue Kraft entstehen, der Starken Wechselwirkung.
- Neutrale Atome sind gebundene Systeme aus einem Kern mit einer entsprechenden Anzahl von Elektronen in einer äußeren Hülle. Eigenschaften wie z.B. der Radius der Hülle von typisch 10^{-10} m können durch elektromagnetische Wechselwirkung und Quanteneffekte erklärt werden.
- Aus den Eigenschaften der Atome folgen auch die Eigenschaften der Moleküle und Festkörpern sowie der chemischen Bindungen.

Aus diesen Zusammenhängen zwischen den elementaren Quanten (e, u, d) und den daraus zusammengesetzten, zunehmend komplexeren Strukturen leitet sich das Ziel der Teilchenphysik ab:

- Ziel der Teilchenphysik ist es, alle Naturgesetze und Teilchen durch wenige fundamentale Prinzipien und Naturgesetze zu erklären.

Die sehr kleinen Längenskalen ($\leq 1 \text{ fm}$) lassen sich nach der Unschärferelation der Quantenmechanik nur mit sehr hohen Teilchenimpulsen untersuchen,

$$\Delta P_x \cdot \Delta x \geq \hbar \quad (1.3)$$

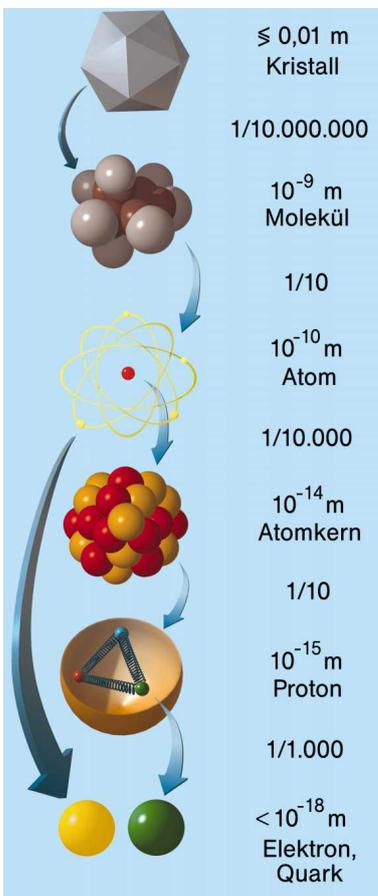


Abb. 1.1
Struktur der Materie vom Quark zum Kristall.

Möchte man also z.B. mit einem Elektron ein Streuexperiment ausführen, um die innere Struktur des Protons ($\Delta x \approx 1 \text{ fm}$) zu untersuchen, so braucht man mindestens Elektronimpulse der Größenordnung

$$\Delta P_x \geq \frac{\hbar}{1 \text{ fm}} \geq 200 \text{ MeV}/c \quad (1.4)$$

Ein Vergleich zur Elektronmasse von $m_e = 0,511 \text{ MeV}/c^2$ zeigt, dass das Elektron hoch-relativistisch sein muss. Berechnungen von Prozessen in der Teilchenphysik müssen daher immer auf Basis relativistischer Kinematik und relativistischer Quantenmechanik durchgeführt werden.

Astro-Teilchenphysik: In der Natur lassen sich hochenergetische Teilchen in der kosmischen Strahlung (Höhenstrahlung) beobachten. Diese besteht hauptsächlich aus Protonen und Elektronen, die in Supernova-Explosionen beschleunigt werden und extrem hohe Energien erreichen können. Abb. 1.2 zeigt, dass in Reaktionen dieser Teilchen mit den Teilchen in der Atmosphäre zahlreiche weitere Teilchen neu entstehen und selbst auf der Erde noch nachgewiesen werden können. Bis Ende der 1930er Jahre wurden so auch Teilchen entdeckt, die auf der Erde bis dahin unbekannt waren. Hierzu gehören Anti-Elektronen, Myonen und Pionen. Die Rate hochenergetischer Teilchen ist allerdings sehr gering.

Teilchenphysik an Beschleunigern: Künstlich lassen sich höchste Energien erzielen, wenn man Elektronen, Protonen oder deren Anti-Teilchen in großen Teilchenbeschleunigern wie dem "Large Hadron Collider" (LHC) beschleunigt (Abb. 1.3 und 1.4). Die höchste erreichte Energie bisher ist 4000 GeV . Abb. 1.5 zeigt eine Proton-Proton-Reaktion am LHC mit vielen neu erzeugten Teilchen. In vielen Experimenten seit den 1960er Jahren wurden so mehr als Hundert verschiedene weitere Teilchen entdeckt, zuletzt im Jahr 2012 das Higgs-Boson.

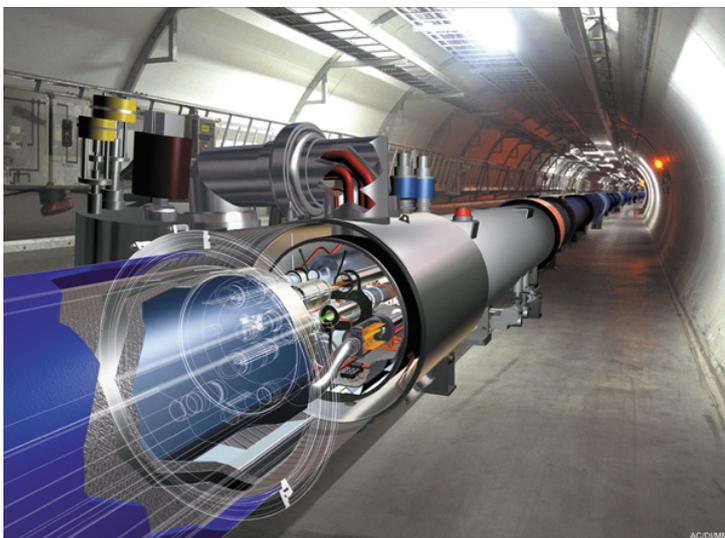


Abb. 1.4 Schematische Darstellung der Magnete im LHC.

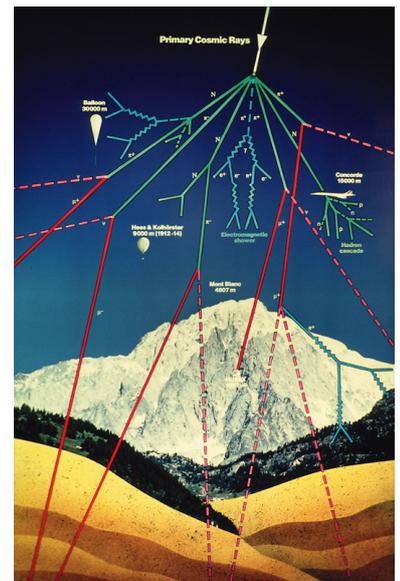


Abb. 1.2

Darstellung eines hochenergetischen Teilchens, das aus dem Kosmos auf die Atmosphäre trifft und dort zahlreiche neue Teilchen erzeugt.

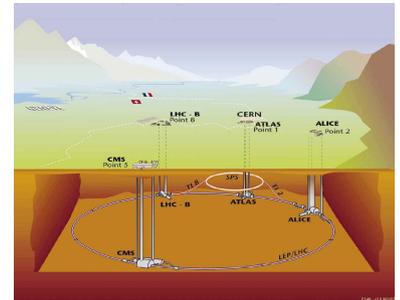


Abb. 1.3

Schematische Darstellung des LHC Beschleunigers am CERN.

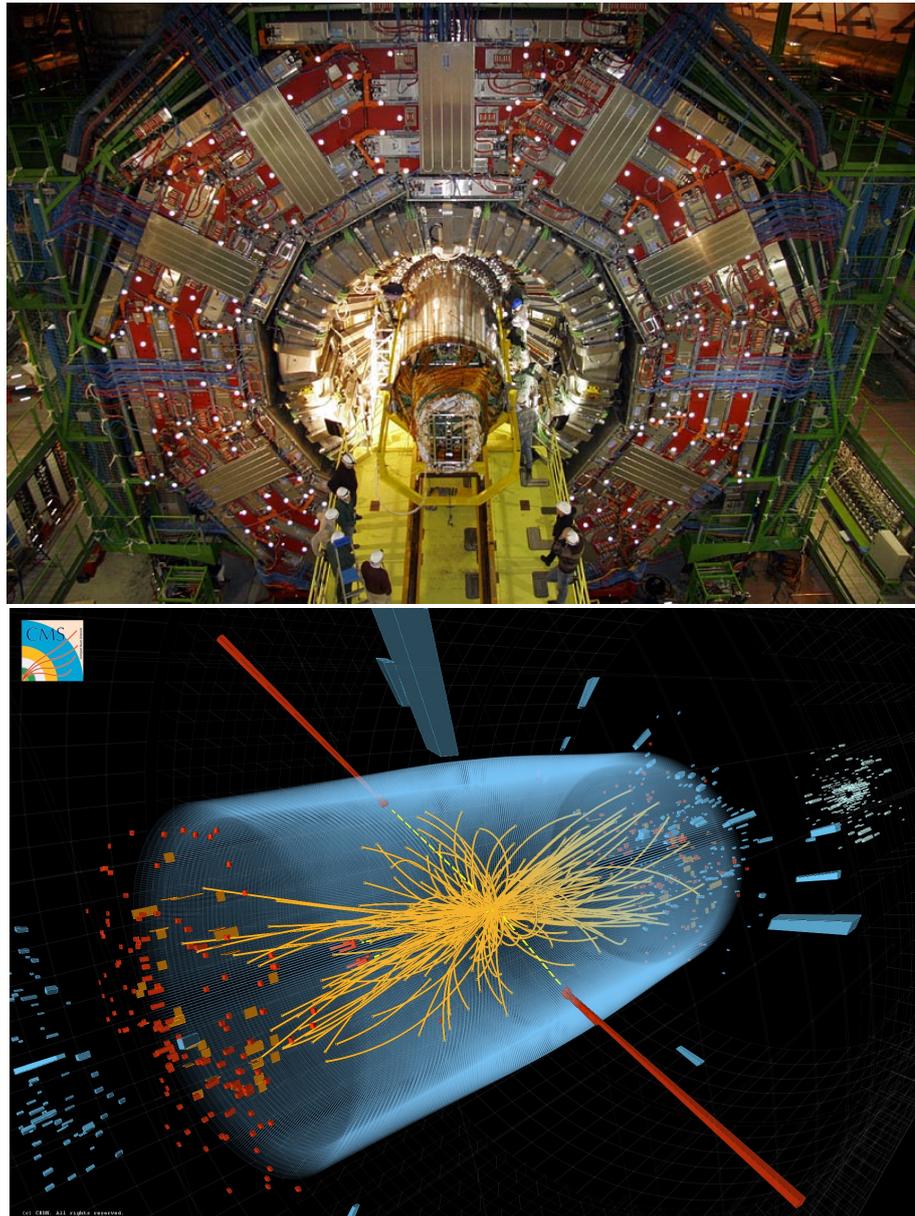


Abb. 1.5 Foto des CMS Experiments am LHC und Bild eines Kandidaten für den Zerfall eines Higgs-Bosons.

Experimentell findet man also, dass es außer den Elektronen, u - und d -Quarks viele weitere Teilchen gibt. Insgesamt ergibt sich aus all diesen Experimenten folgendes Bild (siehe Tabellen 1.1,1.2):

- Die Fermionen lassen sich in drei Generationen von Leptonen und Quarks einteilen:

6 Leptonen			6 Quarks		
1	2	3	1	2	3
ν_e	ν_μ	ν_τ	u	c	t
e	μ	τ	d	s	b

Leptonen und Quarks

- Leptonen e, μ, τ : Zusätzlich zum Elektron gibt es mit dem Myon (μ) und dem Tau (τ) zwei weitere geladene Teilchen, die zwar viel schwerer sind, aber ansonsten praktisch die gleichen Eigenschaften haben (elementar, Spin 1/2, el. Ladung $-e$, gleiche schwache Wechselwirkung).

- Leptonen ν_e, ν_μ, ν_τ : Zu jedem geladenen Lepton gibt es ein weiteres neutrales Teilchen (Neutrino). Neutrinos haben eine sehr viel kleinere Masse, aber ansonsten ähnliche Eigenschaften (elementar, Spin 1/2, gleiche schwache Wechselwirkung).
- Quarks u, d, c, s, t, b : Parallel zu den sechs Leptonen gibt es auch sechs Quarks. Diese tragen elektrische Ladung:

$$u, c, t: +\frac{2}{3}e \quad (1.5)$$

$$d, s, b: -\frac{1}{3}e \quad (1.6)$$

Sie sind ebenfalls elementar und haben Spin 1/2. Zusätzlich tritt jedes Quark in drei verschiedenen Variationen auf, den drei "Farben" (rot, grün und blau). Die Farben entsprechen den "Ladungen" der starken Wechselwirkung. Durch diese drei weiteren Ladungen ziehen sich Quarks gegenseitig an und bilden daher stark gebundene Systeme, die Hadronen.

- Anti-Teilchen: Zu jedem Lepton und Quark gibt es ein Anti-Teilchen. Es hat jeweils genau die gleiche Masse und Spin, aber entgegengesetzte Ladung und bei den Quarks auch entgegengesetzte Farbe (anti-rot, anti-grün, anti-blau).

Neben diesen 12 elementaren Teilchen und ihren Anti-Teilchen bilden die Quarks folgende zusammengesetzte Teilchen, die insgesamt Hadronen genannt werden:

- Mesonen aus jeweils einem Quark und einem Anti-Quark. Mesonen haben Spin 0, 1, 2, ... (Summe der Spins und der Bahndrehimpulse). Die Masse der Mesonen ergibt sich aus den Quarks, ihrer Bindungsenergie und ihrem Spin.
- Baryonen aus jeweils drei Quarks. Baryonen haben Spin 1/2, 3/2, ... Zu ihnen gehören Proton und Neutron. Anti-Baryonen bestehen aus drei Anti-Quarks.

Mesonen und Baryonen sind Hadronen

1.2 Kräfte

Das wichtigste quantitative Konzept zur Beschreibung von Teilchenreaktionen ist natürlich die Quantenmechanik, allerdings nicht in Form der Schrödinger-Gleichung, denn diese ist nicht-relativistisch und bietet außerdem auch keine Möglichkeit, die Entstehung von neuen Teilchen zu beschreiben. Generell muss daher in Berechnungen anstelle der nicht-relativistischen Schrödinger-Gleichung eine relativistische Formulierung der Quantenmechanik verwendet werden. Aus Einsteins berühmter Äquivalenz von Energie und Masse

$$E = m c^2$$

folgt direkt zumindest prinzipiell die Möglichkeit, aus der kinetischen Energie von Teilchen im Anfangszustand die Masse neuer Teilchen zu erzeugen. In Abb. 1.5 wurde die Energie im Anfangszustand

	Name	Masse (GeV)	Ladung (e)	Farbe
Spin 0				
H	Higgs	125,7	0	-
Spin 1/2				
neutrale Leptonen				
ν_e	e-Neutrino	$< 10^{-9}$	0	-
ν_μ	μ -Neutrino	$< 10^{-9}$	0	-
ν_τ	τ -Neutrino	$< 10^{-9}$	0	-
geladene Leptonen				
e	Elektron	0,000511	-1	-
μ	Myon	0,106	-1	-
τ	Tau	1,777	-1	-
up-artige Quarks				
u	up-Quark	0,003	+2/3	ja
c	charm-Quark	1,2	+2/3	ja
t	top-Quark	173	+2/3	ja
down-artige Quarks				
d	down-Quark	0,006	-1/3	ja
s	strange-Quark	0,1	-1/3	ja
b	bottom-Quark	4,2	-1/3	ja
Spin 1				
Eich-Bosonen				
γ	Photon	0	0	-
W^\pm	W-Boson	80,42	± 1	-
Z^0	Z-Boson	91,19	0	-
g	Gluon	0	0	ja

Tabelle 1.1 Tabelle der 17 fundamentalen Quanten des Standard-Modells sortiert nach ihrem Spin. Gelistet ist außerdem die Masse (in GeV), die elektrische Ladung in Einheiten der Elementarladung und ob die Teilchen bezüglich der starken Wechselwirkung Farbe tragen. Nicht gezeigt ist das hypothetische Graviton mit Spin 2, das das Austauschquant der Gravitation sein würde.

linkshändige Doubletts						
Lepton-Generationen			Quark-Generationen			I_3
$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}$	$+1/2$ $-1/2$
rechtshändige Singletts						
Lepton-Generationen			Quark-Generationen			I_3
$\nu_{eR}, e_R,$	$\nu_{\mu R}, \mu_R,$	$\nu_{\tau R}, \tau_R,$	$u_R, d_R,$	$c_R, s_R,$	t_R, b_R	0

Tabelle 1.2 Tabelle der Spin 1/2 Fermionen des Standard-Modells, sortiert in die jeweils drei Generationen der Leptonen und der Quarks. Der schwache Isospin (dritte Komponente I_3) entspricht der Ladung der schwachen Wechselwirkung. Nur linkshändige Teilchen (Index L) tragen schwachen Isospin, rechtshändige Teilchen (Index R) dagegen nicht.

Mesonen: $q + \bar{q}'$			
mit \bar{u}, \bar{d}	mit \bar{s}	mit \bar{c}	mit \bar{b}
u, d: Pionen			
$u\bar{d} : \pi^+(0,1396)$			
$u\bar{u}, d\bar{d} : \pi^0(0,1350)$			
s: Kaonen			
$s\bar{u} : K^-(0,494)$			
$s\bar{d} : K^0(0,498)$			
c: D-Mesonen			
$c\bar{d} : D^+(1,869)$	$c\bar{s} : D_s^+(1,97)$		
$c\bar{u} : D^0(1,865)$		$c\bar{c} : J/\Psi(3,09)$	
b: B-Mesonen			
$b\bar{u} : B^-(5,279)$		$b\bar{c} : B^-(6,40)$	
$b\bar{d} : \bar{B}^0(5,279)$	$b\bar{s} : \bar{B}_s^0(5,47)$		$b\bar{b} : \Upsilon(9,46)$
Baryonen: $q + q' + q''$			
mit u, d	mit s	mit c	mit b
leichte Quarks			
$uud : p(0,9383)$			
$udd : n(0,9396)$			
$uuu : \Delta^{++}(1,23)$			
$ddd : \Delta^-(1,23)$			
schwere Quarks			
	$uds : \Lambda^0(1,12)$	$udc : \Lambda_c^+(2,29)$	$udb : \Lambda_b^0(5,62)$
	$uss : \Xi^0(1,32)$	$usc : \Xi_c^+(2,47)$	
	$sss : \Omega^-(1,67)$		

Tabelle 1.3 Tabelle mit einigen Beispielen der leichtesten Hadronen (Mesonen und Baryonen). Gelistet ist der Quark-Inhalt, das verwendete Symbol sowie (in Klammern in GeV) die Masse des Hadrons.

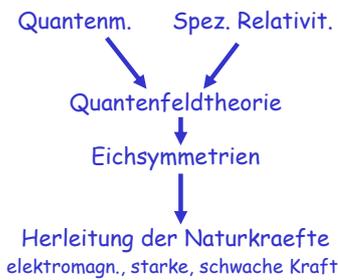


Abb. 1.6

Schema der theoretischen Konzepte in der Teilchenphysik.

Photon

tatsächlich nur zu wenigen Prozent in Masse umgewandelt, der Rest findet sich in der kinetischen Energie der entstandenen Teilchen.

Historisch hat sich aus der Verbindung von Quantenmechanik und spezieller Relativitätstheorie die Quantenfeldtheorie entwickelt. In dieser spielen Symmetrien eine besondere Rolle und führen zu Erhaltungssätzen für Ladungen und zu Wechselwirkungen zwischen Teilchen. Mit diesem Konzept der sogenannten “Eichtheorien” ist es gelungen, drei der vier Kräfte in der Natur zu formulieren:

- Die elektromagnetische Wechselwirkung betrifft außer den Neutrinos alle Leptonen und Quarks in genau der gleichen Weise. Allerdings ist die Ladung der Quarks geringer. Die Wechselwirkung wird durch den Austausch von Photonen vermittelt. Zusätzlich zu elastischen Prozessen wie

$$e^- p \rightarrow e^- p$$

werden aber auch Prozesse wie Paarvernichtungs- und Erzeugungsprozesse

$$e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$$

beschrieben, die in der Natur tatsächlich beobachtet werden.

- Die starke Wechselwirkung zwischen den Quarks erfolgt nach fast den gleichen Regeln wie beim Elektromagnetismus. Die Wechselwirkung wird durch den Austausch von Gluonen vermittelt. Es gibt Prozesse wie

$$u s \rightarrow u s$$

$$u \bar{u} \rightarrow t \bar{t}$$

Da die Gluonen ebenfalls Farbe tragen, gibt es auch Reaktionen wie

$$g g \rightarrow u \bar{u} \quad g g \rightarrow g g$$

- Die schwache Wechselwirkung erlaubt als einzige die Umwandlung von Teilchensorten in andere Teilchensorten. Sie wird durch den Austausch von W^\pm und Z^0 vermittelt.

$$\mu^- \rightarrow \nu_\mu e^- \bar{\nu}_e$$

$$t \rightarrow b W^+$$

- Alle Austauscheteilchen γ, g, W^\pm, Z^0 sind Spin 1 Bosonen. Photonen und Gluonen sind masselos. Die W^\pm und Z^0 gehören dagegen zu den schwersten Teilchen überhaupt.
- Eine komplett andere Wechselwirkung liegt beim Higgs-Teilchen vor. Diese beruht auf einer sogenannten spontanen Brechung einer Symmetrie und beschreibt Wechselwirkungen zwischen dem Higgs-Teilchen und Teilchen, die Masse haben.

W^\pm, Z^0

Higgs

Die folgende Abbildung 3.1 beschreibt alle Teilchen und Wechselwirkungen im Standard-Modell.

Das Standard Modell

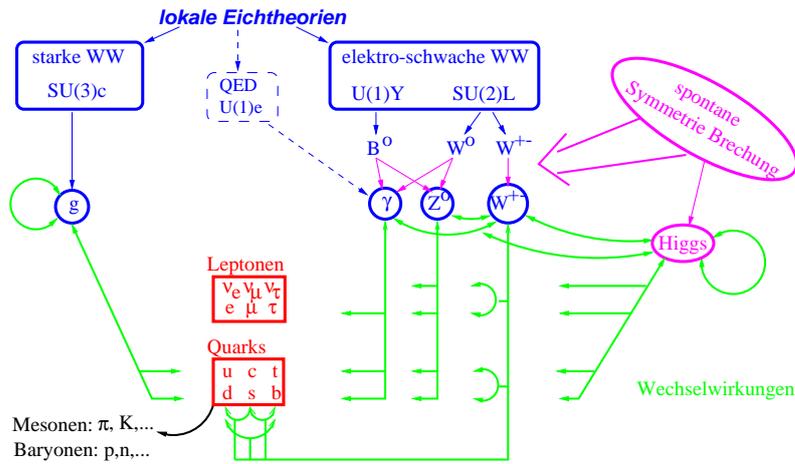


Abb. 1.7 Schema des Standard-Modells mit allen Teilchen. Grüne Pfeile stellen Wechselwirkungen dar.

Sicher ist das Standard-Modell keine *Theory of Everything* (TOE) sondern nur unser derzeitiges Bild der Naturgesetze (Tabelle 9.1). Abb. 1.8 zeigt bereits erreichte, aber auch weitere, zumindest konzeptionell angedachte Schritte einer Vereinigung der Naturgesetze. Ein Ziel dieser Schritte ist sicher auch ein Verständnis der frühen Phasen und Phasenübergänge im frühen Universum (Abb. 1.9).

Forderungen an eine fundamentale Theorie	Standard-Modell
<i>Wenige Grundannahmen</i> Kausalität, Raum-Zeit, Quantentheorie	✓
<i>Wenige Naturkonstanten, Teilchen und Kräfte</i> 26 freie Parameter (ohne Gravitation); $e, \mu, \tau, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, u, d, s, c, t, b, W^\pm, Z, \gamma, g, H$, dunkle Materie	nein
<i>Vorhersagekraft</i> ν_τ, t, W, Z , Higgs	✓
<i>gültig in allen Prozessen</i> in Laborexperimenten im Kosmos	✓ nein
<i>gültig bei allen Energien: Extrapolierbarkeit</i> $\Lambda \gtrsim 1\text{TeV} \Rightarrow M_{\text{Higgs}} \rightarrow \infty$ Hierarchieproblem $\Lambda \geq 10^{19}\text{GeV} \Rightarrow$ Quanten-Gravitation	nein
<i>Erklärung, warum die Natur so ist, wie sie ist</i>	nein

Tabelle 1.4 Das Standard-Modell im Vergleich zu Erwartungen an eine fundamentale Theorie der Natur.

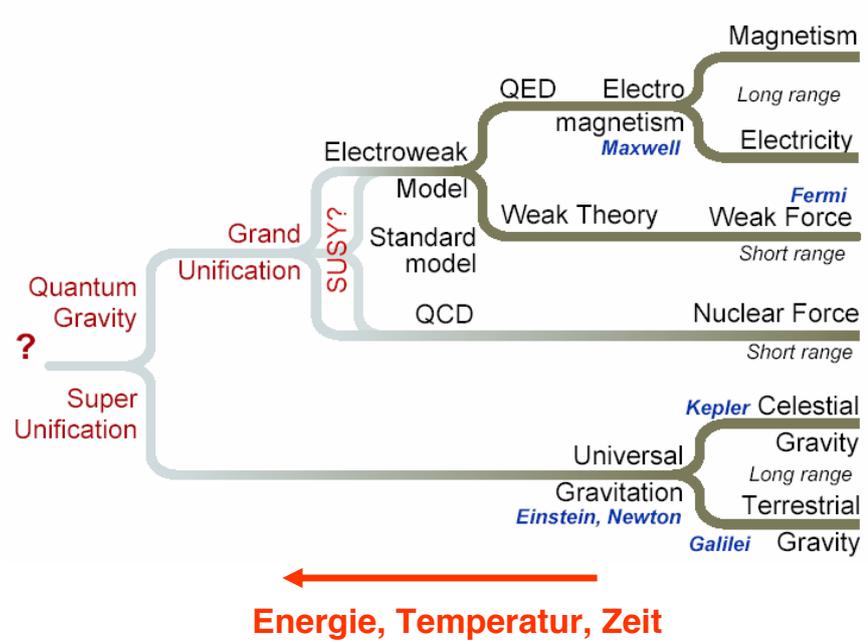


Abb. 1.8 Schema der Vereinheitlichungen der Wechselwirkungen.

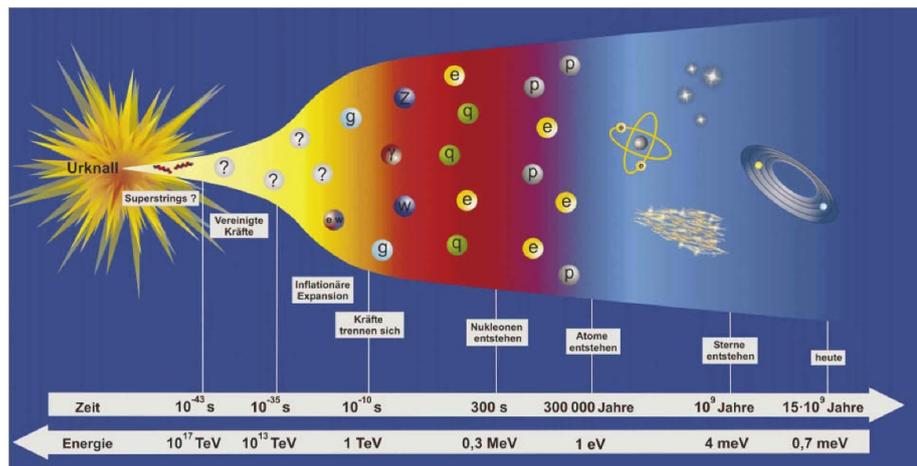


Abb. 1.9 Entwicklung des Universums.

2 Streuprozesse und Zerfälle

2.1 Wirkungsquerschnitt

Die Streuung von Teilchen aneinander ist die wichtigste Messmethode der Teilchenphysik. Man unterscheidet:

- elastische Streuung $a + b \rightarrow a' + b'$.
Im Anfangszustand und Endzustand liegen die gleichen Teilchen vor. Da die Massen sich nicht ändern, bleibt die kinetische Energie erhalten.
- inelastische Streuung $a + b \rightarrow c + d + \dots$.
Es entstehen andere Teilchen oder angeregte Zustände mit höheren Massen.

Von “fixed target” Experimenten spricht man, wenn Teilchen a in einem Teilchenstrahl vorliegt und Teilchen b ruht, das “target” also ein Gas, eine Flüssigkeit oder ein ruhender Festkörper ist. Bei einem “Collider” hingegen haben a und b vergleichbar hohe Energien.

Im Folgenden wird immer die Annahme der Streuung einzelner Teilchen gemacht, d.h.

- alle Teilchen im Teilchenstrahl reagieren unabhängig, d.h. die de Broglie-Wellenlänge \ll Abstand der Teilchen,
- Die Wahrscheinlichkeit einer Streuung ist klein, so dass Mehrfachstreuungen keine Rolle spielen,
- die Bindungsenergie von b im Target kann vernachlässigt werden.

Wirkungsquerschnitt

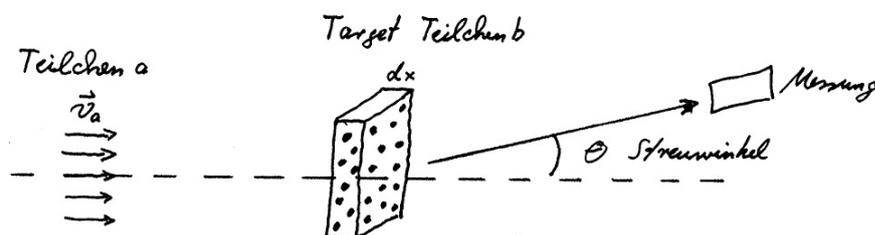


Abb. 2.2 Streuung in einem “fixed target” Experiment.

Ein “fixed Target” Experiment ist gekennzeichnet durch

- n_a = Dichte der Teilchen a im Strahl, $[n_a] = \text{Anzahl}/\text{cm}^3$
- n_b = Dichte der Teilchen b im Target¹ $[n_b] = \text{Anzahl}/\text{cm}^3$.

¹ Für ein Target aus Atomen gilt

$$n_b = \frac{N_A \cdot \rho}{M_{\text{Mol}}} \quad (2.1)$$

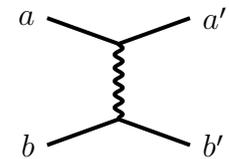


Abb. 2.1 Elastische Streuung.

- $dx = \text{Targetdicke}$, $[dx] = \text{cm}$.

Innerhalb des Querschnittsfläche A des Strahls ist die Anzahl der Teilchen $N_b = n_b \cdot A \cdot dx$. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein einzelnes Teilchen a im Target reagiert, hängt im einfachsten Fall vom geometrischen Querschnitt σ des $a - b$ Systems ab,

$$\boxed{w = \sigma \frac{N_b}{A} = \sigma n_b dx} \quad (2.2)$$

Mehrfachstreuung kann vernachlässigt werden für $\omega \ll 1$, also für hinreichend kleine dx . Bei einer Wechselwirkung mit langer Reichweite ist σ nicht länger nur der geometrische Querschnitt, sondern charakterisiert ganz allgemein die Wechselwirkung. Definiert durch die obige Gleichung $w = \sigma n_b dx$ wird er daher als Wirkungsquerschnitt bezeichnet und ist ein Mass für die Reaktionswahrscheinlichkeit einer einzelnen Teilchenreaktion. Er entspricht der "effektiven Fläche" des Streuzentrums und ist unabhängig vom jeweiligen Experiment.

Da w dimensionslos ist, hat σ die Dimension einer Fläche. Das es sich in aller Regel um sehr kleine Flächen handelt, wird als Einheit das "barn" verwendet,

$$1 \text{ barn} = 1 \text{ b} = (10 \text{ fm})^2 = 10^{-28} \text{ m}^2$$

Ein Proton hat in dieser Einheit den geometrischen Querschnitt $\pi r_p^2 = \pi \cdot (1.4 \text{ fm})^2 = 0,06 \text{ b}$.

Für Teilchen a mit Geschwindigkeit v_a entspricht der Teilchenfluss

$$\phi_a = n_a \cdot v_a \quad [\phi_a] = \frac{\text{Teilchen}}{\text{cm}^2 \text{ s}} \quad (2.3)$$

der Anzahl Teilchen, die pro Zeit durch eine Querschnittsfläche treten. Die Reaktionsrate im Experiment, d.h. die Anzahl der Reaktionen pro Zeiteinheit, ist damit bezogen auf den Strahlquerschnitt A

$$\frac{dN}{dt} = \phi_a A \omega = \underbrace{\phi_a A n_b dx}_{L} \sigma \quad (2.4)$$

oder

$$\boxed{\frac{dN}{dt} = L \sigma} \quad (2.5)$$

Hierbei hängt die Luminosität L nur vom Experiment ab. Für ein "fixed target" Experiment ist sie

$$\boxed{L_{\text{fixed target}} = v_a n_a N_b} \quad (2.6)$$

mit dem Atomgewicht M_{Mol} , der Avogadrozahl N_A und der Targetdichte ρ .

Diese Größe kann man auch für ein Collider-Experiment definieren. In einem Collider kreisen Teilchen-Pakete ("Bunch") von typisch 10^{10} Teilchen auf gegenläufigen Bahnen. Wenn N_a, N_b die Anzahl der Teilchen in den Teilchenpaketen sind und f die Frequenz, mit der sie im Experiment aufeinander treffen, dann ist die Lumiosität

$$L_{\text{Collider}} = f \frac{N_a N_b}{4\pi \sigma_x \sigma_y} \quad (2.7)$$

Hierbei sind σ_x, σ_y die Breiten der Gaußverteilungen der Strahlpakete der Teilchen senkrecht zu ihrer Flugrichtung.

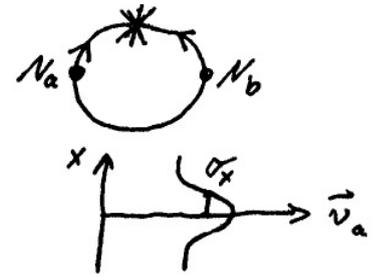


Abb. 2.3
Teilchenpakete in einem Collider.

Messung des Wirkungsquerschnitts bei Absorption Wenn durch die Reaktionen die Teilchen a absorbiert werden entsteht eine einfache Methode zur Messung des Wirkungsquerschnitts durch die Abschwächung des Teilchenstrahls in einem hinreichend dicken Target. Die Abnahme der Teilchenzahl N_a ist

$$dN_a = -w N_a \quad (2.8)$$

$$\frac{-dN_a}{N_a} = w = \sigma n_b dx \quad (2.9)$$

so dass

$$N_a(x) = N_0 e^{-x/\lambda} \quad (2.10)$$

Hier ist

$$\lambda = \frac{1}{\sigma n_b} \quad (2.11)$$

die mittlere freie Weglänge zwischen zwei Wechselwirkungen. Die Messung der Anzahl der Teilchen N_a nach dem Target ergibt also direkt den Wirkungsquerschnitt.

Differentieller und totaler Wirkungsquerschnitt Die wichtigste Messgröße ist der Wirkungsquerschnitt als Funktion der kinematischen Variablen (x_1, x_2, x_3, \dots = Impulse, Energien, Winkel) der Teilchen im Endzustand,

$$\frac{d\sigma}{dx_1 dx_2 dx_3 \dots} \quad (2.12)$$

Häufig erfolgt die Messung nur als Funktion einer oder zwei dieser Größen,

$$\frac{d\sigma}{dx_1}, \quad \frac{d\sigma}{dx_1 dx_2} \quad (2.13)$$

d.h. es wird über alle anderen Freiheitsgrade integriert. Der totale Wirkungsquerschnitt ist dann

$$\sigma = \int dx_1 dx_2 dx_3 \dots \frac{d\sigma}{dx_1 dx_2 dx_3 \dots} \quad (2.14)$$

Klassische Interpretation des differentiellen Wirkungsquerschnitts

In einem fixed target Experiment lässt sich der Wirkungsquerschnitt klassisch wie folgt verstehen.

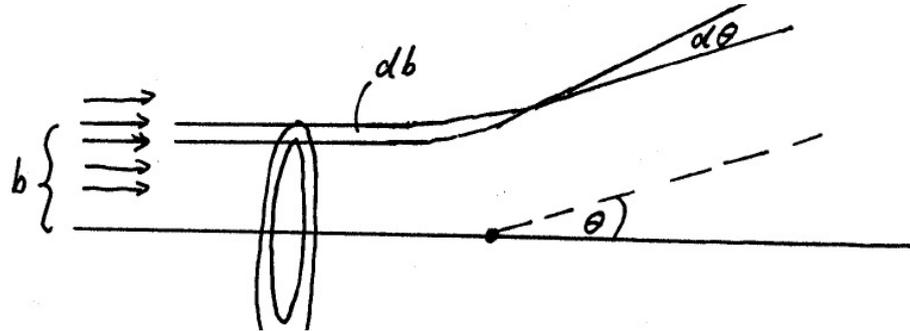


Abb. 2.4 Messung des Differentiellen Wirkungsquerschnitts in einem fixed target Experiment.

Ein paralleler Strahl von Teilchen nähert sich ein Target. Eines der Teilchen mit senkrechtem Abstand b (Stoßparameter) zum Streuzentrum wird durch die Wechselwirkung mit dem Streuzentrum (z.B. das Coulomb-Potential) unter einem Winkel θ abgelenkt. Klassisch werden alle Teilchen mit gleichem Stoßparameter die gleiche Ablenkung erfahren, d.h. alle Teilchen, die einen gedachten schmalen Ring db durchlaufen, werden in einem Streuwinkelbereich $d\theta$ landen, wenn das Streupotential nicht von ϕ abhängt. Geometrisch hat der Ring die Fläche

$$d\sigma = 2\pi b db \quad (2.15)$$

Das entsprechende Raumwinkelement integriert über ϕ ist

$$d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta \quad (2.16)$$

Damit ist der differentielle Wirkungsquerschnitt

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|} \quad (2.17)$$

Wichtig ist, dass kleine Stoßparameter b großen Ablenkwinkeln θ entsprechen. Der Wirkungsquerschnitt muss immer positiv sein.

2.2 Rutherford-Streuung klassisch

Unter Rutherford-Streuung versteht man die klassische Streuung von geladenen Teilchen bei Vernachlässigung des Spins. Historisch interpretierte E. Rutherford die Resultate der Experimente von Geiger und Marsden, in denen Helium-Kerne mit hoher Energie an einer Goldfolie streuten. Rutherford schloß daraus erstmals auf die Existenz von Atomkernen.

Im Folgenden betrachten wir die Streuung eines leichten Teilchens a an einem ruhenden schweren Teilchen b mit $m_a \ll m_b$ im nicht-relativistischen Grenzfall. Hierfür gilt die Näherung

$$E_a = E'_a, \quad |\vec{P}_a| = |\vec{P}'_a| \quad (2.18)$$

Teilchen a wird damit im statischen Potential von Teilchen b gestreut.

Aufgabe 2.1: Energieübertrag ΔE , 3-er Impulsübertrag $\Delta \vec{P}$ und 4-er Impuls Δp sind definiert durch

$$\Delta E = E_a - E'_a \quad \Delta \vec{P} = \vec{P}_a - \vec{P}'_a \quad (2.19)$$

Zeigen Sie, dass für $m_a \ll m_b$ bei elastischer Streuung der Energieübertrag viel kleiner ist als der 3-er Impulsübertrag. Daraus folgt auch, dass der 4-er Impulsübertrag $\Delta p = p_a - p'_a$ und der 3-er Impulsübertrag (bis auf das Vorzeichen) fast gleich groß sind.

- i) Die Beziehung zwischen Impulsänderung Δp und Streuwinkel θ folgt aus dem Sinussatz,

$$\frac{|\Delta \vec{P}|}{\sin \theta} = \frac{|\vec{P}_2|}{\sin(\frac{1}{2}(\pi - \theta))} = \frac{|m v_0|}{\cos \frac{\theta}{2}} \quad (2.20)$$

Wegen $\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$ folgt

$$|\Delta \vec{P}| = 2m v_0 \sin \frac{\theta}{2} \quad (2.21)$$

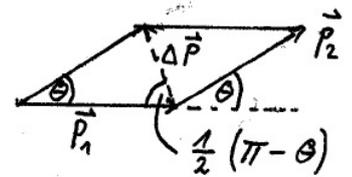


Abb. 2.5
Impulsübertrag $\Delta \vec{P}$.

- ii) Drehimpulserhaltung gilt für jedes Zentralpotential,

$$|\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{P}| = m r^2 \omega \quad (2.22)$$

$$b \cdot m \cdot v_0 = m r^2 \frac{d\phi}{dt} \quad (2.23)$$

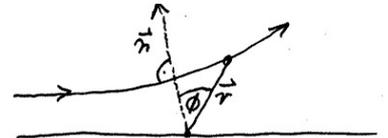


Abb. 2.6
Drehimpulserhaltung.

- iii) Die Impulsänderung erfolgt durch die Kraft $\vec{F} = d\vec{P}/dt$,

$$\Delta \vec{P} = \vec{P}'_a - \vec{P}_a = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{F} dt \quad (2.24)$$

Benutzt man, dass aus Symmetriegründen nur die Komponente in \vec{n} -Richtung relevant ist, so folgt

$$|\Delta \vec{P}| = \int_{-\infty}^{\infty} F \cos \phi dt = \int_{-\frac{1}{2}(\pi-\theta)}^{\frac{1}{2}(\pi-\theta)} F \cos \phi \frac{dt}{d\phi} d\phi \quad (2.25)$$

Einsetzen von ii) ergibt

$$|\Delta \vec{P}| = \int_{-\frac{1}{2}(\pi-\theta)}^{\frac{1}{2}(\pi-\theta)} \frac{F r^2}{b v_0} \cos \phi d\phi \quad (2.26)$$

- iv) Für die Coulomb-Kraft F gilt

$$F r^2 = \frac{Q_a Q_b}{4\pi\epsilon_0} = const, \quad (2.27)$$

so dass der Integrand unabhängig von r wird. Es folgt

$$|\Delta\vec{P}| = \frac{F r^2}{b v_0} \int_{-\frac{1}{2}(\pi-\theta)}^{\frac{1}{2}(\pi-\theta)} \cos\phi d\phi = 2 \frac{F r^2}{b v_0} \cos\frac{\theta}{2} \quad (2.28)$$

Mit dem Impulsübertrag aus Gl. 2.21 folgt

$$b = 2 \frac{F r^2}{v_0} \frac{1}{2m v_0} \cot\frac{\theta}{2} = a \cot\frac{\theta}{2} \quad (2.29)$$

und

$$\frac{db}{d\theta} = \frac{-a}{2 \sin^2\frac{\theta}{2}} \quad (2.30)$$

Hierbei ist mit $Q_a = Z_a e$ und $Q_b = Z_b e$,

$$a = \frac{F r^2}{2 E_{kin}} = \frac{Q_a Q_b}{8\pi\epsilon_0 E_{kin}} = \frac{\alpha Z_a Z_b}{2 E_{kin}} \quad (2.31)$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \quad (2.32)$$

Damit ist der Wirkungsquerschnitt (Gl. 2.17) gegeben durch

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{a^2}{\sin\theta} \cdot \cot\frac{\theta}{2} \cdot \frac{1}{2 \sin^2\frac{\theta}{2}} \quad (2.33)$$

$$= \frac{a^2}{4} \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}} \quad (2.34)$$

Im letzten Schritt wurde $\sin\theta = 2 \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2}$ benutzt. Insgesamt ist dann

Rutherford-Formel

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z_a^2 Z_b^2 \alpha^2}{16 E_{kin}^2 \sin^4\frac{\theta}{2}}} \quad (2.35)$$

Der Ausdruck im Nenner ergibt sich direkt aus dem 3-er Impulsübertrag Gl. 2.21

$$|\Delta\vec{p}| \equiv |\vec{q}| = 2m v_0 \sin\frac{\theta}{2} \quad (2.36)$$

und $E_{kin} = \frac{1}{2} m v_0^2$, so dass endgültig

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(2m Z_a Z_b \alpha)^2}{(\vec{q})^4}} \quad (2.37)$$

- Der Wirkungsquerschnitt fällt sehr schnell mit θ . Er wird bei $\theta = 180^\circ$ aber nicht Null. Aus diesem Verhalten hat Rutherford auf die Existenz des Kerns geschlossen.
- Die Winkelverteilung hängt nicht vom Vorzeichen der Ladungen ab. Anziehende und abstoßende Kräfte ergeben also die gleiche Winkelverteilung.

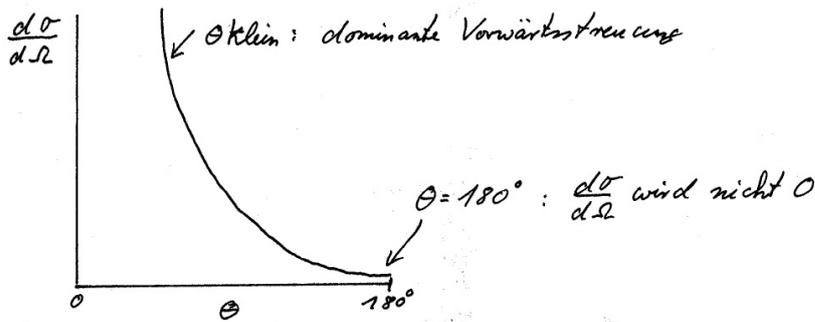


Abb. 2.7 Winkelverteilung für Rutherford-Streuung.

2.3 Streuprozesse in der Quantenmechanik

2.3.1 Fermi's Goldene Regel

Gegeben sei ein Problem mit Hamiltonoperator

$$H = H_0 + V(|\vec{r}|) \quad (2.38)$$

wobei H_0 der Hamilton-Operator für ein freies Teilchen ist und das Streupotential V zeitunabhängig und radialsymmetrisch sein soll. Im Fall der Streuung eines elektrisch geladenen Teilchens ist V das Coulomb-Potential des Streuzentrums.

Ohne äußeres Potential, $V = 0$, also für ein freies Teilchen, seien die zeitunabhängigen Teile der Lösungen $|u_n\rangle$, so dass

$$H_0 |u_n\rangle = E_n |u_n\rangle \quad \langle u_m | u_n \rangle = \delta_{mn} \quad (2.39)$$

Gesucht wird die Lösung der Schrödinger-Gleichung

$$i \partial_t |\Psi\rangle = (H_0 + V) |\Psi\rangle \quad (2.40)$$

Man kann $|\Psi\rangle$ als Entwicklung nach ungestörten Eigenfunktionen ansetzen,

$$|\Psi\rangle = \sum_n c_n(t) |u_n\rangle e^{-iE_n t} \quad (2.41)$$

so dass $|c_n(t)|^2$ die Wahrscheinlichkeit angibt, das Teilchen zum Zeitpunkt t im Zustand n mit Energie E_n anzutreffen. Aus der Schrödinger-Gleichung folgt dann (Produktregel)

$$i \sum_n \dot{c}_n |u_n\rangle e^{-iE_n t} + \sum_n E_n c_n |u_n\rangle e^{-iE_n t} = \sum_n c_n (H_0 + V) |u_n\rangle e^{-iE_n t}$$

mit $\partial_t c_n = \dot{c}_n$. Wegen Gleichung 2.39 fallen zwei der vier Terme weg und es folgt

$$i \sum_n \dot{c}_n |u_n\rangle e^{-iE_n t} = \sum_n c_n V |u_n\rangle e^{-iE_n t} \quad (2.42)$$

Durch Multiplikation von links mit $\langle u_m |$ erhält man

$$i \dot{c}_m = \sum_n \langle u_m | V | u_n \rangle c_n e^{i(E_m - E_n)t} \quad (2.43)$$

Mit dem Matrixelement

$$\boxed{\mathcal{M}_{mn} = \langle u_m | V | u_n \rangle} \quad (2.44)$$

ist also

$$i \dot{c}_m = \sum_n \mathcal{M}_{mn} c_n e^{i(E_m - E_n)t} \quad (2.45)$$

Wechselwirkungsbild der Quantenmechanik

In diesem sog. Wechselwirkungsbild der Quantenmechanik entsprechen diese Gleichungen der Schrödinger-Gleichung. Die Zeitentwicklung ist für ein statisches Potential völlig in den $c_n(t)$ enthalten.

Dieses System gekoppelter Differentialgleichungen wird in der sogenannten Born'schen Näherung gelöst. Betrachtet wird die Streuung im Zeitintervall $-T \leq t \leq T$. Im Anfangszustand ($t = -T$) soll das Teilchen in einem bestimmten Zustand i sein, so dass

$$c_i(t = -T) = 1 \quad c_j(t = -T) = 0 \quad \text{für } j \neq i \quad (2.46)$$

Born'sche Näherung

Es wird angenommen, dass die Störung durch das Potential so klein ist, dass der Anfangszustand nur wenig entvölkert und andere Zustände nur wenig bevölkert werden, so dass

$$c_i(t > -T) \approx 1 \quad c_j(t > -T) \approx 0 \quad \text{für } j \neq i \quad (2.47)$$

Insgesamt entspricht dies der Näherung, dass eine ebene Welle in die Reaktion einläuft und nur ein einzelnes Teilchen (Photon) ausgetauscht wird. In dieser Näherung folgt

$$i \dot{c}_m = \mathcal{M}_{mi} e^{i(E_m - E_i)t} \quad (2.48)$$

Bei konstanter Störung ergibt die Integration (für $m \neq i$, d.h. für gestreute Zustände)

$$i c_m(T) = \mathcal{M}_{mi} \int_{-T}^{+T} dt e^{i(E_m - E_i)t} \quad (2.49)$$

$$= \mathcal{M}_{mi} \frac{1}{i(E_m - E_i)} \left(e^{i(E_m - E_i)T} - e^{-i(E_m - E_i)T} \right) \quad (2.50)$$

$$= \mathcal{M}_{mi} \frac{2i \sin((E_m - E_i)T)}{i(E_m - E_i)} \quad (2.51)$$

Aus dieser Amplitude für den Übergang von i nach m folgt für die Wahrscheinlichkeit P_{mi} , das System zur Zeit T im Zustand m zu finden,

$$P_{mi} = |c_m|^2 = 4 |\mathcal{M}_{mi}|^2 \frac{\sin^2((E_m - E_i)T)}{(E_m - E_i)^2} \quad (2.52)$$

Für die gesamte Übergangswahrscheinlichkeit bis $t = T$ muss

$$P(T) = \sum_m P_{mi} = 4 \sum_m |\mathcal{M}_{mi}|^2 \frac{\sin^2((E_m - E_i)T)}{(E_m - E_i)^2} \quad (2.53)$$

berechnet werden. Diese Summe betrifft alle internen Freiheitsgrade im Endzustand wie Spin, Farbe und die Impulszustände für die jeweilige Energie. In Streuprozessen sind kontinuierliche Werte der Energien möglich, so dass zu einem Integral über die Energie übergegangen werden muss. Ist $\varrho(E_m)$ die Dichte der Endzustände in einem Energieintervall dE_m , so ist

$$P(T) = \int dE_m \varrho(E_m) P_{mi} \quad (2.54)$$

$$= 4 \int dE_m |\mathcal{M}_{mi}|^2 \varrho(E_m) \frac{\sin^2((E_m - E_i)T)}{(E_m - E_i)^2} \quad (2.55)$$

Der Faktor $\varrho(E)$ wird "Phasenraumfaktor" genannt. Für unendlich große Zeiten T wird das relevante Energieintervall dE_m beliebig klein. Dies entspricht der Unschärferelation und für lange Zeiten der Energieerhaltung zwischen Anfangszustand und Endzustand. Daher kann \mathcal{M}_{mi} und $\varrho(E_m)$ über die Breite des Intervalls als konstant gesetzt werden. Für einen messbaren Endzustand der Energie $E_m = E$ ist mit $\mathcal{M}_{mi} = \mathcal{M}_{fi}$ (f ="final") also

$$P(T) = 4 |\mathcal{M}_{fi}|^2 \varrho(E) \int dE \frac{\sin^2((E - E_i)T)}{(E - E_i)^2} \quad (2.56)$$

Substituiert man $x = E - E_i$, so ist das Integral im Intervall $-\infty < E - E_i < \infty$ gleich $\pi \cdot T$,

$$P(T) = 4\pi T |\mathcal{M}_{fi}|^2 \varrho(E) \quad (2.57)$$

Die Übergangsrate ist die Übergangswahrscheinlichkeit pro betrachtetem Zeitraum, hier also $-T \leq t \leq T$,

$$\boxed{W = 2\pi |\mathcal{M}_{fi}|^2 \varrho(E)} \quad (2.58)$$

Diese Formel ist die Grundlage der Berechnung von Streuprozessen.

- Das Matrixelement \mathcal{M}_{fi} beinhaltet die Information über die Wechselwirkung zwischen Teilchen und Streuzentrum.
- Der Phasenraumfaktor $\varrho(E)$ beschreibt die Kinematik des Streuprozesses. Er ist proportional zur Dichte der möglichen Endzustände.

Diese Übergangsrate ist bezogen auf ein einzelnes Strahlteilchen und ein einzelnes Target-Teilchen. Der Zusammenhang mit dem messbaren Wirkungsquerschnitt ergibt sich mit Gleichung 2.5,

$$W = \frac{dN/dt}{N_a N_b} = \sigma \cdot v_a \cdot \frac{n_a}{N_a} \quad (2.59)$$

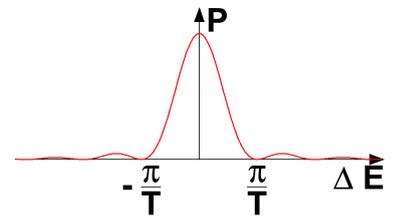


Abb. 2.8
Unschärfe-Relation bei der Ableitung der Goldenen Regel.

Fermi's Goldene Regel

2.3.2 Rutherford-Streuung

Die quantenmechanische Berechnung der Rutherford-Streuung geht wieder von einem schweren Target aus, d.h. der Rückstoß auf den Kern wird zunächst vernachlässigt. Außerdem werden Spin-Effekte nicht berücksichtigt. Berechnet werden muss das Matrixelement

$$\mathcal{M}_{fi} = \langle u_f | V | u_i \rangle \quad (2.60)$$

Mit ebenen Wellen für das einlaufende Teilchen i und das auslaufende Teilchen f ,

$$|u_i\rangle = e^{i\vec{P}_i\vec{r}} \quad |u_f\rangle = e^{i\vec{P}_f\vec{r}} \quad (2.61)$$

ergibt sich

$$\mathcal{M}_{fi} = \langle u_f | V | u_i \rangle = \int d^3r u_f^* V u_i = \int d^3r e^{-i\vec{P}_f\vec{r}} V e^{i\vec{P}_i\vec{r}} \quad (2.62)$$

Mit dem Impulsübertrag

$$\vec{q} = \vec{P}_i - \vec{P}_f \quad (2.63)$$

ist

$$\boxed{\mathcal{M}_{fi} = \int d^3r e^{i\vec{q}\vec{r}} V} \quad (2.64)$$

Das Matrix-Element \mathcal{M}_{fi} ist in diesem Fall also einfach die Fourier-Transformierte des Streupotentials.

Eine allgemeine Lösung erhält man durch²

$$\mathcal{M}_{fi} = \int d^3r e^{i\vec{q}\vec{r}} V \quad (2.66)$$

$$= \frac{-1}{\vec{q}^2} \int d^3r (\nabla^2 e^{i\vec{q}\vec{r}}) V \quad (2.67)$$

$$= \frac{-1}{\vec{q}^2} \int d^3r e^{i\vec{q}\vec{r}} \nabla^2 V \quad (2.68)$$

Speziell für die Coulomb-Wechselwirkung mit statischem Streupotential für ein Teilchen a mit Ladung $Z_a e$ ergibt sich V aus dem skalaren Coulomb-Potential Φ , das über die Poisson-Gleichung mit der Ladungsdichte des Streuzentrums zusammenhängt,

$$V = Z_a e \Phi(\vec{r}) \quad \nabla^2 \Phi(\vec{r}) = -\varrho(\vec{r}) \quad (2.69)$$

Daher folgt

$$\boxed{\mathcal{M}_{fi} = \frac{Z_a e}{\vec{q}^2} \int d^3r e^{i\vec{q}\vec{r}} \varrho(\vec{r})} \quad (2.70)$$

² Für eine nach außen hinreichend schnell abfallende Funktion $f(\vec{r})$ ist bei Integration bis ins Unendliche $\int d^3r \nabla f = 0$. Mit $f = (V\nabla U) - (U\nabla V)$ folgt

$$0 = \int d^3r \nabla f = \int d^3r (V\nabla^2 U) - (U\nabla^2 V) \quad (2.65)$$

Mit $U = e^{i\vec{q}\vec{x}}$ folgt Gleichung 2.68.

Punktförmiges Streuzentrum Für eine punktförmige Ladung $Z_b e$ im Streuzentrum ist

$$\varrho(\vec{r}) = Z_b e \delta^3(\vec{r}) \quad (2.71)$$

Damit ist das Integral über die Ladungsverteilung gleich 1 und das Matrixelement ist

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{Z_a Z_b e^2}{\vec{q}^2} \quad (2.72)$$

Für Fermi's Goldene Regel wird

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{(Z_a Z_b e^2)^2}{\vec{q}^4} \quad (2.73)$$

benötigt. Bis auf Vorfaktoren, die sich aus der Normierung der Wellenfunktionen und dem Phasenraum ergeben, ist dies gerade der klassisch abgeleitete Rutherford Wirkungsquerschnitt von Gleichung 2.37.

Mott-Wirkungsquerschnitt Für die Rutherford-Formel wurde nicht-relativistisch gerechnet, kein Spin berücksichtigt und auch der Rückstoß auf den Kern vernachlässigt. Um die Strukturen von Hadronen oder Kernen mit Elektronenstrahlen auflösen zu können, müssen hohe Elektronenergien von mehreren 100 MeV verwendet werden. Dann kann man weder den Rückstoß auf die Kerne noch relativistische Effekte und auch den Spin nicht vernachlässigen. Für diesen Fall gilt die Mott-Formel. Sie muss aus der Dirac-Gleichung abgeleitet werden. Mit $Z_e = -1$ und E_e als Gesamtenergie des Elektrons gilt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{Mott} = \left(\frac{Z\alpha}{2E_e\beta^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (2.74)$$

Der Term mit $\beta^2 \sin^2 \theta/2$ ist der Beitrag durch den Spin des Elektrons. Er wird bei $\beta \rightarrow 1$ ebenso groß wie die Coulomb-Wechselwirkung.

Mit dem 4-er Impulsübertrag

$$q^2 = (e - e')^2 \approx 4E_e E'_e \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (2.75)$$

folgt für $\beta \approx 1$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{Mott} = (2Z\alpha)^2 \frac{E_e'^2}{q^4} \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (2.76)$$

Ohne Rückstoß auf den Kern müsste E_e' durch E_e ersetzt werden.

2.4 Struktur der Hadronen und Kerne

2.4.1 Formfaktor

Für eine radialsymmetrische, aber nicht punktförmige Ladungsverteilung

$$\varrho(r) = Z_b e f(r) \quad \text{mit} \quad \int d^3r f(r) = 1 \quad (2.77)$$

ist das Matrixelement nach Gleichung 2.70

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{Z_a e}{\vec{q}^2} \int d^3r e^{i\vec{q}\vec{r}} \varrho(\vec{r}) = \frac{Z_a Z_b e^2}{\vec{q}^2} F(\vec{q}) \quad (2.78)$$

mit dem Formfaktor

$$F(\vec{q}) = \int d^3r e^{i\vec{q}\vec{r}} f(r) \quad (2.79)$$

Der Formfaktor ist also die Fourier-Transformierte der geometrischen Form der normierten Ladungsverteilung $f(r)$ des Streuzentrums. Daraus folgt für den Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma_{\text{Rutherford}}}{d\Omega} |F(\vec{q})|^2 \quad (2.80)$$

Aus der Messung des differentiellen Wirkungsquerschnitts im Impulsraum kann also der Formfaktor bestimmt werden. Durch Rücktransformation kann daraus im Prinzip die Ladungsverteilung $f(r)$ bestimmt werden. Das Integral der Rücktransformation muss jedoch den ganzen $|\vec{q}|$ Bereich umfassen, also auch unendlich hohe Werte umfassen. Dies ist aufgrund der beschränkten Schwerpunktsenergie nicht möglich. Man kann jedoch verschiedene Ladungsverteilungen $f(r)$ ausprobieren, bis deren Fouriertransformierte zu den Daten passt.

Aufgabe 2.2: Zeigen Sie durch Integration in Kugelkoordinaten, dass

$$\int d^3r f(r) e^{i\vec{q}\vec{r}} = 4\pi \int_0^\infty dr f(r) r^2 \frac{\sin(qr)}{qr} \quad (2.81)$$

Damit lassen sich die folgenden Beziehungen zwischen Ladungsverteilungen und Formfaktoren ausrechnen.

Ladungsverteilung $f(r)$		Formfaktor $F(q^2)$	
Punkt	$\delta(r)/4\pi$	1	konstant
exponentiell	$(a^3/8\pi) \cdot \exp(-ar)$	$(1 + q^2/a^2\hbar^2)^{-2}$	Dipol
Gauß	$(a^2/2\pi)^{3/2} \cdot \exp(-a^2r^2/2)$	$\exp(-q^2/2a^2\hbar^2)$	Gauß
homogene Kugel	$\begin{cases} 3/4\pi R^3 & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$	$3\alpha^{-3}(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)$ mit $\alpha = q R/\hbar$	oszillierend

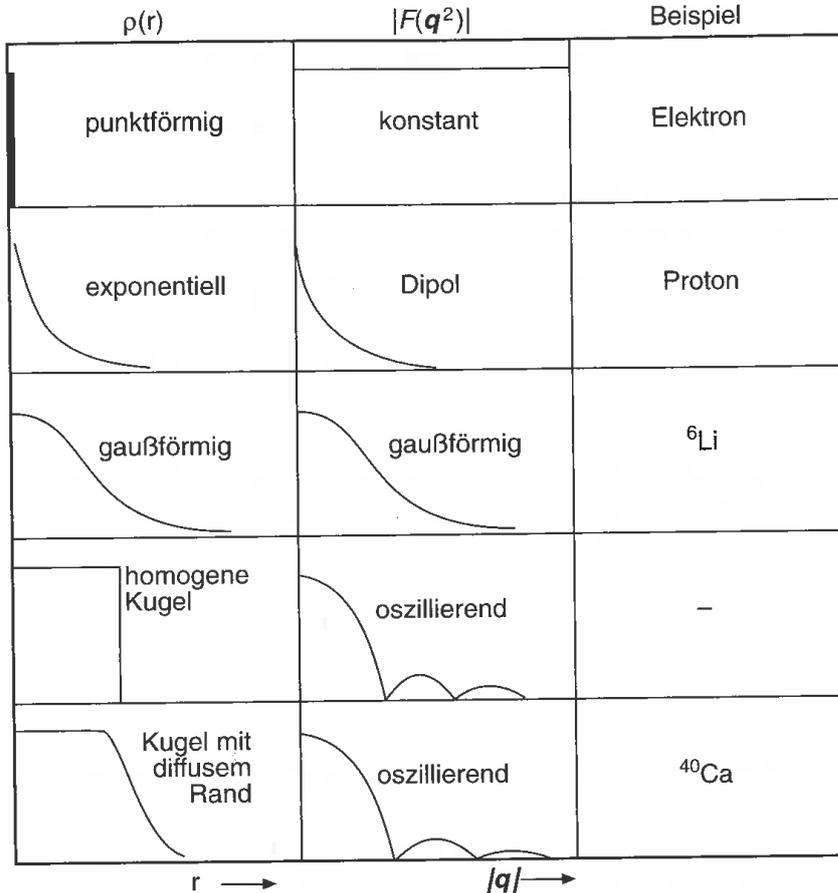


Abb. 2.9 Ladungsverteilungen und Formfaktoren.

2.4.2 Messungen der Proton- und Kernstrukturen

Seit den 1950er Jahren wurden in Elektron-Streuexperimenten die Strukturen und Anregungen von Protonen und Kernen untersucht. Die folgenden Bilder zeigen einige experimentelle Resultate. Aus ihnen folgt:

- Hadronen wie Protonen, Neutronen oder Pionen haben eine Ausdehnung.
- Der Formfaktor des Protons zeigt keine Beugungsminima. Die Ladungsdichte des Protons fällt etwa exponentiell nach außen ab

$$\varrho(r) = \varrho_0 e^{-r/a} \tag{2.82}$$

mit $a = 0,23$ fm. Der mittlere Ladungsradius ist

$$\langle r^2 \rangle = \int d^3r r^2 f(r) \approx 0,74 \text{ fm}^2 \quad (2.83)$$

- Bei Energien im GeV Bereich kann das Proton angeregt werden. Die Massen der Anregungszustände liegen typisch 100 MeV höher als die Proton-Masse.
- Kerne zeigen Beugungsminima. Sie haben eine Nukleonendichte, die im Zentrum fast konstant und unabhängig von der Kernmasse ist. Weiter außen fällt die Ladungsdichte kontinuierlich ab. Die Beugungsminima sind daher nicht sehr ausgeprägt. Der Radius der Kerne steigt mit $A^{1/3}$ mit der Massenzahl A .

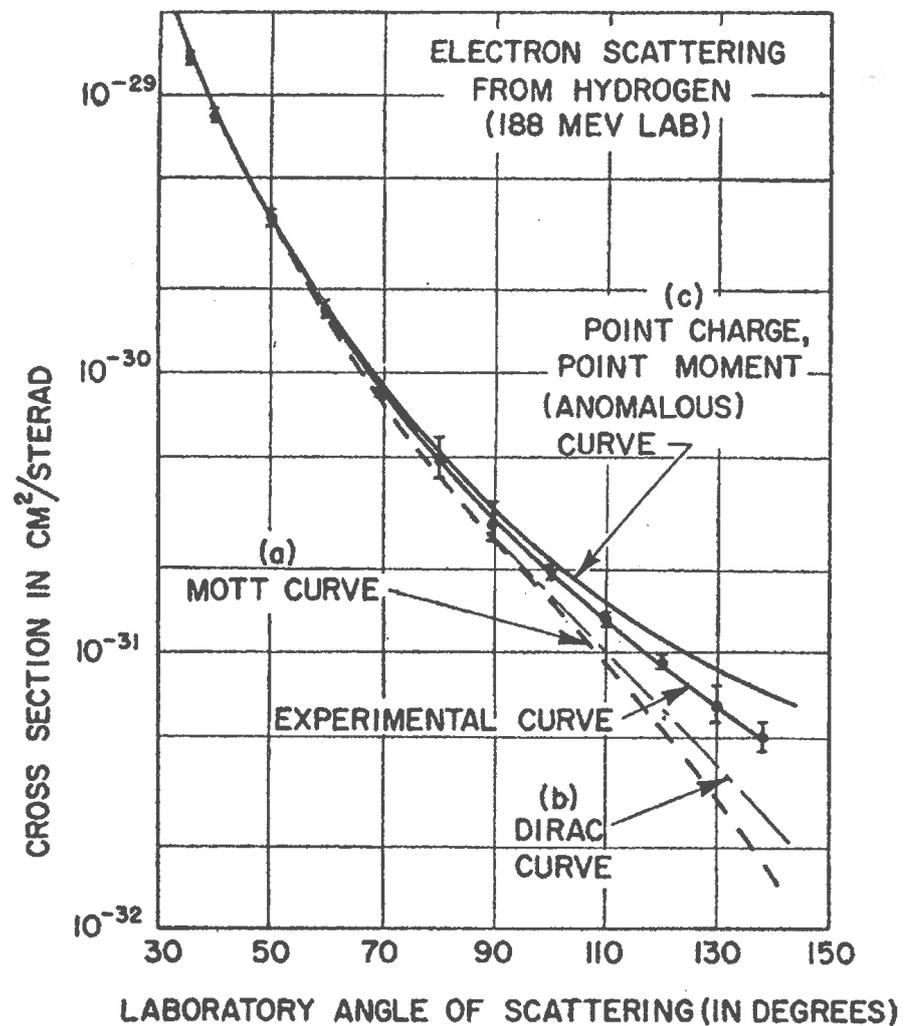


Abb. 2.10 Wirkungsquerschnitt als Funktion des Streuwinkels in Elektron-Proton Streuung. Die Elektronenergie betrug 188 MeV. Die Daten lassen sich weder durch den Rutherford- noch den Mott- oder der kompletten Dirac-Theorie erklären. Der Unterschied zu diesen Vorhersagen war die erste Beobachtung einer Ausdehnung des Protons durch Hofstaedter 1956.

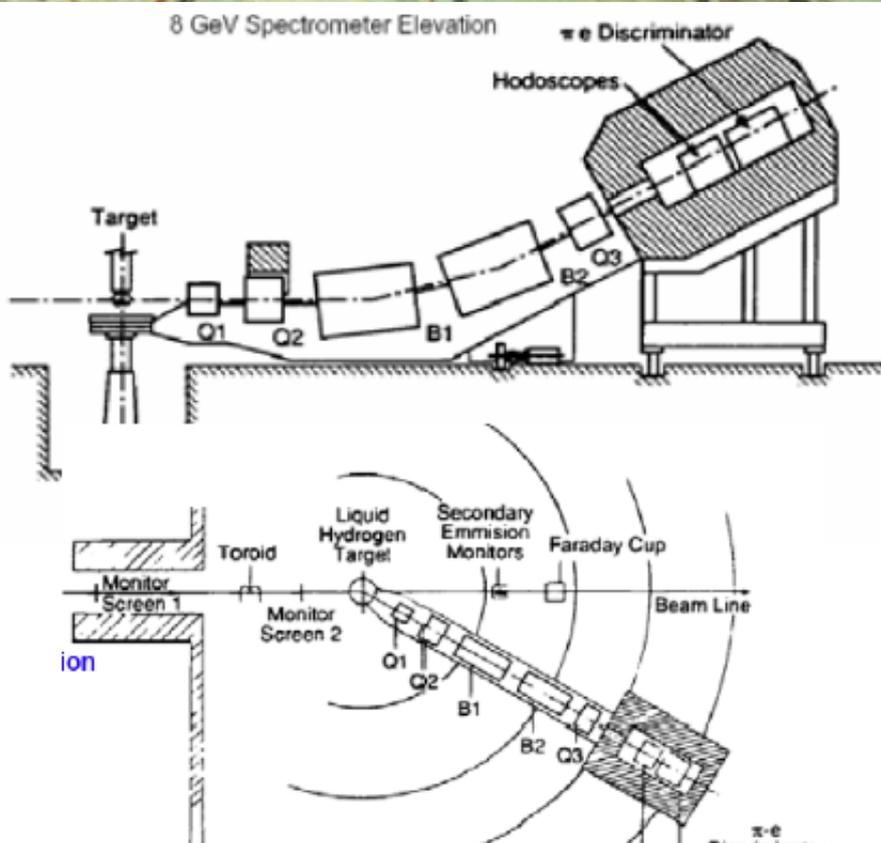


Abb. 2.11 Schema und Foto eines typischen Experiments zur Elektron-Proton Streuung. Mit diesem Experiment am SLAC konnte erstmals die innere Struktur der Protonen aufgelöst und der Nachweis von Quarks geführt werden.

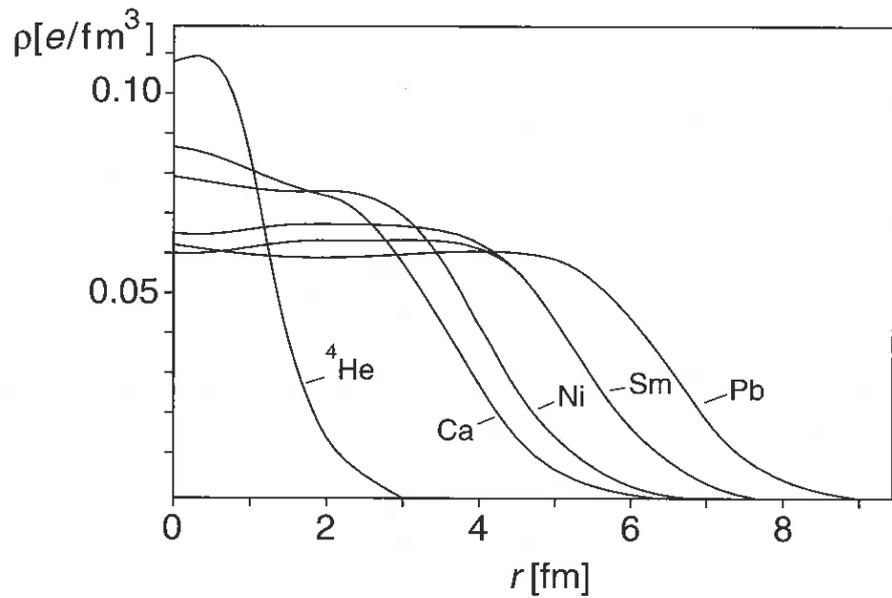
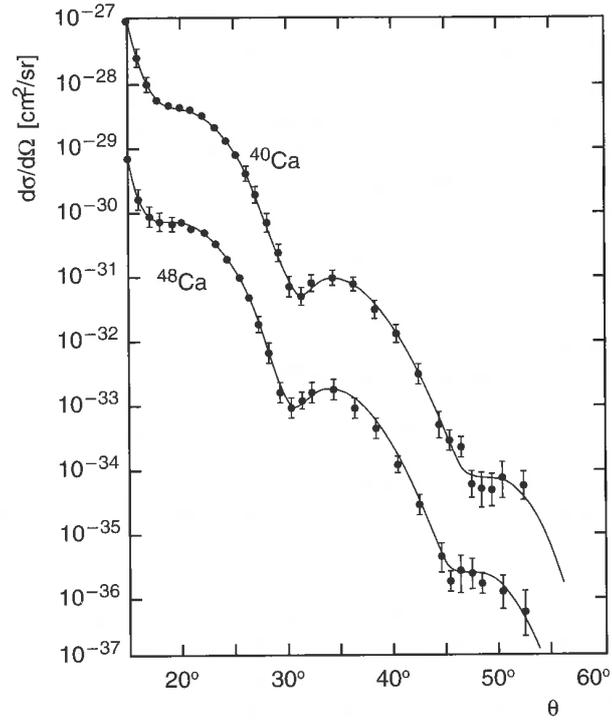


Abb. 2.12 Oben: Elektron Streuung an Calcium mit verschiedenen Massenzahlen. Man erkennt mehrere Beugungsminima, wie es einer Streuung an einer Kugel entspricht. Die Minima sind aber nicht sehr ausgeprägt. Daraus ergibt sich ein nicht sehr schneller Abfall der Ladungsdichte am Rand der Kugel.

Unten: Berechnete Ladungsdichte in verschiedenen Kernen.

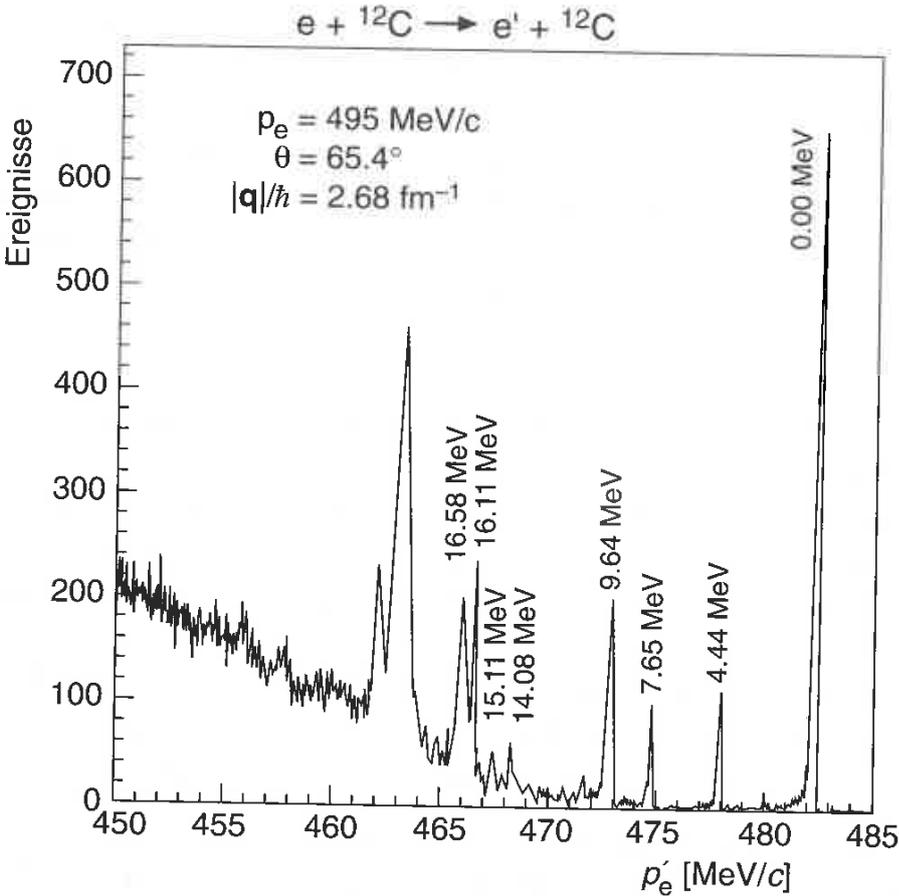


Abb. 2.13 Energiespektrum inelastisch gestreuter Elektronen an ¹²C Kernen. Die Elektronenergie betrug 495 MeV.

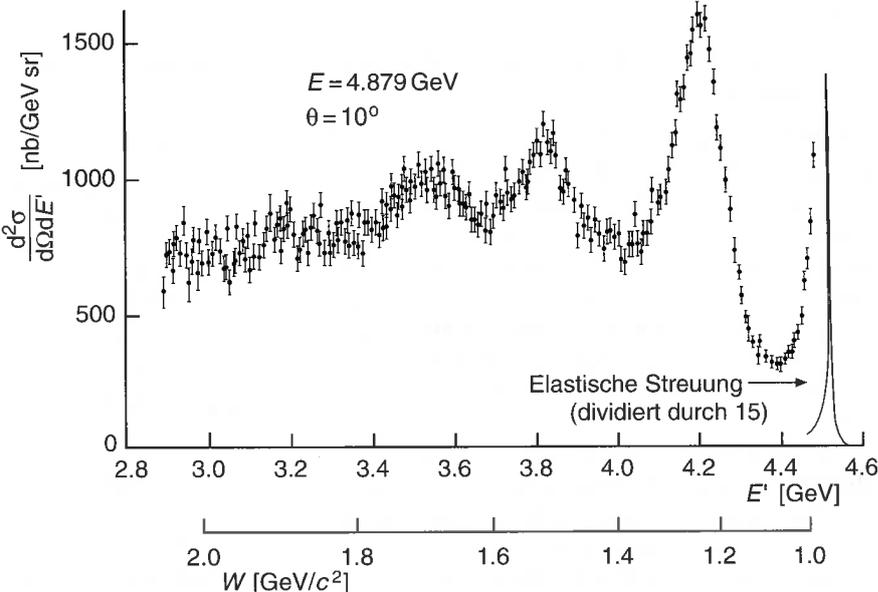


Abb. 2.14 Wirkungsquerschnitt als Funktion der Energie gestreuter Elektronen an Protonen. Die Elektronenergie betrug 4,879 GeV. Der dominante Anteil elastisch gestreuter Elektronen ist verkleinert dargestellt. Man erkennt die ersten Anregungsniveaus der Protonen.

2.5 Relativistische Quantenmechanik

2.5.1 Schrödinger-Gleichung

Grundlage der nicht-relativistischen Quantenmechanik sind die de-Broglie Beziehungen $E = \hbar\omega$, $\vec{P} = \hbar\vec{k}$ für Energie und Impuls eines Teilchens und dessen Kreisfrequenz und Wellenlänge. In natürlichen Einheiten ($\hbar = 1$) lauten sie

$$\boxed{E = \omega \quad \vec{P} = \vec{k}} \quad (2.84)$$

Ersetzt man in der nicht-relativistischen Energie-Impuls Beziehung für freie Teilchen

$$E = \frac{\vec{P}^2}{2m}$$

Energie und Impuls durch die Operatoren

$$\boxed{E \rightarrow i\partial_t, \quad \vec{P} \rightarrow -i\nabla} \quad (2.85)$$

und wendet das Resultat auf eine Wellenfunktion $\psi(\vec{x}, t)$ an, so folgt die Schrödinger-Gleichung,

$$i\partial_t\psi = -\frac{1}{2m}\nabla^2\psi$$

Lösungen sind ebene Wellen,

$$\psi = \psi_0 e^{-i(Et - \vec{P}\vec{x})} \quad (2.86)$$

so dass mit $\partial_t\psi = -iE\psi$, $\nabla\psi = i\vec{P}\psi$ und $\nabla^2\psi = -\vec{P}^2\psi$ die resultierende Gleichung

$$E\psi = \frac{\vec{P}^2}{2m}\psi$$

lautet. Für beliebige Zeiten und Orte kann dies nur erfüllt sein, wenn die Energie-Impuls Beziehung $E = \vec{P}^2/(2m)$ gilt.

2.5.2 Klein-Gordon-Gleichung

Die Phase der ebenen Welle in Gl. 2.86 ist bereits ein Produkt zweier 4-er Vektoren

$$px = \begin{pmatrix} E \\ \vec{P} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} = Et - \vec{P}\vec{x} \quad (2.87)$$

und damit Lorentz-invariant. Die Bewegungsgleichung für ein freies Teilchen muss offenbar Orts- und Zeitkoordinaten gleich behandeln, um auch relativistisch gültig zu sein. Hierfür startet man anders als bei der Schrödinger-Gleichung von der relativistischen Energie-Impuls Beziehung

$$E^2 = \vec{P}^2 + m^2 \quad (2.88)$$

Ersetzt man Energie und Impuls durch die gleichen Operatoren wie im nicht-relativistischen Fall (Gl. 2.85) und wendet das Resultat auf eine Wellenfunktion $\Phi(\vec{x}, t)$ an, so erhält man

$$-\partial_t^2 \Phi = -\nabla^2 \Phi + m^2 \Phi$$

Mit dem d'Alembert Operator $\square = \partial_t^2 - \nabla^2$ erhält man die Klein-Gordon-Gleichung,

$$\boxed{(\square + m^2) \Phi = 0} \quad (2.89)$$

Sie gilt für relativistische Spin-0 Teilchen. Lösungen sind wieder ebene Wellen,

$$\Phi(x) = \Phi_0 e^{-i(Et - \vec{P}\vec{x})}$$

Aufgabe 2.3: Zeigen Sie, dass Einsetzen der ebenen Welle in die Klein-Gordon-Gleichung wieder die relativistische Energie-Impuls Beziehung (Gl. 2.88) liefert.

2.5.3 Dirac Gleichung

In relativistischen Wellengleichungen können Ort- und Zeitableitungen nur gleichberechtigt auftreten. Eine Gleichung linear in den Ableitungen (und damit den 4-er Impulsoperator und der Masse m) ist die Dirac-Gleichung

$$\boxed{i(\gamma_0 \partial_t + \vec{\gamma} \nabla - m) \Psi = 0} \quad (2.90)$$

Mathematisch findet man, dass diese Gleichung tatsächlich nur dann für ebene Wellen zur relativistischen Beziehung $E^2 = m^2 + \vec{P}^2$ führt, wenn jeder der vier Faktoren γ^0 und γ_i nicht einfach eine Zahl, sondern jeweils eine 4×4 Matrix ist, und damit Ψ ein 4-komponentiger "Spinor". Die entsprechende Gleichung mit elektromagnetischer Wechselwirkung zeigt, dass jeweils zwei der Lösungen zu unterschiedlichen Vorzeichen der elektrischen Ladungen gehören müssen. Die Dirac-Gleichung beschreibt daher Teilchen und Anti-Teilchen.

Dieser fundamentalen Vorhersage von Paul Dirac (1928, Nobelpreis 1933) folgte Jahre später die Entdeckung des Anti-Elektrons durch C.D. Anderson (1932, Nobelpreis 1936).

Experimentell findet man, dass z.B. Elektronen und Anti-Elektronen die gleiche Masse m haben. Außerdem haben beide Teilchen als Spin 1/2 Fermionen zwei Polarisationsrichtungen. Insgesamt beschreibt daher die Dirac-Gleichung korrekt alle 4 Freiheitsgrade.

Eine detaillierte Diskussion der Dirac-Gleichung wird erst in Vorlesungen zur fortgeschrittenen Teilchenphysik erfolgen. Hier ist es ausreichend zu wissen, dass die $4 \times 4 \times 4$ Zahlenwerte in den γ -Matrizen so gewählt werden können, dass jede der vier Komponenten von Ψ die Klein-Gordon-Gleichung und damit die relativistische Energie-Impuls Beziehung erfüllt.



Abb. 2.15
Paul Dirac
(Quelle: Wikipedia).

2.6 Yukawa Potential und Reichweite der Kräfte



Abb. 2.16
Hideki Yukawa
(Quelle Wikipedia).

Hideki Yukawa schlug in den Anfängen der Kernphysik einen Ansatz mit schweren Austauschteilchen vor, um die endliche Reichweite der Kernkräfte zu erklären. Die Idee ist aber auch für andere Wechselwirkungen mit schweren Austauschteilchen relevant, insbesondere für die schwache Wechselwirkung mit W^\pm und Z^0 .

Zunächst wird der Zusammenhang zwischen Wellengleichung eines freien Teilchens und dem statischen Potential in der Elektrodynamik erklärt. Die Wellengleichung für das skalare, elektrische Potential $\varphi(\vec{x}, t)$ lautet (in Lorentz-Eichung)

$$\square\varphi = \varrho$$

- Ohne äußere Ladungsdichte, $\varrho(\vec{x}, t) = 0$ ist die Lösung von $\square\varphi = 0$ eine ebene Welle, $\varphi \sim e^{-i(Et - \vec{P}\vec{r})}$ mit $E^2 - \vec{P}^2 = 0$, die freien, masselosen Photonen entspricht.
- Für eine punktförmige, statische Ladung $\varrho = q\delta(\vec{r})$ im Zentrum gibt es eine statische Lösung für das Potential, $\partial_t\varphi = 0$, für das die entstehende Poisson-Gleichung

$$\nabla^2\varphi = -q\delta(\vec{r}) \quad (2.91)$$

als Lösung das bekannte Coulomb-Potential ergibt³,

$$\varphi = \frac{q}{4\pi|\vec{r}|}$$

Die Reichweite dieses Potentials fällt nur sehr langsam mit dem Abstand von der Quelle und ist praktisch unendlich.

Yukawa ging von der Klein-Gordon-Gleichung in der Form

$$(\square + m^2)\Phi = \varrho(x)$$

aus, wobei $\varrho(x)$ die Farbladungs-Dichteverteilung eines Kerns darstellen soll.

- Ohne äußeres Feld ist die Lösung wiederum eine ebene Welle für ein freies Teilchen mit Masse m ,

$$\Phi(x) \sim e^{-i(Et - \vec{P}\vec{r})} \quad \text{mit } E^2 - \vec{P}^2 = m^2$$

³Man kann dies durch Einsetzen in die Poisson Gleichung leicht zeigen, wenn man die Eigenschaft

$$\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r}|} = -4\pi\delta(\vec{r})$$

der δ -Funktion benutzt.

- b) Für eine punktförmige, statische Ladungsverteilung des Kerns gilt

$$\varrho(\vec{r}) = g\delta(\vec{r})$$

wobei g eine Kopplungskonstante für die starke Kraft ist. Hierfür gibt es auch eine statische Lösung, $\partial_t\Phi = 0$. Die hierfür geltende Gleichung

$$(\nabla^2 - m^2)\Phi = -g\delta(\vec{r})$$

hat die Lösung

$$\boxed{\Phi = g \frac{e^{-mr}}{4\pi r}} \quad (2.92)$$

Dieses Potential fällt wegen der Exponentialfunktion sehr schnell nach außen ab, d.h. diese Kraft hat eine endliche Reichweite, die typisch von der Größe $1/m$ ist.

Yukawa-Potential

Diese Interpretation für ein schweres Austauscheteilchen stimmt mit der Überlegung überein, dass eine statische Ladungsverteilung für kurze Zeit ein massives Quant der Energie $\Delta E \approx m$ emittieren kann, dessen Lebensdauer Δt aufgrund der Unschärferelation $m\Delta t \approx 1$ und Reichweite r durch die Lichtgeschwindigkeit auf

$$r \approx c\Delta t \approx \frac{1}{m}$$

beschränkt ist (mit $\hbar = c = 1$).

Reichweite der Kernkraft

Setzt man für die Reichweite der Kernkraft den Radius des Protons an, $r \approx 1\text{fm}$, so ergibt sich $m \approx 200\text{MeV}$. Dies ist tatsächlich die Größenordnung für die Masse des leichtesten Hadrons, des Pions ($m_\pi = 140\text{MeV}$), das Jahre später entdeckt wurde. Pion-Austausch stellt demnach eine erste plausible Näherung für die Kräfte zwischen den Protonen und Neutronen im Kern dar. Diese Vorstellung wurde später durch den Austausch auch schwererer Hadronen zur Regge-Theorie verallgemeinert, die erfolgreich zahlreiche Phänomene der Hadron-Hadron-Streuung bei kleinen Impulsüberträgen erklären kann. In diesem Bereich ist das ansonsten natürlich fundamentalere Quark-Gluon-Bild der Hadronen nicht anwendbar, da das Auflösungsvermögen für die Quarks und Gluonen fehlt.

Reichweite der Starken Wechselwirkung

Die starke Wechselwirkung entsteht durch den Austausch von Gluonen. Ihre Reichweite ist ebenfalls von der Größenordnung von nur 1fm , obwohl die Masse der Gluonen null ist. Der Grund für die kleine Reichweite ist also nicht in der Masse der Gluonen zu finden, sondern vielmehr in der Farbladung der Gluonen, die verhindert, dass Gluonen sich wie Photonen frei über große Abstände bewegen können. Dies wird später im Abschnitt zur starken Wechselwirkung genauer erklärt.

Reichweite der Schwachen Wechselwirkung

Die Eichbosonen W und Z der schwachen Wechselwirkung sind Spin-1 Teilchen, die wie das Photon durch Vektorfelder beschrieben werden. Zwar gilt für diese die Proca-Gleichung und nicht die Klein-Gordon Gleichung, aber das Prinzip der obigen Überlegungen von Yukawa bleibt gültig. Den Massen $M_W = 80,4$ GeV und $M_Z = 90,1$ GeV entsprechen Reichweiten der schwachen Wechselwirkung von ca. $1/m \approx 2,5 \cdot 10^{-3}$ fm. Die schwache Wechselwirkung ist also bei kleinen Energien schwach, weil die Reichweite der schweren Bosonen und damit auch alle Wirkungsquerschnitte klein sind.

Bei hohen Energien können W und Z auch als reelle Teilchen produziert werden. Die Reichweite ergibt sich dann aus der Lebensdauer der Teilchen. Bei einer totalen Breite von ca. $\Gamma = 2$ GeV ergibt sich eine typische Reichweite von $c\tau = 0.1$ fm. Werden W und Z in Proton-Proton Kollisionen erzeugt, so zerfallen sie demnach noch innerhalb des Proton-Radius.

2.7 Zerfälle

2.7.1 Zerfallsgesetz

Zerfälle von Teilchen treten in zwei Spielarten auf:

- Fundamentale Teilchen können nur durch die schwache Wechselwirkung zerfallen, d.h. spontan in zwei oder mehr andere fundamentale Teilchen übergehen.
- Gebundene Systeme (angeregte Atome, Kerne oder Hadronen) zerfallen entweder elektromagnetisch oder durch die starke Wechselwirkung. Die schwache Wechselwirkung spielt nur dann eine messbare Rolle, wenn das System bereits im Grundzustand ist und der Zerfall durch die anderen Wechselwirkungen nicht möglich ist.

Für ein bestimmtes Teilchen, das zur Zeit t_1 existiert, sei Γdt die Wahrscheinlichkeit, in einem kleinen Zeitintervall von t_1 bis $t_1 + dt$ zu zerfallen. Diese Wahrscheinlichkeit soll unabhängig von der Vorgeschichte (Alter) des Teilchens sein, so dass Γ eine Konstante ist. Bei $N(t)$ identischen, voneinander unabhängigen Teilchen ist dann die Änderung dN dieser Zahl gegeben durch

$$dN = -\Gamma N(t) dt \quad (2.93)$$

Diese Änderung von $N(t)$ muss negativ sein, denn die Anzahl der noch vorhandenen Teilchen nimmt ab. Die Lösung dieser Differentialgleichung ergibt sich aus

$$\int_{N(t=0)}^{N(t)} \frac{-dN}{N} = \int_{t=0}^t \Gamma dt \quad (2.94)$$

zu

$$N(t) = N_0 e^{-\Gamma t} \quad (2.95)$$

mit $N_0 = N(t=0)$. Die Anzahl der messbaren Zerfälle ist $-dN$. Die Wahrscheinlichkeitsdichte $P(t)$ ist definiert über die Anzahl der messbaren Zerfälle dN im Zeitintervall von t bis $t+dt$, relativ zur ursprünglich zur Zeit $t=0$ vorhanden gewesenen Teilchen N_0 ,

$$P(t) dt = \frac{-dN}{N_0} = \Gamma \frac{N(t)}{N_0} dt \quad (2.96)$$

Damit ist die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\boxed{P(t) = \Gamma e^{-\Gamma t}} \quad (2.97)$$

korrekt normiert, denn die Wahrscheinlichkeit für dieses Teilchen irgendwann zu zerfallen ist

$$\int_0^\infty P(t) dt = \int_0^\infty \Gamma e^{-\Gamma t} dt = 1 \quad (2.98)$$

Die mittlere Zeit bis zum Zerfall ist

$$\langle t \rangle = \int_0^\infty t P(t) dt = \frac{1}{\Gamma} \quad (2.99)$$

Diese Zeitdauer wird daher auch mittlere Lebensdauer τ genannt⁴,

$$\boxed{\tau = \frac{1}{\Gamma}} \quad (2.102)$$

2.7.2 Breit-Wigner Verteilung und virtuelle Teilchen

Quantenmechanisch ist die Wellenfunktion eines freien Teilchens in seinem eigenen Ruhesystem gegeben durch

$$\Psi(t) = \Psi_0 e^{-i(Et - \vec{P}\vec{x})} = \Psi_0 e^{-imt} \quad (2.103)$$

denn in diesem System ist $\vec{P} = 0$ und $E = m$. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit ist

$$|\Psi(t)|^2 = |\Psi_0|^2 \quad (2.104)$$

⁴ Im Vergleich dazu ist die Halbwertszeit definiert als die Zeit, bei der die Anzahl der ursprünglichen Teilchen auf die Hälfte abgenommen hat,

$$N(t_{1/2}) = \frac{1}{2} N_0 = N_0 e^{-t_{1/2}/\tau} \quad (2.100)$$

so dass

$$t_{1/2} = \tau \ln 2 = 0,693 \tau \quad (2.101)$$

und damit zeitlich konstant. Für Teilchen, die zerfallen, muss aber gelten

$$|\Psi(t)|^2 = |\Psi_0|^2 e^{-\Gamma t} \quad (2.105)$$

Daher muss die Wellenfunktion verändert werden. Mit dem Ansatz

$$\Psi(t) = \Psi_0 e^{-iFt} \quad (2.106)$$

findet man

$$|\Psi(t)|^2 = \Psi \Psi^* = \Psi_0 \Psi_0^* e^{-i(F-F^*)t} = |\Psi_0|^2 e^{-\Gamma t} \quad (2.107)$$

so dass $i(F - F^*) = -2 \operatorname{Im}(F) = \Gamma$ ist. Lässt man den Realteil von F unverändert gleich m , so erfüllt der Ansatz mit $F = m - i\Gamma/2$ das exponentielle Zerfallsgesetz. Damit ist

$$\boxed{\Psi(t) = \Psi_0 e^{-imt - \Gamma t/2}} \quad (2.108)$$

Um die Energie dieses Zustands zu verstehen, führen wir eine Fourier-Transformation des zeitabhängigen Zustands $\Psi(t)$ in einen energieabhängigen Zustand $\tilde{\Psi}(E)$ durch,

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(E) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t) e^{iEt} dt = \frac{\Psi_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(m-E)t - \Gamma t/2} dt \\ &= \frac{\Psi_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{i}{(E - m) + i\Gamma/2} \end{aligned} \quad (2.109)$$

Die Wahrscheinlichkeit, einen Zustand mit Energie E zu finden, ist proportional zu

$$|\tilde{\Psi}(E)|^2 = \tilde{\Psi}(E) \tilde{\Psi}^*(E) = \frac{|\Psi_0|^2}{2\pi} \frac{1}{(E - m)^2 + \Gamma^2/4} \quad (2.110)$$

Aus der Normierung

$$\int_0^{\infty} |\tilde{\Psi}(E)|^2 dE = |\Psi_0|^2 \frac{2\pi}{\Gamma} = 1 \quad (2.111)$$

folgt

$$\boxed{|\tilde{\Psi}(E)|^2 = \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma}{(E - m)^2 + \Gamma^2/4}} \quad (2.112)$$

Dies ist die Breit-Wigner Resonanzkurve. Sie beschreibt die Energieabhängigkeit der Produktion eines instabilen Teilchens.

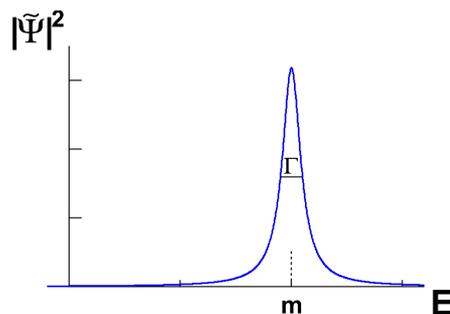


Abb. 2.17 Breit-Wigner-Resonanz als Funktion von E mit Breite $\Gamma = 0.1 m$.

Die Produktionsrate ist maximal bei $E = m$ und ist halb so groß bei $E = m \pm \Gamma/2$. Daher wird Γ auch Halbwertsbreite oder natürliche Resonanzbreite genannt, denn das Verhalten erinnert z.B. an die Anregung eines Pendels nahe der Resonanzfrequenz.

Die Energie des kurzlebigen Teilchens ist nicht scharf. Schreibt man Gleichung 2.102 in der Form

$$\tau \Gamma = 1 \tag{2.113}$$

so entspricht sie der Heisenberg'schen Unschärferelation. Um die Energie des Zustands mit der Genauigkeit $\Delta E = \Gamma$ zu messen, ist mindestens die Zeit $\Delta t = \tau$ notwendig.

Wenn im Ruhesystem des Teilchens ($\vec{P} = 0$) die Energie nicht genau der Masse entspricht, dann ist

$$p^2 = E^2 - \vec{P}^2 = E^2 \neq m^2 \tag{2.114}$$

Das Teilchen erfüllt also nicht mehr die relativistische Energie-Impuls-Beziehung, es ist nicht auf seiner "Massenschale" $E^2 - \vec{P}^2 = m^2$. Dies ist offenbar - für eine kurze Zeit - möglich. Man spricht in diesem Fall von einem virtuellen Teilchen.

Virtuelles Teilchen

2.8 Quantenfelder und Feynman-Diagramme

Fasst man die Ergebnisse der Diskussion zum Yukawa-Potential und zur Breit-Wigner-Resonanz zusammen, so ergibt sich der Zusammenhang zwischen dem Begriff der Kraft in der klassischen Physik und in der Quantenfeldtheorie.

Klassisch wird eine Kraft (hier Coulomb-Kraft) beschrieben durch ein Feld, das von einer Ladung ausgeht und auf eine zweite Ladung wirkt (und umgekehrt). Die Stärke der Kraft ist $F \sim Q_1 \cdot Q_2/r^2$.

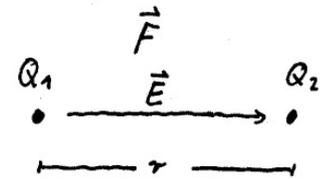


Abb. 2.18
Klassisches Bild der Coulomb-Kraft.

- Aus den Wellengleichungen (Maxwell oder Klein-Gordon) folgt
 - a) mit äußerer Ladung ein Potential und damit eine Kraft,
 - b) ohne äußere Ladung eine freie Welle eines Teilchens.
 Die Maxwell-Gleichungen entsprechen einem masselosen Teilchen (Photon) mit unendlicher Reichweite, die Klein-Gordon-Gleichung einem Teilchen mit Masse m und Reichweite $r = 1/m$ des Potentials.
- Aus der Breit-Wigner-Formel ergibt sich, dass ein Teilchen für kurze Zeit als virtuelles Teilchen produziert werden kann. Je größer die Virtualität ist, d.h. je weiter das Teilchen von seiner Massenschale entfernt ist, desto unwahrscheinlicher ist der Prozess.

In der Quantenfeldtheorie wird daher angenommen, dass jedes Teilchen aufgrund seiner Ladung ständig von einer Wolke virtueller Feldquanten (z.B. Photonen) umgeben ist. Diese Feldquanten können von anderen Ladungen absorbiert werden. Die Wahrscheinlich-

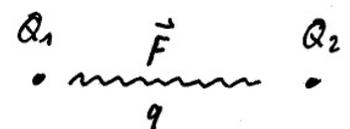


Abb. 2.19
Kraft durch Austausch von Quanten.

keit hierfür ist $\sim Q_1 \cdot Q_2$. Die Kraft entsteht durch den Impuls, den die Feldquanten von einem Teilchen auf das andere übertragen⁵.

Streuprozesse Als Beispiel soll ein Elektron an einem Muon durch elektromagnetische Wechselwirkung streuen,

$$e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^- \quad (2.116)$$

Graphisch lässt sich diese Streuung durch Austausch eines Feldquants wie in Abb. 2.20 in sogenannten Feynman-Graphen darstellen:

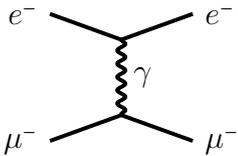


Abb. 2.20
Feynman-Graph: t -Kanal Streuprozess zwischen einem Elektron und einem Muon.

- Die Zeit in dieser Darstellung läuft von links (Anfangszustand) nach rechts (Endzustand). Die Wellenlinie, die in diesem Beispiel Elektron und Muon verbindet, stellt ein ausgetauschtes Photon dar. Die Photon-Richtung ist hier absichtlich senkrecht gezeichnet um anzudeuten, dass das Photon sowohl vom Elektron als auch vom Muon ausgehen kann, es also keine klare Zeit-Orientierung gibt.
- An jedem der “Vertizes” gilt Energie und Impulserhaltung. Ist e (e') der 4-er Impuls des Elektrons vor (nach) der Streuung und q der 4-er Impuls des Photons, so ist

$$q = e - e' \quad t = q^2 = (e - e')^2 \quad (2.117)$$

t -Kanal Prozess

Die Größe t wird 4-er Impulsübertrag genannt. Im Allgemeinen wird

$$t = q^2 = e^2 + e'^2 - 2ee' = 2m_e^2 - 2(E_e E_{e'} - \vec{P}_e \vec{P}'_e)$$

nicht gleich Null sein, also nicht gleich der Masse eines reellen Photons. Das Photon ist also virtuell.

Aufgabe 2.4: Zeigen Sie, dass bei Streuung ($\vec{P}_e \neq \vec{P}'_e$) immer $t = q^2 < 0$ gilt, das Photon also raumartig ist.

Paarvernichtung und Paarerzeugung Ein virtuelles Photon kann auch durch die Vernichtung eines Elektron-Positron Paares erzeugt werden (Abb. 2.21), z.B. in dem Prozess

$$e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \quad (2.118)$$

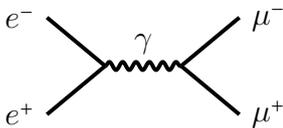


Abb. 2.21
Feynman-Graph: s -Kanal Paarvernichtung und -Erzeugung.

Der Vierer-Impuls q des Photons ist in diesem Fall gegeben durch

⁵ Trägt ein virtuelles Feldquant den Impuls Δq , so ist (semiklassisch) die Kraft gegeben durch den Impulsübertrag pro Zeit, $F = \Delta q / \Delta t$. Die Reichweite $r = \Delta x$ des virtuellen Feldquants ergibt sich aus der Unschärferelation $\Delta q \cdot \Delta x \approx 1$. Damit ist

$$F = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\Delta q}{\underbrace{\Delta x}_{(\sim 1/\Delta x)^2}} \frac{\Delta x}{\underbrace{\Delta t}_{\sim c}} \sim \frac{1}{r^2} \quad (2.115)$$

Diese grobe Abschätzung ergibt also wieder die klassische Anhängigkeit $\sim 1/r^2$ der Kraft vom Abstand zwischen den Ladungen.

die 4-er Impulse e^+ und e^- der einlaufenden Teilchen,

$$\boxed{q = e^+ + e^- \quad s = q^2 = (e^+ + e^-)^2} \quad (2.119)$$

Die Virtualität des Photons ist hier einfach die Schwerpunktsenergie der Reaktion, so dass das Photon immer zeitartig ist,

$$s = q^2 > 0$$

Da das Photon virtuell ist, kann es nicht lange in diesem Zustand bleiben, sondern wird typisch nach einer Zeit $t = 1/\sqrt{q^2}$ in andere Teilchen "zerfallen", z.B. wieder in e^+e^- oder wie hier gezeigt in $\mu^+\mu^-$.

s-Kanal Prozess

Prozesse höherer Ordnung Der Austausch eines einzelnen Photons ist offenbar nur eine erste - wenn auch meistens sehr gute - Näherung.

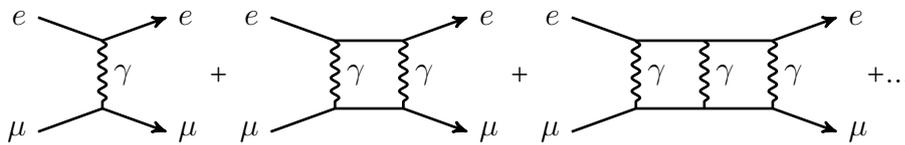


Abb. 2.22 Beispiele für Feynman-Graphen für $e - \mu$ Streuung in 1., 2., und 3. Ordnung.

Höhere Ordnungen wie in Abb. 2.22 beinhalten zum Beispiel den Austausch mehrerer Photonen und auch virtuelle Elektronen und Muonen. Feynman-Graphen sind also als eine Näherung an tatsächliche Prozesse in der Natur zu verstehen. Zu jedem Feynman-Diagramm gehört ein Matrixelement (eine Zahl), die berechnet werden kann. Feynman-Diagramme stellen tatsächlich diese Rechnung graphisch dar. Die hier gezeigten Diagramme sind die höheren Ordnungen einer Reihenentwicklung, die zumeist schnell konvergiert. Bei der Quanten-Elektrodynamik ist $\alpha = 1/137 \ll 1$, so dass höhere Ordnungen typisch nur wenige Prozent beitragen und die Reihe schnell konvergiert.

Die Wolke der virtuellen Feldquanten entspricht Feynman-Graphen wie in Abb. 2.23. In den Schleifen der Feldquanten können auch weitere Quanten, z.B. e^+e^- -Paare, entstehen, die zu messbaren Effekten führen.

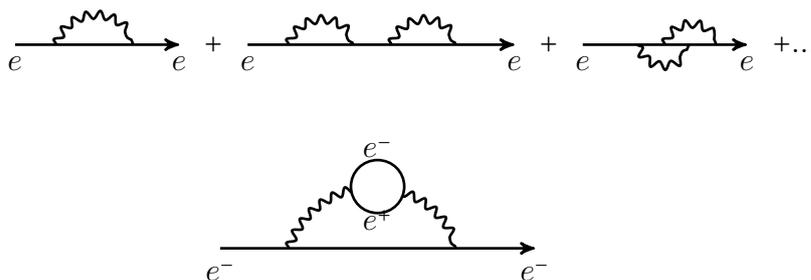


Abb. 2.23 Virtuelle Quanten in der Nähe einer Ladung.

2.9 Feynman-Graphen und Wirkungsquerschnitte

Am Beispiel der Rutherford-Streuung an einem festen Potential wurde gezeigt, dass sich die Ereignisrate wie folgt verstehen lässt:

- Bei Austausch eines Photons von einem Teilchen mit Ladung Ze ist das Matrixelement

$$\mathcal{M} \sim Ze$$

die Rate also

$$\sigma \sim |\mathcal{M}|^2 \sim (Ze)^2$$

- Das Matrixelement hängt vom 4-er Impuls q des ausgetauschten Photons ab,

$$\mathcal{M} \sim 1/q^2$$

die Rate ist also

$$\sigma \sim |\mathcal{M}|^2 \sim 1/q^4$$

R. Feynman hat erstmals für die Quantenelektrodynamik QED gezeigt, dass sich daraus allgemeine Regeln für die Berechnung von Matrixelementen formulieren lassen, die für jede Wechselwirkung ähnlich angewendet werden können. Diese Regeln lassen sich aus der Lagrange-Funktion der jeweiligen Theorie ableiten. Die Feynman-Graphen zeigen daher alle erlaubten und möglichen Prozesse.

Hier werden nur die prinzipiellen Abhängigkeiten gezeigt, die Vertexfaktoren und die Propagatoren.

Vertexfaktoren :

Beispiel: Für die Elektron-Quark Streuung

$$e\bar{u} \rightarrow e\bar{u}$$

mittels Photon-Austausch ist die Ladung am Elektron-Photon-Vertex $= e$, am Quark-Photon-Vertex $= -e \cdot 2/3$. Die Rate ist also

$$\sigma \sim (e)^2 \cdot (-e \cdot 2/3)^2 = \frac{4}{9}e^4$$

Mit $\alpha_{em} = e^2/(4\pi)$ ist die Rate also

$$\sigma \sim \frac{4}{9}\alpha^2$$

Bei n Photon-Vertizes ist der Wirkungsquerschnitt $\sim \alpha^n$. Insbesondere folgt

$$\frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow u\bar{u})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = \frac{4/9}{1} = \frac{4}{9}$$

Experimentell findet man aber $12/9$, die Quarks tragen also einen inneren Freiheitsgrad mit 3 Einstellungen, die Farbe:

$$u_{\text{rot}}, u_{\text{blau}}, u_{\text{grün}}$$

Feynman-Regeln

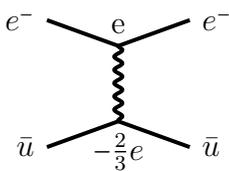


Abb. 2.24

Propagatoren :

Virtuelle Teilchen im Zwischenzustand sind unterdrückt durch den Propagator. Ist q der 4-er Impuls des ausgetauschten Teilchens, so ist das Matricelement

$$\mathcal{M} \sim \frac{1}{q^2 - m^2} \quad m = m_\gamma, m_{Z^0}, \dots$$

Bei $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ liegt ein s -Kanal vor, denn

$$q^2 = (e^+ + e^-)^2 = s$$

Daher ist

$$\sigma \sim \frac{1}{(s - m^2)^2} \quad m = m_\gamma, m_{Z^0}$$

Für das Z^0 muss außerdem die Lebensdauer berücksichtigt werden, siehe Breit-Wigner Formel. Die Summe aus Photon und Z^0 -Austausch, $\mathcal{M} = \mathcal{M}_\gamma + \mathcal{M}_Z$, ergibt die Form des Wirkungsquerschnitts als Funktion von s mit der Resonanz bei $s = m_Z^2$.

Für $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ liegt ein t -Kanal vor, denn

$$q^2 = (e - e')^2 = t < 0$$

Damit ist

$$\sigma \sim \frac{1}{(q^2 - m^2)^2} \sim \frac{1}{(|t| + m^2)^2}$$

Für Teilchen mit unterschiedlichem Spin $0, \frac{1}{2}, 1$, haben die Propagatoren leicht unterschiedliche Form.

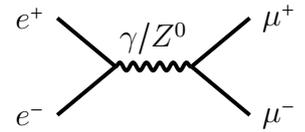


Abb. 2.25

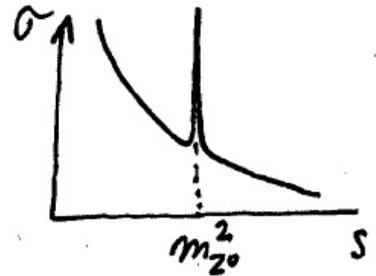


Abb. 2.26

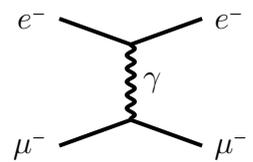


Abb. 2.27

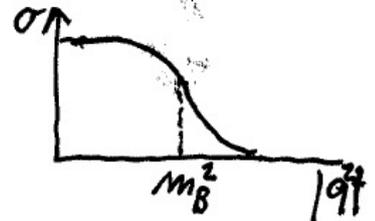


Abb. 2.28

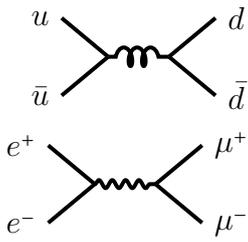


Abb. 2.29

Beispiel QED/QCD Mit den Vertexfaktoren und Propagatoren kann man einfache Abschätzung für die relative Rate von Prozessen erhalten. Als Beispiel dient die Rate der Prozesse

$$u\bar{u} \rightarrow d\bar{d} \quad \text{und} \quad e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$$

Bei hohen Energien, $E_{CMS} \gg m_{u,d}, m_{e,\mu}$, sind die Massen vernachlässigbar, und es gilt

$$\frac{\sigma(u\bar{u} \rightarrow d\bar{d})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = \frac{\alpha_s^2}{\alpha_{elm}^2} \approx \frac{0,12^2}{\left(\frac{1}{137}\right)^2} \approx 250$$

Hier steht kein Faktor für Farben, da $u\bar{u}$ bereits in einem Farbzustand vorliegt und Farbe erhalten ist.

Beispiel QED/schwach Für

$$\frac{\sigma(e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-)}{\sigma(e^-\mu^+ \rightarrow \nu_e\nu_\mu)} = \frac{\frac{\alpha_{elm}^2}{t^2}}{\frac{\alpha_{weak}^2}{(|t|+M_W^2)^2} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}_{Spin}}$$

Dies gilt, falls $E_{CMS} \gg m_\nu, m_e, m_\mu$.

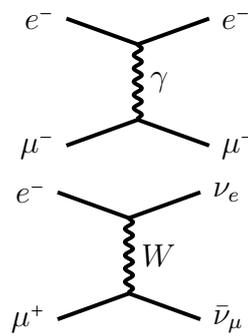


Abb. 2.30

2.10 Wirkungsquerschnitte und Zerfallsraten

Für die Berechnung von Wirkungsquerschnitten und Zerfallsraten muss nach Fermi's Goldener Regel außer dem Matrixelement auch der Phasenraum und der Fluss der einlaufenden Teilchen berechnet werden.

Der Phasenraum für ein einzelnes Teilchen beschreibt die Anzahldichte der Endzustände in einem Intervall von E bis $E + dE$. Hierzu gehört ein entsprechendes 3-er Impulsintervall von $|\vec{P}|$ bis $|\vec{P}| + |d\vec{P}|$. Dies entspricht einer Schale der Dicke $|d\vec{P}|$ auf der Oberfläche einer Impulskugel mit Radius $|\vec{P}|$, also einem Volumen im Impulsraum von $4\pi\vec{P}^2 |d\vec{P}|$. Je größer, bei gleichem Energieintervall, also der Impuls $|\vec{P}|$ der Teilchen im Endzustand ist, um so größer ist der Phasenraum und der Wirkungsquerschnitt. Der Phasenraum ist also größer für leichte Teilchen im Endzustand. Bei mehreren Teilchen im Endzustand müssen deren Phasenraumfaktoren multipliziert werden. Allerdings sind die 4-er Impulse aufgrund von Energie- und Impulserhaltung voneinander abhängig.

Der Flußfaktor der einlaufenden Teilchen entspricht bei einem Streuprozess der Relativgeschwindigkeit zwischen den Teilchen. Außerdem muss die Normierung der Wellenfunktionen aller Teilchen berücksichtigt werden.

All diese Zusammenhänge lassen sich relativistisch invariant formulieren. Insbesondere im Schwerpunktsystem der Prozesse ergeben sich folgende einfache Beziehungen:

2 → 2 **Streuprozesse** Für einen Prozess

$$a + b \rightarrow c + d \quad (2.120)$$

mit zwei Teilchen im Anfangszustand mit Impulsen \vec{P}_i (im CMS System) und zwei Teilchen im Endzustand mit Impulsen \vec{P}_f ist der Wirkungsquerschnitt im CMS-System:

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{|\vec{P}_f|}{|\vec{P}_i|} |\mathcal{M}|^2} \quad (2.121)$$

Hierbei ist wie üblich die Schwerpunktsenergie $s = (a + b)^2$. Zu beachten ist, dass im Falle gleicher Teilchenmassen im Anfangs und Endzustand $|\vec{P}_f| = |\vec{P}_i|$ gilt, so dass der auf den Phasenraum zurückgehende Faktor $|\vec{P}_f|/|\vec{P}_i| = 1$ ist. Das Matrixelement \mathcal{M} ist dimensionslos.

Aufgabe 2.5: Zeigen Sie, dass im ultrarelativistischen Limes jeder Wirkungsquerschnitt mit der Schwerpunktsenergie fällt, $\sigma \sim \frac{1}{s}$. Begründen Sie, dass dies direkt aus Dimensionsbetrachtungen folgen muss.

2-Körper-Zerfall Für einen Zerfall

$$a \rightarrow b + c \quad (2.122)$$

im Schwerpunktssystem von Teilchen a mit zwei Teilchen im Endzustand mit Impulsen $|\vec{P}_f|$ ist die Zerfallsbreite

$$\boxed{\frac{d\Gamma}{d\Omega_f} = \frac{1}{32\pi^2} \frac{|\vec{P}_f|}{m_a^2} |\mathcal{M}|^2} \quad (2.123)$$

Wenn das Teilchen a nicht polarisiert ist, gibt es keine Vorzugsrichtung im Raum. Es kann daher sofort über den Raumwinkel integriert werden, so dass

$$\boxed{\Gamma = \frac{1}{8\pi} \frac{|\vec{P}_f|}{m_a^2} |\mathcal{M}|^2} \quad (2.124)$$

Aufgabe 2.6: Zeigen Sie, dass schwere Teilchen eine kurze Lebensdauer haben, wenn sie in viel leichtere Teilchen zerfallen.

3 Wechselwirkungen und Symmetrien

3.1 Fundamentale Graphen

Aus der Eichtheorie und der Quantenfeldtheorie folgt die Vorhersage fundamentaler Vertizes zwischen Fermionen und Boson beziehungsweise mehrerer Bosonen. Zudem folgt aus der Dirac-Gleichung, dass einlaufende Teilchen durch auslaufende Anti-Teilchen ersetzt werden können, und umgekehrt. Zusätzlich werden die erlaubten Graphen durch Erhaltungssätze für Energie, Impuls und Ladungen eingeschränkt. Die daraus folgenden Feynman-Graphen zeigen alle erlaubten Prozesse in der Natur.

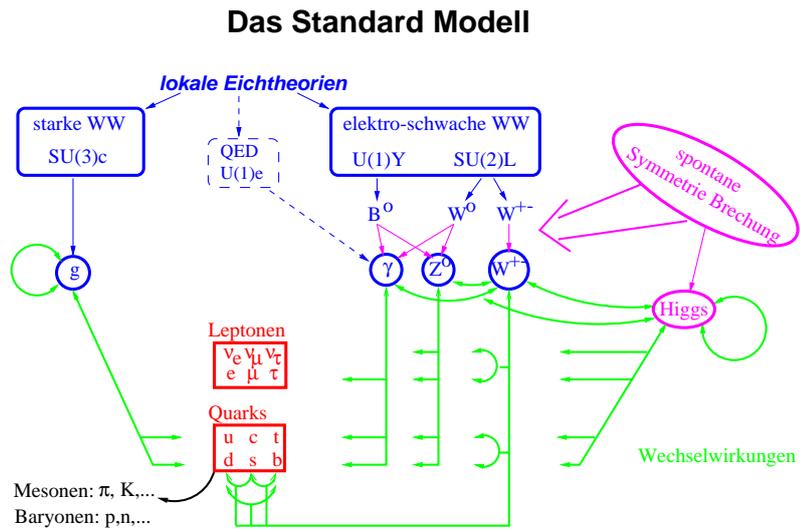


Abb. 3.1 Schema des Standard-Modells mit allen Teilchen. Grüne Pfeile stellen Wechselwirkungen dar.

3.1.1 Elektromagnetismus

Fundamentaler Graph

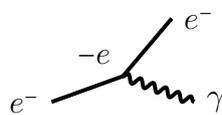


Abb. 3.2 Fundamentaler Graph für alle el. geladenen Teilchen, Teilchen ändert 4-er Impuls, Teilchensorte bleibt unverändert, Amplitude \sim el. Ladung

Hieraus lassen sich folgende weitere Graphen ableiten:



Abb. 3.3 Ersetze Teilchen im Endzustand durch Anti-Teilchen im Anfangszustand



Abb. 3.4 Zeitumkehr

Reale Prozesse

Für sich allein sind diese fundamentalen Vertizes als reale Prozesse wegen Energie und Impulserhaltung verboten. Reale Prozesse setzen sich daher aus 2 oder mehr dieser fundamentalen Vertizes zusammen.

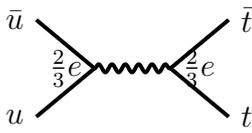


Abb. 3.5 s-Kanal
 Paar-Erzeugung neuer Teilchen reelle Teilchen im Anfangs- und Endzustand, virtuelle Teilchen im Zwischenzustand,
 erlaubt, falls $p_u + p_{\bar{u}} = p_t + p_{\bar{t}}$
 Schwellenenergie $E_{CMS} \geq 2m_t$

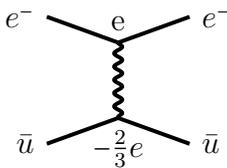


Abb. 3.6 t-Kanal,
 keine Schwellenenergie

3.1.2 Starke Wechselwirkung

Fundamentale Graphen

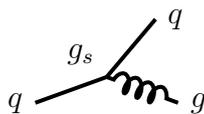


Abb. 3.7 Quark strahlt Gluon ab:
 Kopplung = g_s , gleich für alle Quarks

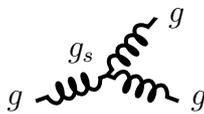


Abb. 3.8 3-Gluon Vertex
 Gluon tragen selber Farbe: Gluon Selbst-Wechselwirkung
 Kopplung = g_s , wie für Quarks



Abb. 3.9 4-Gluon Vertex
 Kopplung = g_s^2 , fast wie für Quarks

Reale Graphen

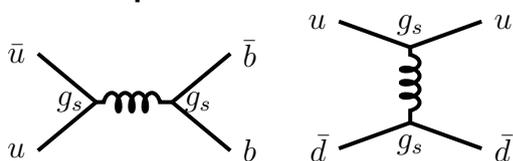


Abb. 3.10

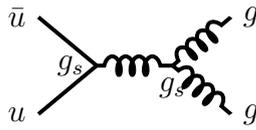


Abb. 3.11

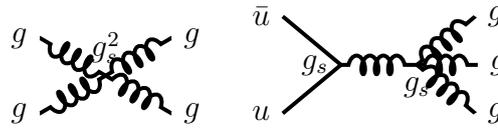


Abb. 3.12

3.1.3 Schwache Wechselwirkung

Fundamentale Graphen

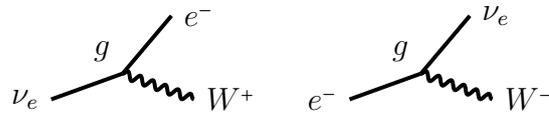


Abb. 3.13 Lepton strahlt W ab und ändert seinen Typ, Kopplung = g , gleich für alle Leptonen

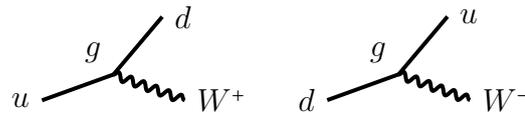


Abb. 3.14 Quark strahlt W ab und ändert seinen Typ, Kopplung = g , gleich für alle Quarks

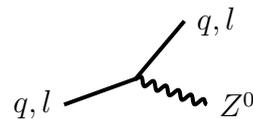


Abb. 3.15 Quark oder Lepton strahlt Z ab, keine Änderung des Fermion-Typs, Kopplung unterschiedlich für ν_e, e, d, u

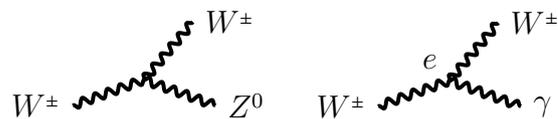


Abb. 3.16 W und Z tragen schwache Ladung, WWZ Selbstwechselwirkung, W ist elektrische geladen und strahlt γ ab, Kopplung = e

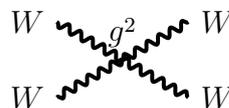


Abb. 3.17 4-W Vertex, Kopplung = g^2

Fundamentale Graphen mit Higgs

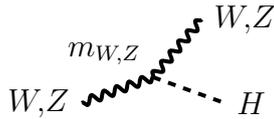


Abb. 3.18 W, Z strahlt Higgs ab
Kopplung \sim Masse von W, Z

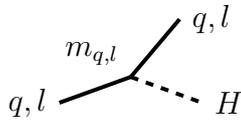


Abb. 3.19 Lepton oder Quark strahlt Higgs ab, keine Änderung des Typs
Kopplung \sim Masse des Fermions

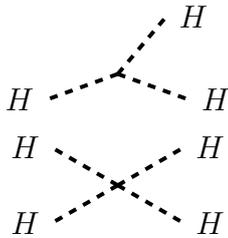


Abb. 3.20 3-Higgs- Selbstwechselwirkung

Abb. 3.21 4-Higgs- Selbstwechselwirkung

Reale Graphen

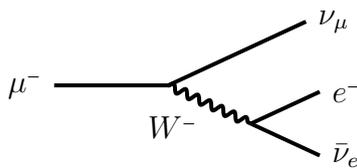


Abb. 3.22 Muon-Zerfall
 $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$. Das μ strahlt zunächst ein virtuelles W ab und geht in ein Muon-Neutrino über. Das W zerfällt in Elektron und Elektron-Neutrino.

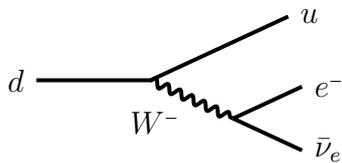


Abb. 3.23 d-Zerfall $d \rightarrow u e^- \bar{\nu}_e$ über ein virtuelles W. Das W zerfällt in Elektron und Elektron-Neutrino.

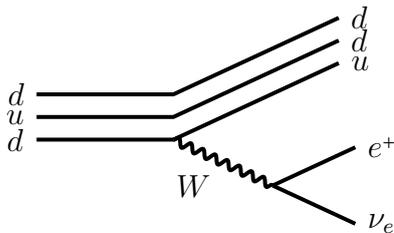


Abb. 3.24 Neutron-Zerfall
 $n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e$. Eines der d Quarks zerfällt, die anderen Quarks nehmen nicht direkt am Zerfall teil.
Quark-Fluss-Diagramm

$$\begin{pmatrix} d \\ d \\ u \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u \\ d \\ u \end{pmatrix} e^- \bar{\nu}_e$$

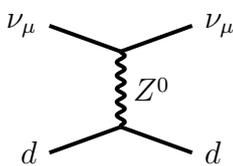


Abb. 3.25 Z-Austausch ("neutraler Strom") in der Neutrino-Quark-Streuung $\nu_\mu d \rightarrow \nu_\mu d$.



Abb. 3.26 W-Zerfall.
Realer Prozess möglich auch für ein reelles W, da $M_W > m_\tau + m_{\bar{\tau}}$



Abb. 3.27 Z-Zerfall.
Realer Prozess möglich auch für ein reelles Z, da $M_Z > 2m_{b,\bar{b}}$

Baryonenzahl: unterscheidet Quarks von Anti-Quarks und Leptonen

$$\begin{aligned}
 B &= +1 && \text{für } p, n \text{ und andere 3-Quark-Systeme} \\
 B &= +\frac{1}{3} && \text{für alle Quarks } u, d, s, c, t, b \\
 &= -\frac{1}{3} && \text{für alle Anti-Quarks } \bar{u}, \bar{d}, \bar{s}, \bar{c}, \bar{t}, \bar{b}
 \end{aligned}$$

z. B. $\Delta^{++} = (uuu) \Rightarrow B = 1$ Baryon
 $\pi^+ = u\bar{d} \Rightarrow B = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$ Meson

Die Baryonenzahl ist in allen WW erhalten.

Quark-Flavour-Zahlen:

Starker Isospin: $I = 1/2$ für u, d, sonst 0
 $I_3 = 1/2$ für u, $I_3 = -1/2$ für d
 $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ Isospin (analog Spin)

Strangeness: $S = 1$ für s, sonst 0
 Charm: $C = 1$ für c
 Beauty: $B = 1$ für b
 Top: $T = 1$ für t

Quark-Flavour-Zahlen sind in der schwachen WW nicht erhalten.

	elm WW	starke WW	schwache WW
Leptonzahl L	✓	✓	✓
L_e, L_μ, L_τ	✓	✓	nein
Baryonzahl B	✓	✓	✓
Quark-Flavour	✓	✓	nein
Parität	✓	✓	nein
C-Parität	✓	✓	nein
Zeitumkehr T	✓	✓	nein
el. Ladung, Farbe	✓	✓	✓

Tabelle 3.1 Gültigkeit der Quantenzahlen in den verschiedenen Wechselwirkungen.

Aus der Erhaltung von L und B folgt, dass Leptonen und Quarks nicht einzeln erzeugt oder vernichtet werden können, sondern nur paarweise als Teilchen + Anti-Teilchen.

Beispiele:



Abb. 3.28 Verbotener Prozess, wegen L_μ, L_e Erhaltung in der elektromagnetischen WW

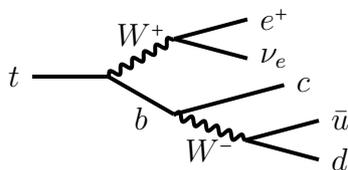


Abb. 3.29 Erlaubter Prozess, denn (nur) die schwache WW ändert die Flavour-Quantenzahlen.

3.3 Symmetrie

Ein physikalisches System besitzt eine Symmetrie, wenn es unter einer Transformation seines Zustands seine Eigenschaften und Bewegungsgleichungen nicht ändert. Die Bewegungsgleichungen müssen also in ihrer mathematischen Form invariant unter der Symmetrie-Transformation sein. Mit einer solchen Symmetrie ist verbunden, dass eine bestimmte Eigenschaft des Systems im System selber nicht beobachtbar ist.

3.3.1 Klassische Impulserhaltung

Als Beispiel wird ein System aus zwei Teilchen mit Ortskoordinaten \vec{x}_1, \vec{x}_2 betrachtet. Der Raum sei homogen. Dann ist nur die relative Position der beiden Teilchen zueinander, aber nicht ihre absolute Position des Systems im Raum prinzipiell nicht beobachtbar. Damit kann auch der Ursprung des Koordinatensystems beliebig gewählt werden. Die Bewegungsgleichungen des System müssen also invariant sein unter der räumlichen Translation (Symmetrie-Transformation)

$$\vec{x}_i \rightarrow \vec{x}_i' = \vec{x}_i + \vec{x}_0 \quad (3.1)$$

Das Potential zwischen den beiden Teilchen kann daher nicht von der absoluten Position im Raum abhängen, sondern nur von der relativen Position der beiden Teilchen zueinander,

$$V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \quad (3.2)$$

denn explizit ist

$$\vec{x}_1' - \vec{x}_2' = (\vec{x}_1 + \vec{x}_0) - (\vec{x}_2 + \vec{x}_0) = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \quad (3.3)$$

und damit auch

$$V'(\vec{x}_1' - \vec{x}_2') = V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \quad (3.4)$$

Die Kraft auf die beiden Teilchen ist nach Newton:

$$\partial_t \vec{P}_1 = \vec{F}_1 = -\nabla_1 V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \quad (3.5)$$

$$\partial_t \vec{P}_2 = \vec{F}_2 = -\nabla_2 V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = +\nabla_1 V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \quad (3.6)$$

Der Gesamtimpuls $\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$ ist daher erhalten,

$$\partial_t \vec{P} = \partial_t \vec{P}_1 + \partial_t \vec{P}_2 = 0 \quad (3.7)$$

Aus der Nicht-Beobachtbarkeit der absoluten Ortes folgt also die Erhaltung des Gesamtimpulses.

Mit Hilfe des Hamilton-Lagrange Formalismus lässt sich in der klassischen Physik allgemein zeigen, dass Symmetrien mit Erhaltungsgrößen zusammenhängen.

Symmetrie	nicht beobachtbar	Transformation	Erhaltungsgröße
Raum ist homogen	Position im Raum	Translation $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{x}_0$	Impuls
Raum ist isotrop	Orientierung	Rotation $\varphi' = \varphi + \varphi_0$	Drehimpuls
Zeit ist homogen	absolute Zeit	Zeit-Versch. $t' = t + t_0$	Energie

3.3.2 U(1) Phaseninvarianz und Ladung in der Quantenmechanik

Die Transformation eines quantenmechanischen Zustands $|\psi\rangle$ sei

$$|\psi'\rangle = U |\psi\rangle \quad \langle\Psi'| = \langle\psi| U^\dagger \quad (3.8)$$

Eine Symmetrietransformation soll Observablen unverändert lassen. Dies gilt insbesondere für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit,

$$\langle\psi'|\psi'\rangle = \langle\psi|U^\dagger U|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle \quad (3.9)$$

so dass U unitär sein muss, $U^\dagger = U^{-1}$. Allgemein lassen sich unitäre Operatoren darstellen als

$$U = e^{-i\alpha Q} \quad (3.10)$$

wobei a ein freier reeller Parameter (Zahl) und Q ein Operator sein soll, der Generator der Transformation genannt wird. Die e -Funktion ist hier als Tayler-Entwicklung aufzufassen. Wegen

$$1 = U^\dagger U = e^{+i\alpha Q^\dagger} \cdot e^{-i\alpha Q} = e^{i\alpha(Q^\dagger - Q)} \quad (3.11)$$

muss Q also hermitesch und damit eine Observable sein, $Q^\dagger = Q$. Ist der Zustand $|\psi\rangle$ ein Eigenzustand des Operators, $Q|\psi\rangle = q|\psi\rangle$, so entspricht die Transformation einfach einer Änderung der Phase des Zustands,

$$U|\psi\rangle = e^{-i\alpha Q}|\psi\rangle = e^{-i\alpha q}|\psi\rangle \quad (3.12)$$

Sowohl $|\psi\rangle$ als auch der transformierte Zustand $|\psi'\rangle$ müssen die Schrödinger-Gleichung erfüllen

$$i\partial_t |\psi\rangle = H|\psi\rangle \quad i\partial_t |\psi'\rangle = H|\psi'\rangle = HU|\psi\rangle \quad (3.13)$$

Ist U nicht explizit von der Zeit abhängig, so folgt

$$i\partial_t |\psi'\rangle = i\partial_t |U\psi\rangle = U i\partial_t |\psi\rangle = UH|\psi\rangle = HU|\psi\rangle \quad (3.14)$$

H und U kommutieren also. Damit ist der Erwartungswert von U und von Q eine Erhaltungsgröße

$$i\partial_t \langle\psi|U|\psi\rangle = 0 \quad i\partial_t \langle\psi|Q|\psi\rangle = i\partial_t q = 0 \quad (3.15)$$

Die erhaltene Größe q wird Ladung genannt. In diesem einfachen Fall, bei dem die unitäre Transformation nur von einem Parameter α abhängt ($U(1)$ -Transformation), ist q die elektrische Ladung oder die Hyperladung.

3.3.3 U(1) Eichinvarianz und Elektromagnetismus

Es reicht für die Invarianz der Aufenthaltswahrscheinlichkeit völlig aus, dass lokal, also an jedem Ort und zu jeder Zeit, die Bedingung

$$\psi'^* \psi' = \psi^* \psi \quad (3.16)$$

erfüllt ist. Der Parameter α muss also keine universelle Konstante sein, sondern kann selber eine Funktion von Ort und Zeit sein,

$$\Psi' = U \Psi = e^{-i\alpha(x,t)Q} \Psi \quad (3.17)$$

lokale Eichinvarianz

Da die Phase und damit auch α prinzipiell nicht beobachtbar ist, kann man dies sogar zu einem Postulat erklären. Dies ist die Grundidee der Eichtheorie. Mit ihr kann man zeigen, dass das Potential einer Wechselwirkung zwischen einem Teilchen mit Ladung q und dem Photonfeld in der Form

$$q \cdot A^\mu(x,t) \cdot \psi(x,t)$$

geschrieben werden muss, wobei A ein 4-er Vektorfeld ist. Im Fall des Elektromagnetismus beinhaltet es das bekannte skalare Potential φ und das Vektorpotential \vec{A} ,

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \varphi \\ \vec{A} \end{pmatrix}^\mu \quad (3.18)$$

aus denen dann bekanntlich die \vec{E} und \vec{B} -Felder berechnet werden können.

Formal kann man dies wie folgt ableiten. In allen quantenmechanischen Wellengleichungen

$$\underbrace{i\partial_t \Psi = -\frac{\nabla^2}{2m} \Psi}_{\text{Schrödinger}} \quad \underbrace{(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2)\Phi}_{\text{Klein-Gordon}} \quad \underbrace{(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0}_{\text{Dirac}} \quad (3.19)$$

tauchen Ableitungen nach Ort und Zeit auf, die bei einer lokalen Eichtransformation die Form der Wellengleichung ändern. Zum Beispiel geht bei der Dirac-Gleichung der Massenterm und der kinetische Term durch eine U(1) Eichtransformation über in

$$m\Psi' = e^{-i\alpha q} m\Psi \quad (3.20)$$

$$\gamma^\mu \partial_\mu \Psi' = e^{-i\alpha q} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - iq e^{-i\alpha q} (\partial_\mu \alpha) \gamma^\mu \Psi \quad (3.21)$$

Der letzte Term rechts ändert die Form der Dirac-Gleichung für Ψ' , die Bewegungsgleichung 3.19 ist also nicht eichinvariant. Allgemein muss für eine Bewegungsgleichung der Form

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi = 0 \quad (3.22)$$

auch

$$(i\gamma^\mu D'_\mu - m)\Psi' = e^{-i\alpha q} (i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi = 0 \quad (3.23)$$

gelten. Dies ist der Fall, wenn

$$D'_\mu \Psi' = e^{-i\alpha q} D_\mu \Psi \quad (3.24)$$

Man kann dies erreichen mit dem Ansatz

$$D_\mu \Psi = (\partial_\mu + iqA_\mu(\vec{x}, t)) \Psi \quad (3.25)$$

gilt, denn

$$D'_\mu \Psi' = (\partial_\mu + iqA'_\mu) (e^{-i\alpha q} \Psi) \quad (3.26)$$

$$= e^{-i\alpha q} [(\partial_\mu \Psi) - iq(\partial_\mu \alpha) \Psi + iqA'_\mu \Psi] \quad (3.27)$$

Der Ausdruck in der Klammer ist tatsächlich gleich $D_\mu \Psi$ falls

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha \quad (3.28)$$

Offenbar darf A_μ um den Gradienten einer skalaren Funktion verändert werden, ohne dass sich die Bewegungsgleichung ändert. Da $\alpha = \alpha(\vec{x}, t)$ sind auch die vier Komponenten von A_μ Funktionen von Ort und Zeit. Es muss daher als ein Potential aufgefasst werden. Damit ist die eichinvariante Dirac-Gleichung

$$\boxed{[i\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) - m] \Psi = 0} \quad (3.29)$$

Multipliziert man von links mit γ^0 so folgt daraus

$$\boxed{i\partial_t \Psi = H\Psi = \gamma^0 \vec{\gamma}(\vec{P} - q\vec{A})\Psi + m\gamma^0 \Psi + q\varphi\Psi} \quad (3.30)$$

Dies entspricht der schon von der Schrödinger-Gleichung bekannten Form der *minimalen Kopplung*, d.h. der Ersetzung

$$\vec{P} \rightarrow \vec{P} - q\vec{A}, \quad E \rightarrow E - q\varphi \quad (3.31)$$

bei der Einführung des Elektromagnetismus.

3.3.4 Vorhersagen der Eichtheorien

Eichtheorien machen ganz allgemein die folgenden Aussagen, die tatsächlich alle (bis auf eine Ausnahme) experimentell bestätigt worden sind:

- Er werden neue Vektorfelder A_μ vorhergesagt.
- Die Vektorfelder A_μ haben keine Masse m_A , denn ein zusätzlicher Massenterm wie $m_A A^\mu$ wäre nicht eichinvariant.
- Die Quanten von Vektorfeldern haben Spin 1.
- Die dimensionslose *Ladung* q von Ψ ist erhalten, aber der Zahlenwert ist nicht vorhergesagt und eine echte Naturkonstante.
- Die Vektorfelder sind auf ganz bestimmte Weise in den Bewegungsgleichungen mit den Fermionen Ψ gekoppelt, $q \cdot A_\mu \cdot \gamma^\mu \Psi$. Dies entspricht den fundamentalen Vertizes der jeweiligen Theorie.

Eichfelder:

Elektromagn: Photon

Schwach: W^\pm, Z^0

Stark: Gluon

Die Massen von W, Z sind nicht Null (Higgs-Mechanismus).

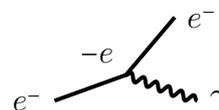
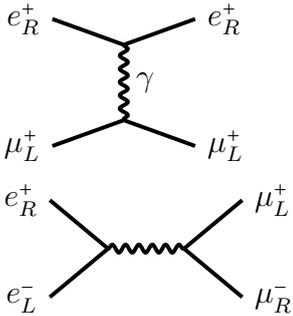


Abb. 3.30

- Diese γ^μ Kopplungen implizieren, dass die Chiralität der Fermionen an jedem Vertex erhalten bleibt.

Die letzte Bedingung hat weitreichende Folgen für die Winkelverteilung in Streuprozessen. Im Limes hoher Energien, $E \gg m$, ändert ein Streuprozess die Helizität eines Fermions nicht (siehe Abschnitt D.6. Da außerdem Drehimpulserhaltung gilt, ergeben sich bevorzugte Streuwinkel zwischen den einlaufenden und auslaufenden Teilchen. Winkelverteilungen erlauben daher eine Überprüfung

- des Propagators und des Spins der Eichbosonen,
- des Spins der streuenden Teilchen,
- der Chiralitätserhaltung am Vertex,
- des Zusammenhangs zwischen Chiralität und Helizität.



Erlaubte und nicht erlaubte Prozesse sind beispielsweise im Elektromagnetismus

$$e_R^+ \mu_L^+ \rightarrow e_R^+ \mu_L^+ \quad \text{erlaubt} \quad (3.32)$$

$$e_R^+ \mu_L^+ \rightarrow e_L^+ \mu_R^+ \quad \text{nicht erlaubt} \quad (3.33)$$

$$e_R^+ e_L^- \rightarrow \mu_L^+ \mu_R^- \quad \text{erlaubt} \quad (3.34)$$

$$e_L^+ e_L^- \rightarrow \mu_L^+ \mu_L^- \quad \text{nicht erlaubt} \quad (3.35)$$

Abb. 3.31
Erlaubte Prozesse.

3.4 Messungen zur Fermion-Fermion-Streuung

Beispiele für die Messung von Winkelverteilungen zeigen die folgenden Abbildungen.

Beim PETRA Beschleuniger am DESY wurde mit Schwerpunktsenergien bis $\sqrt{s} \leq 46$ GeV die Winkelverteilungen $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ gemessen. In diesem Energiebereich sind Effekte durch den Photon-Austausch noch deutlich größer als Effekte durch den Z^0 -Austausch der schwachen Wechselwirkung.

Der totale Wirkungsquerschnitt für $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ ergibt sich aus dem differentiellen durch Integration über die Winkel,

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{4\pi}{3} \frac{\alpha^2}{s} \approx 100nb \frac{GeV^2}{s}$$

mit $\hbar c = 1 = 0,2GeV fm$ und der Feinstrukturkonstanten⁶

$$\alpha_{em} = \frac{e^2}{4\pi}.$$

Wie in Abb. 3.32 gezeigt, fällt der Wirkungsquerschnitt mit der Schwerpunktsenergie, $\sigma \sim 1/s$, wie von der QED und auch aus

⁶ Bei diesen hohen Energien ist aufgrund der Renormierung der Quantenkorrekturen der Zahlenwert für $\alpha_{em} \approx 1/128$ bereits deutlich größer ist als der aus der Atomphysik bekannte Wert $1/137$.

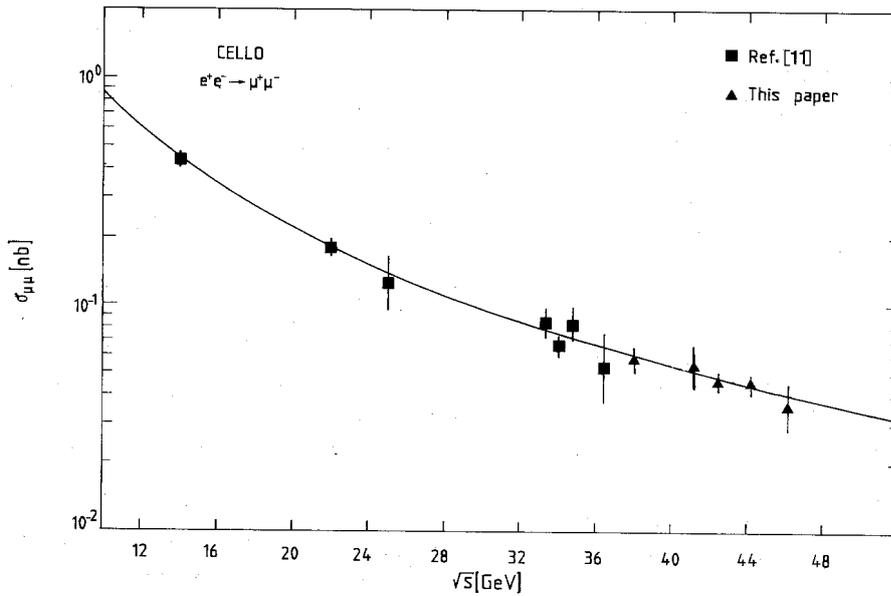


Abb. 3.32 Totaler Wirkungsquerschnitt σ für $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ als Funktion der Schwerpunktsenergie \sqrt{s} . Daten der Cello und Jade Kollaboration am PETRA Beschleuniger (Phys.Lett 191B (1987)).

Dimensionsgründen vorhergesagt. Bei $\sqrt{s} = 46$ GeV ist der Wirkungsquerschnitt 0.047 nb, die effektive Reichweite der Wechselwirkung also etwa 1000 mal kleiner als der Radius eines Protons. Dies schränkt sehr stark die Hypothese einer Substruktur des Elektrons oder Muons ein.

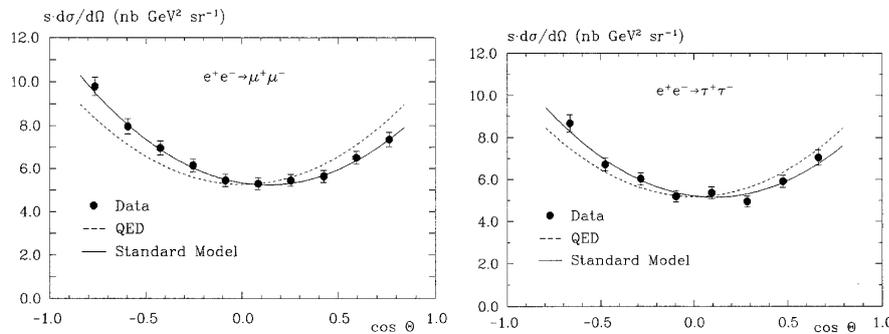


Abb. 3.33 Differentieller Wirkungsquerschnitt $s \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega}$ für $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ (links) und für $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$ (rechts) als Funktion des Streuwinkels θ bei $\sqrt{s} = 35$ GeV. Daten der Jade Kollaboration am PETRA Beschleuniger (Z. Phys. C 46, 547-553 (1990)).

Die mit s normierte Winkelverteilung $s \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega}$ für Paarproduktion von Muonen und Taus ist in Abb. 3.33 gezeigt. Die im Vergleich gezeigte Erwartung für reine QED beschreibt annähernd die Daten. Allerdings kann man bereits bei diesen \sqrt{s} Werten den Z^0 Austausch der schwachen Wechselwirkung nicht mehr vernachlässigen. In der Summe beschreibt QED und schwache Wechselwirkung die Daten sehr gut.

Abb. 3.34 zeigt die Winkelverteilung für Bhabha-Streuung, $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$. Auch hier stimmen die Daten sehr gut mit der QED-Erwartung, die auf der Interferenz zweier Matrixelemente (Feynman-Diagramme)

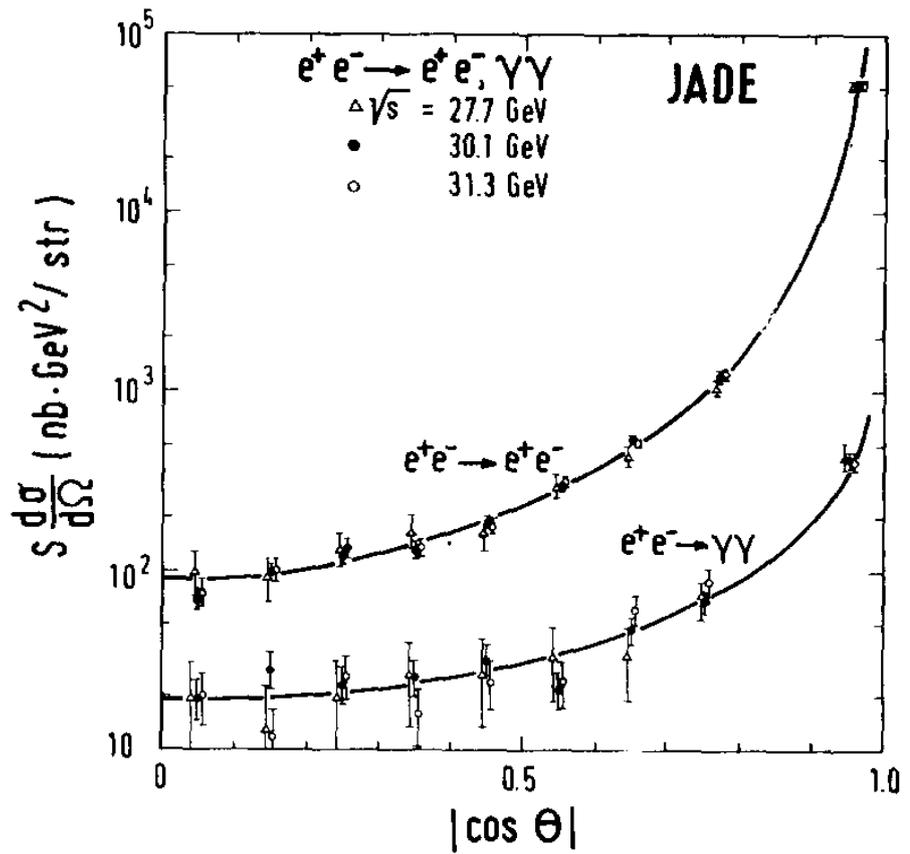


Abb. 3.34 Differentieller Wirkungsquerschnitt $s \cdot d\sigma/d\Omega$ für $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ und $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$ als Funktion des Streuwinkels Θ bei $\sqrt{s} = 27,7 - 31 \text{ GeV}$. Daten der Jade Kollaboration am PETRA Beschleuniger (Phys.Lett 92B (1980)).

beruht, überein.

Auch gezeigt ist die Winkelverteilung für den Prozess $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$, dessen Feynman-Diagramm im Gegensatz zu den anderen Prozessen einen Fermion - Propagator beinhaltet. Auch hier wird die QED bestätigt. Insgesamt findet man bereits bei Rechnungen in führender Ordnung häufig Genauigkeiten im % Bereich.

Erzeugung von Hadronen in der QED Zur Untersuchung der Eigenschaften der Hadronen und Quarks eignet sich besonders der Prozess

$$e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}$$

und als Messgröße das Verhältnis von hadronischem zu leptonischem Wirkungsquerschnitt.

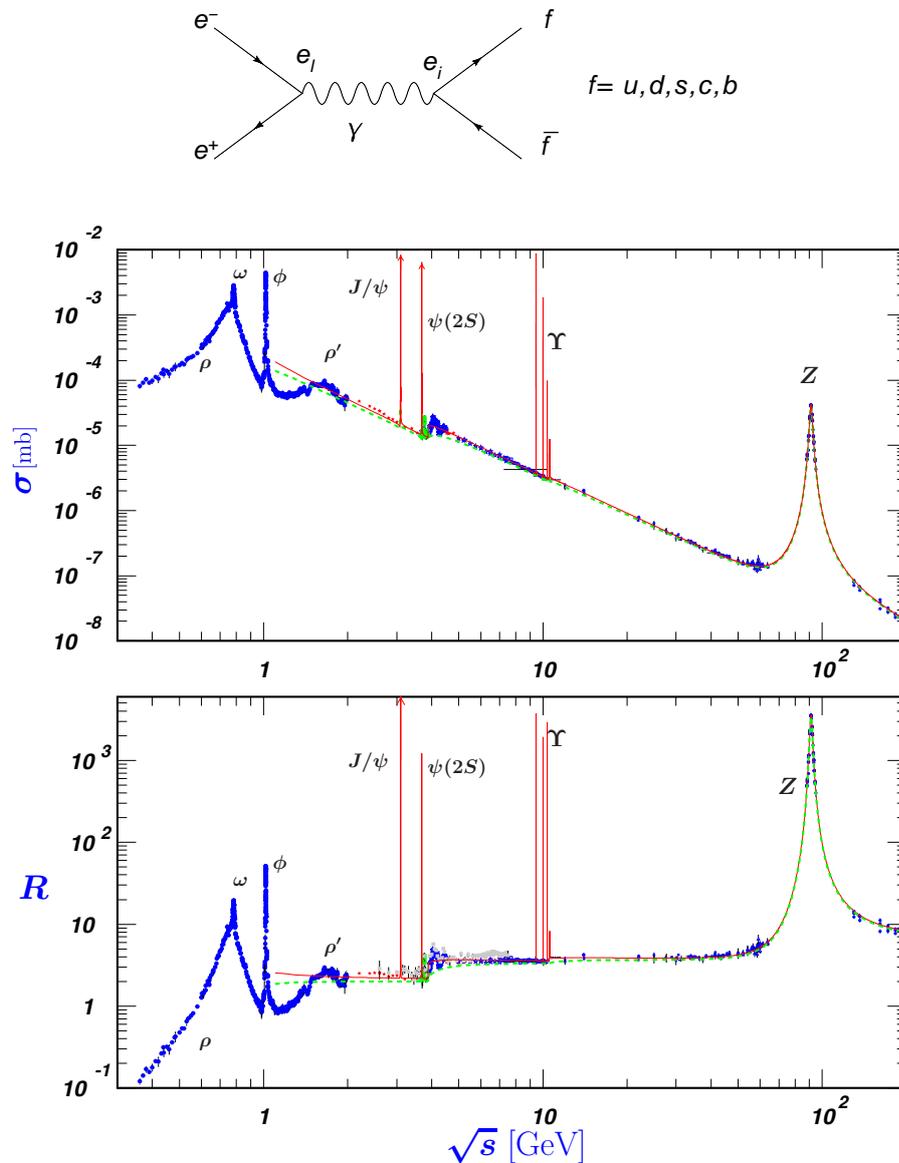


Abb. 3.35 Oben: Wirkungsquerschnitt für $e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}$ als Funktion der Schwerpunktsenergie. Unten: Verhältnis R der Wirkungsquerschnitte von $e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}$ und $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$.

$$R = \frac{\sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}}}{\sigma_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}}$$

3.4 Messungen zur Fermion-Fermion-Streuung

Unter der Annahme, dass man die Produktion von Hadronen durch die Produktion von Quarks mit anschließendem Übergang (Wahrscheinlichkeit 1) der Quarks in Hadronen erklären kann (QCD Faktorisierung), gilt

$$R = \frac{\sigma_{e^+e^- \rightarrow u\bar{u}, d\bar{d}, s\bar{s}, c\bar{c}, b\bar{b}, t\bar{t}}}{\sigma_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}} = \frac{\sum_q |\bar{M}_q|^2 dQ_q}{|\bar{M}_\mu|^2 dQ_\mu}$$

Bei $\sqrt{s} \approx 30\text{GeV}$ kann man den Z^0 Austausch vernachlässigen gegenüber dem γ -Austausch, so dass R sensitiv ist auf

- die elektrische Ladung der Quarks
- den Spin der Quarks
- die Masse der Quarks

Die Massen gehen unter anderem in das Verhältnis der Phasenraumfaktoren ein (siehe Gleichung 2.121),

$$\frac{\varrho(m_q)}{\varrho(m_\mu)} \approx \frac{\varrho(m_q)}{\varrho(m_\mu=0)} = \frac{P_f(m_q)}{P_f(m_\mu=0)} = \frac{\sqrt{E^2 - m_q^2}}{\sqrt{E^2}} = \sqrt{1 - \frac{4m_q^2}{s}}$$

das schnell gegen 1 geht für $E = \frac{1}{2}\sqrt{s} > m_q$.

4 Schwache Wechselwirkung

4.1 Historie der Schwachen Wechselwirkung

Die schwache Wechselwirkung unterscheidet sich in den folgenden Aspekten deutlich von den anderen Wechselwirkungen:

- Zerfall elementarer Teilchen
- Schwere Austauschteilchen
- Paritätsverletzung
- Symmetriebrechung durch Higgs-Mechanismus

Um diese sehr unterschiedlichen Eigenschaften zu verstehen waren daher eine Reihe experimenteller Entdeckungen notwendig:

1896 Bequerel entdeckt die Radioaktivität

1914 Chadwick entdeckt, dass β -Strahlen anders als α -Strahlen ein kontinuierliches Energie-Spektrum haben. Heute wissen wir, dass β -Strahlen Elektronen oder Positronen sind, die mit keV - MeV Energien von zerfallenden Kernen emittiert werden.

1927 Ellis und Woostar argumentieren, dass $E_\beta \leq E_{max}$ gilt. Daraus folgt, dass entweder die Energie-Erhaltung verletzt ist (Bohr) oder aber ein 3-Körperzerfall mit einem neuen, unsichtbaren Teilchen vorliegt, dem Neutrino (Pauli). Unsichtbar bedeutet, dass es weder elektromagnetischer noch starker Wechselwirkung unterliegt.

1933 Fermi formuliert die Theorie des β -Zerfalls. Für den Zerfall

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

setzte er als Matrix-Element an:

$$\mathcal{M} = G_F \hat{j}_{(pn)} \hat{j}_{(e\nu)}$$

also eine Theorie mit "geladenen" Strömen ("charged current"), der unterschiedliche Teilchen zusammenfasst.

Dies ist eine 4-Fermion Wechselwirkung ohne Austauschteilchen und daher ohne Propagator. Die neue Kopplungskonstante ist die Fermi-Konstante

$$G_F = 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$$

Diese Fermi-Theorie enthält aber nicht die Paritätsverletzung der schwachen Wechselwirkung.

1956 Lee und Yang argumentieren, dass in allen schwachen Prozessen Paritätsverletzung auftritt. Ein Jahr später gelingt C.S. Wu der erste experimentelle Beweis dazu.

1960 Glashow, Salam und Weinberg formulieren die "GSW"-Theorie der Elektroschwachen Wechselwirkung, das Standard-Modell. Sie beinhaltet γ, W^\pm und sagt das Z^0 voraus, also auch neutrale, schwache Ströme.

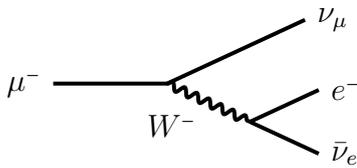
1973 Entdeckung der neutralen, schwachen Ströme in der Gargamelle Blasenkamer am CERN in der Reaktion:

$$\bar{\nu}_\mu + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + e^-$$

1984 Entdeckung des W^\pm und des Z^0 Bosons am UA1 Experiment am CERN (Nobelpreis Rubia und Vandermer)

2012 Entdeckung des Higgs-Bosons am Atlas und CMS Experiment am LHC-Beschleuniger am CERN (Nobelpreis Higgs, Englert 2013)

4.2 Fermi-Konstante und W-Propagator



In der heutigen Interpretation durch die Theorie der schwachen Wechselwirkung entstehen alle Zerfälle elementarer Teilchen

$$d \rightarrow u e^- \bar{\nu}_e, \quad \mu^- \rightarrow \nu_\mu e^- \bar{\nu}_e, \quad \dots$$

durch den Austausch eines neuen Teilchens W^\pm mit Spin 1. Für den Muon-Zerfall als Beispiel ergibt sich das Matrixelement zu

$$\mathcal{M} \sim j_{\nu_\mu\mu} \frac{g^2}{q^2 - m_W^2} j_{\bar{\nu}_ee} \quad (4.1)$$

Abb. 4.1

Muon-Zerfall. Das μ strahlt zunächst ein virtuelles W ab und geht in ein Muon-Neutrino über. Das W zerfällt in Elektron und ein Elektron-Antineutrino.

Die neue Konstante g ist dabei der Vertexfaktor (die Kopplungskonstante) des W - Bosons an ein Lepton- oder Quark Paar. Sie ist gleich für alle Leptonen und Quarks. Der *geladene* Strom $j_{\nu_\mu\mu}$ beschreibt den Fermionstrom $\mu^- \rightarrow \nu_\mu$, der ebenfalls geladene Strom $j_{\bar{\nu}_ee}$ den Strom im Endzustand, bei dem ein e^- und ein $\bar{\nu}_e$ entsteht. Im Limes kleiner Impulsüberträge $|q^2| \ll m_W^2$ vereinfacht sich der Propagator für das schwere W -Boson dann zu $1/m_W^2$. Ein genauer Vergleich mit der Formel aus der Fermi-Theorie liefert:

$$\boxed{\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8m_W^2}} \quad (4.2)$$

Damit ist die Fermikonstante als Quotient aus Kopplungskonstante und Masse des W interpretiert worden.

Bei hohen Impulsüberträgen wird der W -Propagator die richtigen Ergebnisse liefern, nicht jedoch die Fermi-Theorie. Vergleicht man

den Austausch des masselosen Photons mit dem eines massiven W -Bosons, so entspricht dies den Potentialen (siehe auch Abschnitt 2.6):

$$\gamma\text{-Austausch:} \quad V_{Coulomb} = \frac{e^2}{4\pi r} \quad (4.3)$$

$$W\text{-Austausch:} \quad V_{Yukawa} = \frac{g^2}{4\pi r} e^{-M_W r} \quad \text{Yukawa-Potential (4.4)}$$

$$\text{für } M_W \rightarrow \infty \quad V_{Yukawa} = \frac{g^2}{M_W^2} \delta^3(r) \quad (4.5)$$

Eine große Masse entspricht daher einer kurzen Reichweite. Symbolisch geht damit der Propagator des W -Austausches in eine 4-Fermion Kontaktwechselwirkung über.



Die Reichweite der schwachen WW ist damit

$$R_W \approx \frac{\hbar c}{M_W} = \frac{200 \text{ MeV fm}}{80 \text{ GeV}} \approx 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ fm}$$

Das ist etwa 1/400 der Reichweite der starken Wechselwirkung oder des Radius des Protons. Die schwache Wechselwirkung ist also schwach, weil W und Z Bosonen so schwer sind. Die Kopplungskonstante g ist etwa

$$\boxed{g = 0,7} \quad (4.6)$$

4.3 Paritätsverletzung und V-A Theorie

Die Paritätstransformation P spiegelt die Koordinaten eines Vektors am Ursprung. Da zweimalige Spiegelung den Ursprungszustand wiederherstellt, kann der Eigenwert zu \hat{P} nur ± 1 sein.

Vektoren mit negativer Parität sind

$$\hat{P}\vec{x} = -\vec{x}, \quad \hat{P}\vec{p} = -\vec{p}, \quad \hat{P}\vec{j} = -\vec{j} \quad (4.7)$$

Vektoren mit positiver Parität (*Axialvektoren*) sind z.B.

$$\hat{P}\vec{L} = \hat{P}(\vec{r} \times \vec{p}) = +\vec{L} \quad (4.8)$$

sowie der Gesamtdrehimpuls \vec{J} und der Spin \vec{S} . Das Produkt eines Vektors mit einem Axialvektor, also z.B. $\vec{J} \cdot \vec{p}$, ist wieder ein Vektor.

Aufgabe 4.1: Zeigen Sie anhand der Maxwell-Gleichungen, dass wegen

$$\hat{P}\rho = +\rho \quad \hat{P}\vec{j} = -\vec{j} \quad (4.9)$$

die elektromagnetische Wechselwirkung die Parität erhält, wenn

$$\hat{P}\vec{E} = -\vec{E}, \quad \hat{P}\vec{B} = \vec{B} \quad (4.10)$$

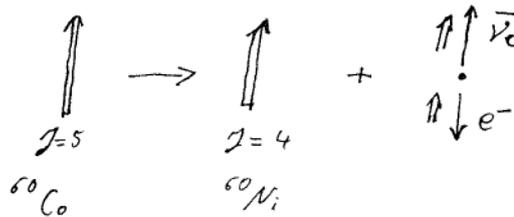
$$\hat{P}\varphi = +\varphi, \quad \hat{P}\vec{A} = -\vec{A} \quad (4.11)$$

Damit hat auch das Photon $A^\mu = (\varphi, \vec{A})$ negative Parität.

Am Beispiel des β -Zerfalls



wurde erstmals von C.S.Wu direkt nachgewiesen, dass die Parität in der schwachen Wechselwirkung nicht erhalten ist.



Die Spinrichtung des Co wird bei tiefen Temperaturen durch ein Magnetfeld festgelegt. Gemessen wird die Zählrate der Elektronen unter einem bestimmten Winkel relativ zur Spinrichtung, also als Funktion von $\vec{J}_{\text{Co}} \cdot \vec{p}_e$. Man beobachtet, dass die e^- vorzugsweise entgegen der Richtung des Co-Spins emittiert werden, d.h. bei Umpolung des Magnetfeldes ändert sich auch die Zählrate. Da der e^- -Impuls ein Vektor ist und Spin ein Axialvektor ist folgt, dass die relative Richtung der beiden (Observable) nicht invariant unter einer Paritätstransformation ist.

Tatsächlich ist die Parität in der schwachen Wechselwirkung maximal verletzt, d.h.

- Nur linkshändige Fermionen (e_L^-, ν_L, u_L, d_L) und rechtshändige Anti-Fermionen ($e_R^+, \bar{\nu}_R, \bar{u}_R, \bar{d}_R$) nehmen an der schwachen Wechselwirkung teil.
- e_R^-, ν_R, u_R, d_R und $e_L^+, \bar{\nu}_L, \bar{u}_L, \bar{d}_L$ nehmen nicht an der schwachen Wechselwirkung teil.

Dies nennt man eine *chirale* Theorie. Das gleiche Verhalten beobachtet man auch für die beiden anderen Fermion-Generationen. Man sieht diese Eigenschaft in allen Prozessen der schwachen Wechselwirkung. Ein besonders deutliches Beispiel ist in Abb.4.2 gezeigt. Hier wurde bei sehr hohen Energien, so dass Helizität und Chiralität

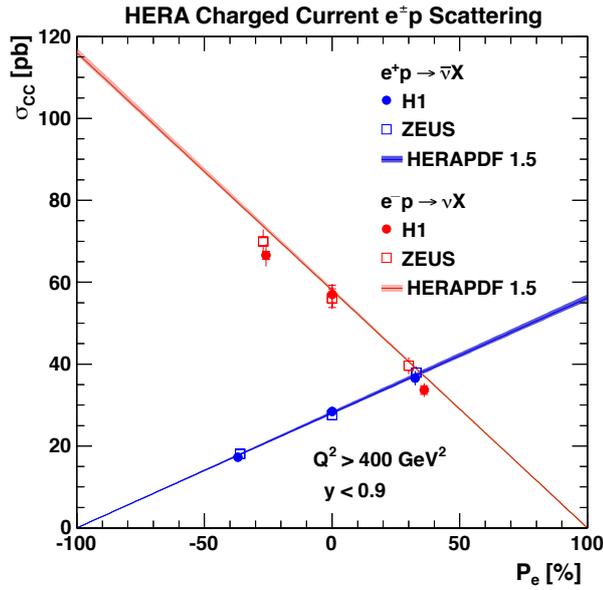


Abb. 4.2 Wirkungsquerschnitt für $e^-p \rightarrow \nu_e X$ und $e^+p \rightarrow \bar{\nu}_e X$ als Funktion der Polarisation der e^\pm . Der WQ ist linear abhängig von der Polarisation P_e des e^\pm Spins. Er wird Null für e^- mit Spin parallel zum Impuls ($P_e = 1$) und ebenso Null für e^+ mit Spin antiparallel zum Impuls ($P_e = -1$). Daten der Experimente H1 und ZEUS bei HERA.

gleich sind, gezeigt, dass die schwache Wechselwirkung für Elektronen Null wird, wenn ihre Spins parallel zur Bewegungsrichtung sind (e^-_R), die Ereignisrate aber linear mit der entgegengesetzten Spinpolarisation ansteigt. Genau der umgekehrte Fall ergibt sich für e^+ . Tatsächlich finden also nur die Prozesse statt:

$$e^-_L p \rightarrow \nu_L X \quad \text{und} \quad e^+_R p \rightarrow \bar{\nu}_R X \quad (4.12)$$

Für die theoretische Beschreibung der schwachen Wechselwirkung macht man es sich zunutze, dass die 4-komponentigen Spinoren sich in links und rechtshändige, orthogonale Zustände zerlegen lassen, und auch die Ströme j sich zerlegen lassen wie in Gl. D.44. Der Strom eines Fermions⁷ in der schwachen WW ist also nur

$$(u_L)^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu u_L$$

Vertauscht man hingegen Teilchen und Antiteilchen und gleichzeitig die Parität, so ergeben sich wieder erlaubte Prozesse.

⁷ Dies ist die sogenannte V – A Form der schwachen WW. Diese Abkürzung bedeutet Vektor-Axialvektor-Strom und ist motiviert durch die Form des P_L -Operators,

$$u_L^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu u_L = u^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) u = \underbrace{\frac{1}{2} u^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu u}_{\text{Vektor}} - \underbrace{\frac{1}{2} u^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^5 u}_{\text{Axialvektor}} \quad (4.13)$$

4.4 Standard-Model der elektroschwachen Wechselwirkung

Heute basiert die akzeptierte Theorie der schwachen Wechselwirkung auf der $SU(2)_L$ Symmetrie im Flavour-Raum. Beteiligt sind dabei nur die linkshändigen Fermionen ("L"). Die Eichbosonen sind die W^\pm und Z^0 Bosonen. Im Vergleich zu den anderen Wechselwirkungen haben diese Eichbosonen eine hohe Masse und sind instabil:

Boson	WW	Masse M (GeV)	Breite Γ (GeV)
γ	elektromag.	0	0
g	stark	0	0
W^\pm	schwach	$80,425 \pm 0,038$	$2,124 \pm 0,041$
Z^0	schwach	$91,1876 \pm 0,0021$	$2,4952 \pm 0,0023$

Hierbei ist Γ die Energieunschärfe aufgrund der endlichen Lebensdauer.

Gemäß Standard-Modell werden alle linkshändigen Fermionen in Doublets, alle rechtshändigen in Singletts eingeordnet.

Linkshändige Lepton-Doublets (Isospin $T_3 = \pm 1/2$)

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}_L \quad \begin{matrix} \text{)} W^- \\ \text{)} W^+ \end{matrix} \quad (4.14)$$

Linkshändige Quark-Doublets (Isospin $T_3 = \pm 1/2$)

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L \quad \begin{matrix} \text{)} W^- \\ \text{)} W^+ \end{matrix} \quad (4.15)$$

Übergänge innerhalb eines Doublets werden durch W -Austausch vermittelt. Dieser Übergang entspricht einer Rotation im $SU(2)$ Raum. Die schwache Wechselwirkung ist damit automatisch universell gleich für Leptonen und Quarks.

Rechtshändige Lepton-Singletts (Isospin $T_3 = 0$)

$$e_R, \quad \nu_{eR}, \quad \mu_R, \quad \nu_{\mu R}, \quad \tau_R, \quad \nu_{\tau R} \quad (4.16)$$

Rechtshändige Quark-Singletts (Isospin $T_3 = 0$)

$$(u_R), \quad d_R, \quad c_R, \quad s_R, \quad t_R, \quad b_R \quad (4.17)$$

Für die rechtshändigen Singletts sind keine Übergänge möglich, sie sind neutral bezüglich der schwachen Ladung und nehmen nicht an der schwachen WW teil.

W-Zerfall Die Universalität der schwachen WW zeigt sich am direktesten in der relativen Häufigkeit der Zerfälle des W -Bosons. Kinematisch sind Zerfälle möglich in alle Doublets außer (top-bottom). Aufgrund der Farbe der Quarks gilt

$$3 \cdot \Gamma_{W \rightarrow l\bar{\nu}_l} = \Gamma_{W \rightarrow qq'}$$

so dass

$$\Gamma_{e\nu_e} : \Gamma_{\mu\nu_\mu} : \Gamma_{\tau\nu_\tau} : \Gamma_{du} : \Gamma_{sc} = 1 : 1 : 1 : 3 : 3$$

gilt. Bei 9 gleichen Zerfallsmöglichkeiten ergibt sich ein Verzweigungsverhältnis von jeweils 11%, wie experimentell beobachtet.

Z-Prozesse Der Austausch von W -Bosonen ist stets mit einer Änderung der Lepton- oder Quark-Flavour sowie der Ladung verbunden. Damit lassen sich Reaktionen wie

$$\bar{\nu}_\mu + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + e^-$$

nicht erklären, da hier kein Übergang innerhalb einer Generation stattfindet. Die Entdeckung solcher neutraler Ströme wird durch das Z^0 Boson erklärt, das ebenfalls Spin 1 hat. Erwarten würde man aufgrund der $SU(2)_L$ Symmetrie insgesamt 3 Eichbosonen. Allerdings kann das Z^0 nicht einfach ein neutraler Partner des W -Bosons sein, denn es hat eine andere Masse und koppelt nicht universell gleich an alle Quarks und Leptonen. Beispielsweise beträgt das Verzweigungsverhältnis des Zerfalls $Z^0 \rightarrow e^+e^-$ nur ca. 3%. Ursache ist die Mischung zwischen Photon und Z^0 in der vereinheitlichten elektroschwachen Wechselwirkung $SU(2)_L \times U(1)_Y$ zusammen mit dem Higgs-Mechanismus. Die wichtigsten Aussagen des Standard-Modells zur Physik der W und Z Bosonen lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- W und Z Bosonen haben Spin 1.
- Das W Boson reagiert nur mit linkshändigen Teilchen und rechtshändigen Anti-Teilchen. Es wandelt dabei e, μ, τ Leptonen in Neutrinos um oder u, c, t Quarks in d, s, b Quarks, z.B.

$$e^- \rightarrow W^- \nu_e, \quad W^+ \rightarrow e^+ \nu_e, \quad W^+ \rightarrow u\bar{d}$$

Die Kopplungskonstante $g \sim 0.7$ für alle diese Reaktionen ist gleich groß.

- Das Z Boson koppelt sowohl an links- als auch an rechtshändige Teilchen, allerdings unterschiedlich stark. In Wechselwirkungen mit dem Z Boson bleibt die Flavour der beteiligten Leptonen und Quarks erhalten, z.B.

$$u \rightarrow uZ, \quad e^+e^- \rightarrow Z, \quad Z \rightarrow b\bar{b}$$

Es gibt jeweils eine Kopplungskonstante für alle geladenen Leptonen e, μ, τ , Neutrinos ν_e, ν_μ, ν_τ , u -artigen Quarks u, c, t , sowie d -artigen Quarks d, s, b .

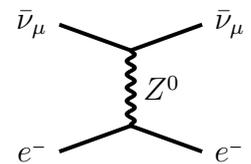


Abb. 4.3
Elastische Neutrino-Elektron Streuung.

4.5 $SU(2)$ Symmetrie der schwachen Wechselwirkung

- Jeweils 3 oder 4 W und Z Bosonen können auch miteinander wechselwirken, z.B.

$$Z \rightarrow W^+W^-, \quad W^+ \rightarrow W^+Z, \quad W^+W^- \rightarrow ZZ$$

Im Standard-Modell gilt für die Kopplungen des W

$$g_W = \frac{e}{\sin \theta_W}$$

und des Z :

$$g_Z = \frac{e}{\sin \theta_W \cos \theta_W} (T_3 - \sin^2 \theta_W Q)$$

Hierbei ist die elektromagnetische Kopplung

$$e \approx 0.3$$

und der Weinberg-Winkel $\theta_W \approx 28,6^\circ$, also

$$\sin^2 \theta_W \approx 0.231$$

Weiter gilt für das Verhältnis der Massen von W und Z :

$$\frac{m_W}{m_Z} = \cos \theta_W$$

Die Begründung für diese Kopplungen hängt mit der Mischung von γ und Z zusammen. Die $SU(2)_L$ hat die Kopplung g und gilt für W^\pm und W^0 . Die $U(1)_Y$ hat die Kopplung g' und gilt für das B^0 . B^0 und W^0 mischen zu γ, Z^0

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu^0 \\ W_\mu^0 \end{pmatrix}$$

4.5 $SU(2)$ Symmetrie der schwachen Wechselwirkung

Die folgenden Betrachtungen gelten nur für die linkshändigen Komponenten der Fermionen. Die schwache Wechselwirkung beschreibt Übergänge zum Beispiel zwischen dem Elektron und dem Elektron-Neutrino. Man fasst diese Teilchen als die beiden Zustände eines verallgemeinerten Zustands (Doublett) auf

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}$$

Analog der Formulierung beim Spin bezeichnet man die Neutrino-Komponente als die $+1/2$ Komponente des sogenannten Isospins und das Elektron als $-1/2$ Komponente. Auch hierfür kann man eine unitäre Transformationen im Isospin-Raum definieren,

$$\psi' = U\psi \quad \begin{pmatrix} \nu' \\ e' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}$$

Hier sei U ein Element der Symmetriegruppe $SU(2)_L$, das durch eine 2×2 Matrix mit $U^\dagger U = 1$ und $\det U = 1$ dargestellt werden kann. Diese Transformationen verändern - ortsabhängig und zeitabhängig - sowohl die Komponenten der Doublets als auch deren Phasen. Solche unitären Matrizen können immer in der Form

$$\psi' = U\psi = e^{ig\alpha_a(x)T_a}\psi$$

geschrieben werden.

- Die reelle und beliebige Konstante g wird später als Kopplungskonstante der W Bosonen interpretiert werden.
- Die $\alpha_a(x)$ sind willkürliche reelle Funktionen von Ort und Zeit und Summation über a ist implizit.
- Die 2×2 Matrizen T_a müssen dabei linear unabhängig, spurlos und hermitesch sein. Es gibt höchstens drei solche Matrizen. Die "Generatoren" T_a der $SU(2)_L$ können z.B. mit Hilfe der Pauli Matrizen dargestellt werden, da diese genau die oben genannten Forderungen erfüllen.

$$T_a = \frac{\sigma_a}{2} \quad a = 1, 2, 3.$$

Es liegen mit den drei Generatoren auch drei Transformationsmöglichkeiten vor. In der Eichtheorie kann wieder gezeigt werden, dass die Wechselwirkung (hier mit dem W und dem Z) durch 4-er Vektorfelder beschrieben werden muss, jeweils ein Feld $W_a(x,t)$ pro Transformation.

$$gT_a W_a \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}$$

Setzt man explizit die Pauli-Matrizen ein, so erhält man

$$\begin{aligned} gT_a W_a \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} &= \frac{g}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} W_1 + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} W_2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} W_3 \right) \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \\ &= \frac{g}{2} \begin{pmatrix} W_3 & W_1 - iW_2 \\ W_1 + iW_2 & -W_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für solche Flavour und Ladung ändernden WW macht es daher Sinn, Aufsteige- und Absteige-Operatoren T^\pm und entsprechende Vektorfelder W^+, W^- zu definieren:

$$W^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_1 \mp iW_2)$$

$$T^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_1 \pm iT_2)$$

so dass

$$T^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad T^- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ersetzt man $T_{1,2}$ durch T^\pm , so erhält man in dieser neuen Basis für die W -Felder

$$\begin{aligned} & + \frac{g}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & W^+ \\ W^- & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} gW_3 & 0 \\ 0 & -gW_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \\ & = (g(T^+W^+ + T^-W^-) + gT_3W_3) \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der erste Term beschreibt die Wechselwirkung des geladenen Stroms, der zweite die des neutralen Stroms. Bei letzterem fehlt noch der Beitrag durch das Photon.

4.6 Neutrino-Streuung

Pionen und Kaonen lassen sich in großer Anzahl in Proton-Kern Wechselwirkungen (fixed-Target) erzeugen. Fokussiert man diese, so entstehen auf langen Zerfallsstrecken durch Zerfälle Neutrinos, z.B.

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$$

$$K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$$

4.6.1 Geladener Strom

Der ‘‘Charged Current’’ Neutrino-Proton (oder Neutron) Wirkungsquerschnitt für

$$\nu_\mu + p \rightarrow \mu^- + X$$

lässt sich dann über die entsprechenden geladenen Leptonen (hier das μ) messen. Man findet bei den verfügbaren Strahlenergien einen fast linearen Verlauf des totalen WQ (siehe Abbildung),

$$\sigma_{tot} \simeq 0,6 \cdot 10^{-38} \text{cm}^2 \cdot \frac{E_\nu}{\text{GeV}}$$

Für ein fixed-target Experiment $\nu_\mu + p \rightarrow \mu + X$ ist das Quadrat der Schwerpunktsenergie $s = (p_\nu + p_p)^2 \approx 2E_\nu m_p$, so dass auch gilt:

$$\sigma_{tot} \sim s$$

Im Quark-Parton-Modell entspricht der Prozess der ν -Quark Streuung, z.B.

$$\nu_\mu d \rightarrow \mu^- u$$

mit der Schwerpunktsenergie $\hat{s} < s$. Dieser Prozess ist erlaubt für alle Winkel, da es keine Vorzugsrichtung durch die Spins gibt. Daher gilt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{G^2 \cdot s}{4\pi^2} \quad (4.18)$$

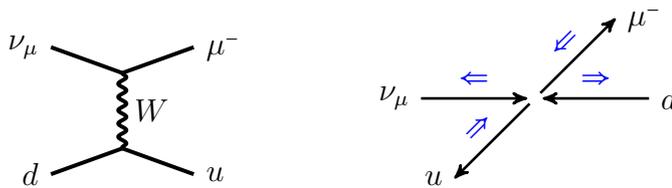


Abb. 4.4 Elastische Neutrino-Quark Streuung mit geladenem Strom. Links: Feynman-Diagramm. Rechts: Impulse und Spins im CMS-System.

Anders sieht es aus für den Prozess

$$\bar{\nu}_\mu u \rightarrow \mu^+ d$$

In diesem Prozess ist die Rückwärtsstreuung ($\theta = 180^\circ$) verboten wegen Helizitäts- und Drehimpulserhaltung.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{G^2 \cdot s}{16\pi^2} (1 - \cos\theta)^2 \quad (4.19)$$

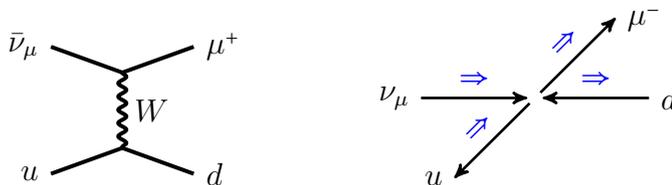


Abb. 4.5 Elastische Antineutrino-Quark Streuung mit geladenem Strom. Links: Feynman-Diagramm. Rechts: Impulse und Spins im CMS-System.

4.6.2 Neutrale Ströme: Z^0 Austausch

Die Neutralen Ströme wurden 1973 entdeckt,

$$\text{inelastisch: } \nu N \rightarrow \nu X$$

$$\text{elastisch: } \bar{\nu}_\mu e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu e^-$$

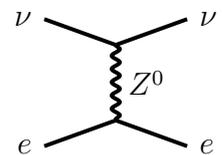


Abb. 4.6 Elastische Neutrino-Elektron-Streuung mit Z^0 Austausch.



Abb. 4.7 Links: Foto der Gargamelle-Blasen-kammer als Ausstellungsobjekt am CERN.

Rechts: Ein von links in die Gargamelle Blasen-kammer eintretendes Neutrino trifft auf ein Elektron, und dieses erzeugt einen kleinen elektromagnetischen Schauer.

Experimentell nicht beobachtet hingegen werden “Flavour changing neutral currents” (FCNC) wie z.B. $\nu_e e \rightarrow \nu_\mu \mu$ oder $K^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$.

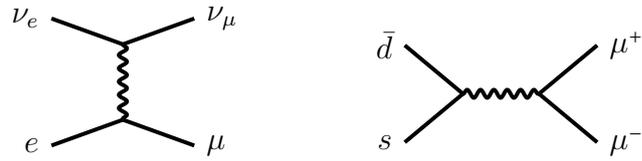


Abb. 4.8 Nicht beobachtete FCNC-Prozesse.

Solche FCNC sind im Standard-Modell tatsächlich verboten durch den sogenannten “GIM” Mechanismus, der gilt, wenn alle Generationen vollständig sind. Aus der nicht-Beobachtung von FCNCs wurde daher

- nach Entdeckung des s -Quarks auch das c -Quark vorhergesagt,
- nach Entdeckung des b -Quarks auch das t -Quark vorhergesagt,
- nach Entdeckung des τ -Leptons auch das ν_τ vorhergesagt.

In jedem dieser Fälle wurde das vorhergesagte Teilchen dann auch tatsächlich gefunden.

Gleichzeitig schränkt die nicht-Beobachtung von FCNCs auch viele Modelle zur Physik jenseits des Standard-Modells ein. Man kann also nicht einfach ein einzelnes weiteres Quark oder Lepton postulieren, ohne auch gleichzeitig den entsprechenden $SU(2)$ Partner mit anzunehmen. Später werden wir sehen, dass man sogar aus der Beobachtung eines einzelnen weiteren Leptons oder Quarks folgen kann, dass die ganze Generation mit allen Leptonen und allen Quarks vorhanden sein muss.

4.7 Entdeckung von W und Z

Entdeckt wurden die schwachen Eichbosonen 1983 am CERN $SP\bar{P}S$ Collider, der Proton-Antiproton-Kollision $p\bar{p}$ bei einer Schwerpunktsenergie von $\sqrt{s} = 540$ GeV ermöglichte. (Nobelpreis: Rubia (UA1 Experiment) und Vandermer (Beschleuniger). Das W war vorher nur aus den Zerfällen von z.B. μ sowie s, c Quarks vorhergesagt worden, es war aber nicht bekannt, ob es sich dabei nur um eine effektive Beschreibung der Zerfälle oder tatsächlich um ein Teilchen handelte. Das Z Boson wurde aus der elastischen Neutrino-Streuung $\nu_\mu p \rightarrow \nu_\mu p$ gefolgert. Der Zusammenhang zwischen der Masse des W und des Z war nur theoretisch im heute so genannten Standard-Modell postuliert worden. Für das SPSS wurden durch Umkehrung des Neutron-Zerfalls

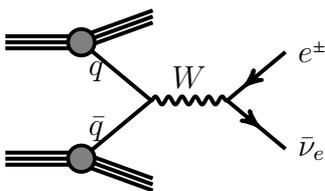


Abb. 4.9 W -Produktion in $p\bar{p}$ Streuung

$$d \rightarrow ue^- \bar{\nu}_e$$

die Reaktionen

$$\bar{u}d \rightarrow W^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e$$

und

$$u\bar{d} \rightarrow W^+ \rightarrow e^+\nu_e$$

vorhergesagt. Analog aus "Crossing" der Neutrino-Streuung (mit der Ersetzung $\nu \rightarrow e$):

$$u\bar{u} \rightarrow Z^0 \rightarrow e^+e^-$$

$$d\bar{d} \rightarrow Z^0 \rightarrow e^+e^-$$

Außerdem wurde erwartet, dass W und Z nicht nur in Elektronen sondern auch in Myonen zerfallen können sollten.

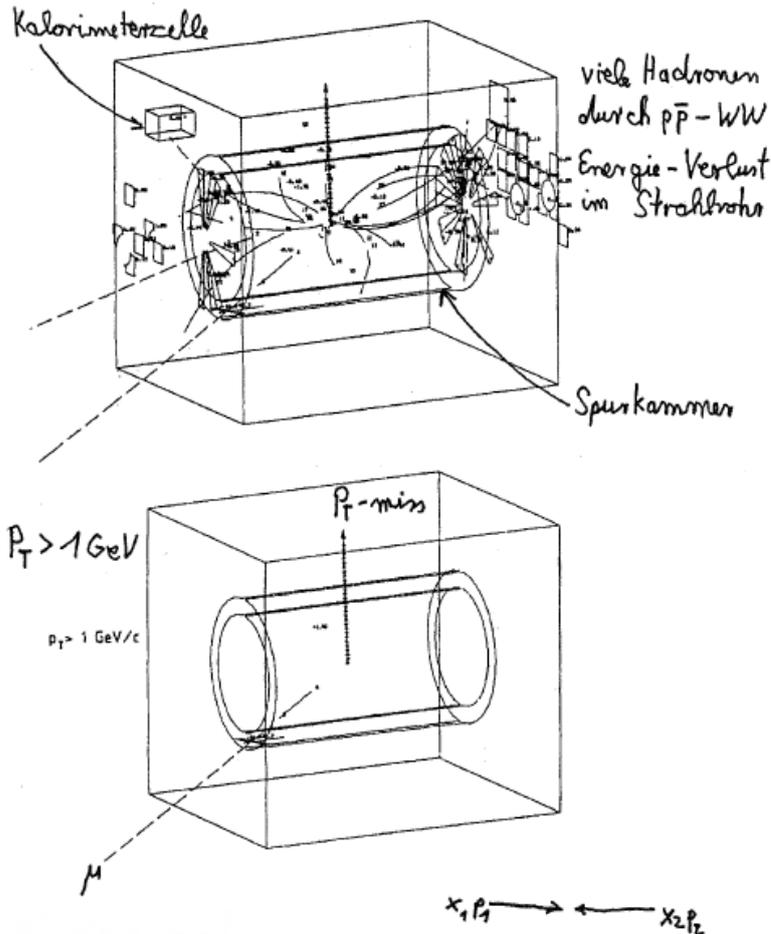


Abb. 4.10 Oben: Bild eines Ereignisses im UA1 Experiment am CERN. Gezeigt sind geladene Teilchen als Kreisbahnen im Magnetfeld in der Spurkammer sowie Energien in den Kalorimeter-Zellen. Unten: Das gleiche Ereignis. Gezeigt sind aber nur Spuren mit einem Impuls transversal zum Strahlrohr von $p_T > 1$ GeV. Nur eine Spur bleibt, die als Myon identifiziert wurde. Angedeutet ist auch die Richtung des fehlenden Transversalimpulses $p_{T,miss}$, der aus Impulserhaltungsgründen folgt.

Die Kinematik der Ereignisse kann wie folgt verstanden werden: Seien x_1, x_2 die Quark-Impuls-Bruchteile im Proton und Anti-Proton, dann ergibt sich die W -Masse aus

$$m_W^2 = (x_1 p_1 + x_2 p_2)^2 \approx x_1 x_2 s$$

Da $x_1 \neq x_2$ möglich ist, folgt, dass das W einen Impuls entlang der Strahlachse haben kann. Da das Neutrino nicht gemessen werden

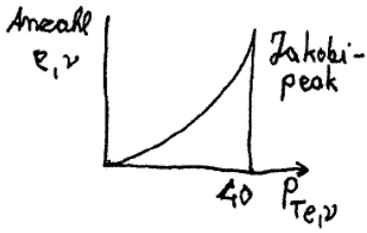


Abb. 4.11
Jakobi-Peak des transversalen Impulses der Leptonen aus dem W -Zerfall.

kann, muss m_W mit Hilfe der transversalen Impuls-Bilanz bestimmt werden. Hierfür gilt im Idealfall

$$\vec{p}_{Te} = -\vec{p}_{T\nu}$$

Für kleine e,ν Massen gilt $p_{T,max} = m_W/2$, der so genannte Jakobi-Peak. Dieser Wert ist invariant unter Lorentz-Transformationen entlang der Strahlrichtung, also auch unabhängig von den Unbekannten x_1 und x_2 . Weitere Hadronen, die in den Ereignissen entstehen, tragen nur sehr wenig p_T , so dass $p_{Te} \approx p_{T\nu}$ auch tatsächlich beobachtet wird.

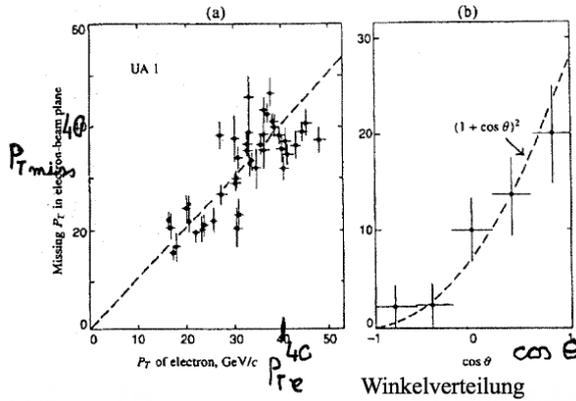


Abb. 4.12 Im UA1 beobachtete Korrelation zwischen $p_{t,e}$ und $p_{t,\nu}$ sowie Winkelverteilung der Leptonen.

4.8 Z^0 -Physik an e^+e^- Beschleunigern

Am bisher höchst-energetischen e^+e^- Beschleuniger LEP (“Large Electron-Positron Accelerator”) wurden von 1989 - 2000 bei Schwerpunktsenergien von zunächst 90 GeV (Masse des Z) und später bis zu 208 GeV Daten genommen.

LEP-I (1989-1993), $\sqrt{s} \approx 90$ GeV: Bei diesen Energien wurden ca. 18.000.000 Z produziert ;

LEP-II (1996-2000), $160 < \sqrt{s} \leq 209$ GeV: Bei diesen Energien konnte Paarproduktion von W^\pm -Bosonen beobachtet werden, mit ca. 80000 W 's.

Auf diese Weise können alle schwach Wechselwirkenden Fermionen paarweise erzeugt werden, wenn Ihre Masse kleiner als $\sqrt{s}/2$ ist. Der Wirkungsquerschnitt ergibt sich aus der Interferenz von Photon- und Z -Beiträgen, d.h. der $|\text{Summe der Matrixelemente}|^2$

$$e^+e^- \rightarrow \gamma/Z^0 \rightarrow \mu^+\mu^- \quad \text{bei } \sqrt{s} \sim m_Z$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 Interferenzen

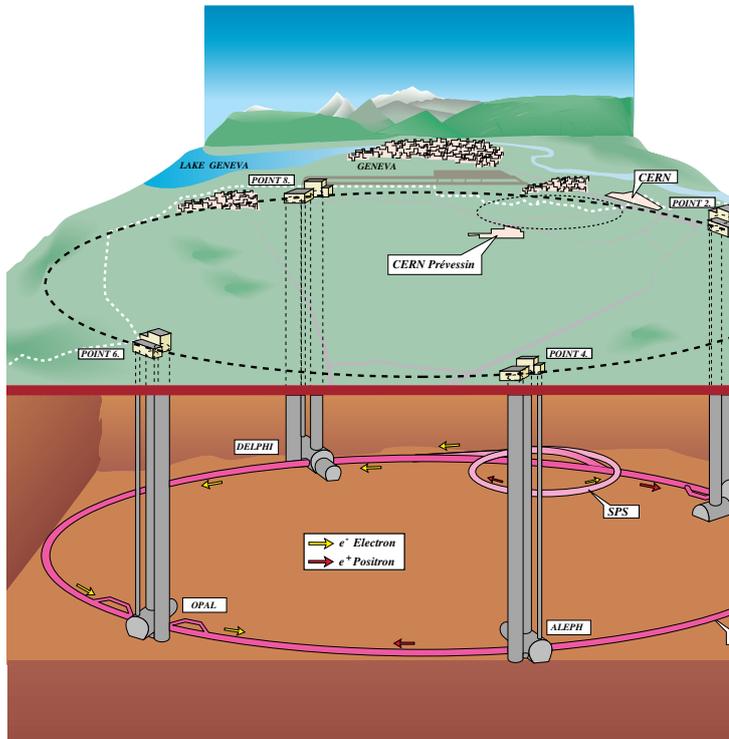


Abb. 4.13 Der LEP Beschleuniger am CERN.

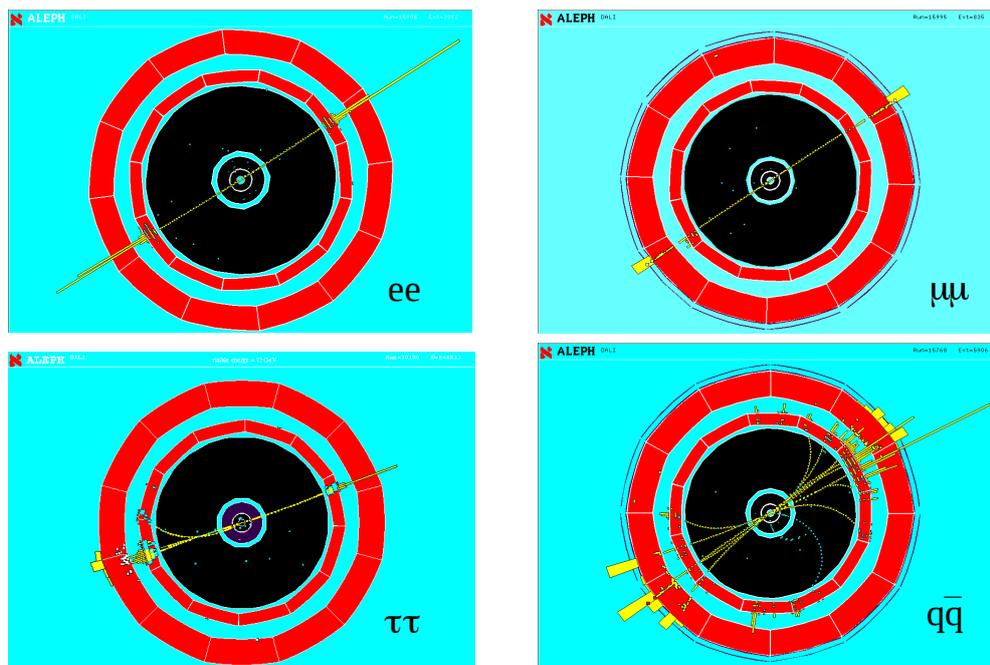


Abb. 4.14 Ereignisse des ALEPH Experiments bei LEP mit Paaren von Elektronen, Myonen, τ 's und Quarks.

$e^+e^- \rightarrow Z^0 \rightarrow e^+e^-$	}	Leptonenpaare (einfach)
$\mu^+\mu^-$		
$\tau^+\tau^-$		
$\nu_e\bar{\nu}_e$	}	unsichtbar
$\nu_\mu\bar{\nu}_\mu$		
$\nu_\tau\bar{\nu}_\tau$		
$u\bar{u}$	}	2 jets
$d\bar{d}$		
$s\bar{s}$		
$c\bar{c}$	}	2 jets + suche nach c, b Zerfällen
$b\bar{b}$		

Abb. 4.15 Fermion-Antifermion Endzustände in Zerfällen von Z -Bosonen.

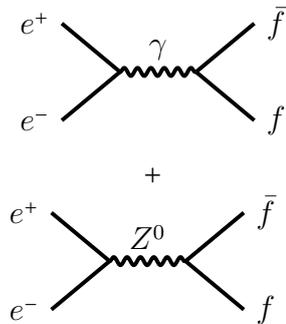


Abb. 4.16

Interferenz von γ und Z^0 Austausch bei der Fermion-Paar-Produktion in e^+e^- Kollisionen.

Aufgrund der Form des Z -Propagators ist zu erwarten, dass bei kleinen \sqrt{s} der Photon-Beitrag dominiert, d.h. $\sigma \sim 1/s$. Nahe der Z -Masse überwiegt der Z -Beitrag, während der reine Photon-Beitrag nur noch $\sim 1\%$ ausmacht. Bei sehr großen \sqrt{s} wird die Z Masse im Propagator unwichtig und der Wirkungsquerschnitt fällt wiederum $\sim 1/s$.

Für den Wirkungsquerschnitt des Prozesses $e^+e^- \rightarrow Z \rightarrow \mu^+\mu^-$ folgt

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow Z^0 \rightarrow \mu^+\mu^-} = \frac{12\pi s}{m_Z^2} \frac{\Gamma_{ee}\Gamma_{\mu\mu}}{(s - m_Z^2)^2 + m_Z^2\Gamma_Z^2} \quad (4.20)$$

Hierbei ist Γ_Z die totale Breite des Z (d.h. $1/\text{Lebensdauer}$), die sich aus den Partialbreiten ergibt:

$$\Gamma_Z = 3 \cdot \Gamma_{Z \rightarrow \nu\nu} + 3\Gamma_{ee} + \underbrace{3}_{\text{Farbe}} \cdot (3\Gamma_{dd} + \underbrace{2\Gamma_{uu}}_{\text{top zu schwer}})$$

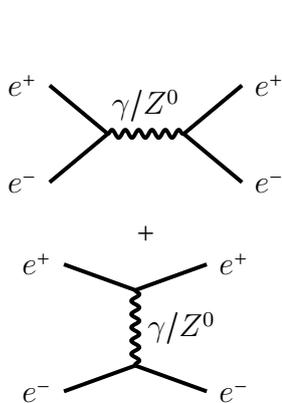


Abb. 4.18

Feynman-Diagramme zur Bhabha-Streuung.

$$\begin{aligned} \Gamma_{\nu\nu} &= G_F m_Z^3 = 167 \text{ MeV} \\ \Gamma_{ee} &= \Gamma_{Z^0 \rightarrow e_L^- e_R^+} + \Gamma_{Z^0 \rightarrow e_R^- e_L^+} = 4 \sin^2 \theta_W \Gamma_{\nu\nu} = 84 \text{ MeV} \\ \Gamma_{dd} &= 370 \text{ MeV} \\ \Gamma_{uu} &= 287 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Es gilt $\sigma_{\mu\mu} = \sigma_{\tau\tau}$. Für $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ verhält sich der WQ aber anders als z.B. für $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$, da weitere Diagramme möglich sind (Bhabha-Streuung).

Genau an der Polstelle bei $s = m_Z^2$ folgt aus

$$\sigma \sim \frac{1}{(s - m_Z^2)^2 + m_Z^2\Gamma_Z^2}$$

die Relation:

im Peak:
$$\sigma_{max} = \frac{12\pi}{m_Z^2} \frac{\Gamma_{ee}\Gamma_{ff}}{\Gamma_Z^2}$$

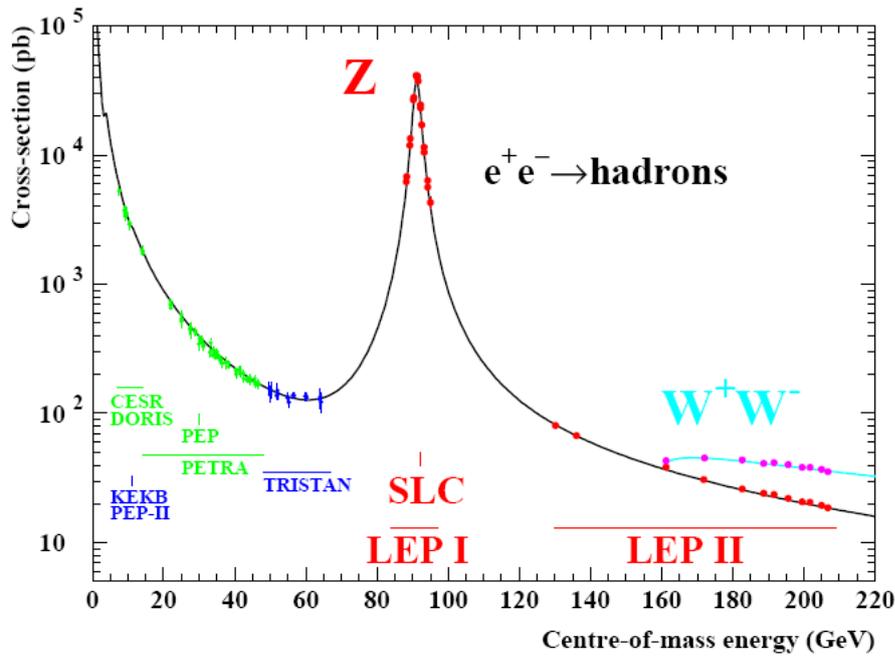
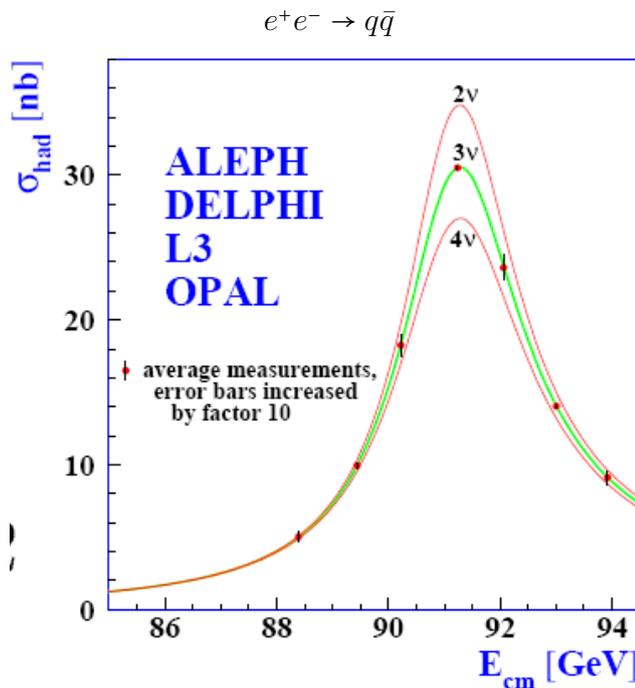


Abb. 4.17 Wirkungsquerschnitt für $e^+e^- \rightarrow$ Hadronen, von LEP und älteren Beschleuniger-Experimenten.

Γ_Z^2 enthält alle Fermionen, auch “unsichtbare” Neutrinos. Daher kann man auch die Anzahl der unsichtbaren Zerfallsprodukte, der Neutrinos, messen.



Die Daten zeigen:

- Es gibt nur 3 ν -Sorten mit $M_\nu < m_Z/2$ mit Kopplungen, die den Standard-Modell $Z\nu\nu$ -Kopplungen entsprechen.
- Oft wird das so interpretiert, dass es nur 3 Generationen von Fermionen gibt. Es kann aber durchaus weitere Neutrino-Sorten geben, die schwerer als ca. $m_Z/2 \approx 45$ GeV sind. In

diesem Fall sind auch weitere Generationen von geladenen Leptonen und Quarks möglich. (siehe auch: Chirale Anomalie).

- Auch jenseits des Standard-Modells kann es nur dann weitere Teilchen X mit Massen $M_X < 45$ GeV geben, wenn die Kopplungen dieser Teilchen an das Z sehr viel kleiner sind als die der schwachen WW der bekannten Fermionen.

4.9 WW Produktion in e^+e^- Kollisionen

Durch Einbau supraleitender Beschleuniger-Elemente wurde die Schwerpunktsenergie des LEP Beschleunigers auf 160 bis 209 GeV gesteigert (LEP-II Phase). Dadurch konnten W - Bosonen paarweise erzeugt werden.

$$e^+e^- \rightarrow W^+W^-$$



Abb. 4.19 Feynman-Diagramme für $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$ Produktion über γ/Z und Neutrino-Austausch.

Messung der 3-Boson- Kopplung Das erste der gezeigten Feynman-Diagramme beinhaltet die γWW und die ZWW - Kopplung (triple gauge coupling). Diese werden im Standard-Modell exakt vorhergesagt, d.h.

- Das W ist einfach geladen und hat damit die gleiche Kopplung an das γ wie ein Elektron.
- Die WWZ Kopplung ist (bis auf Faktoren wie $\sqrt{2}$) die gleiche Konstante (g) wie die des W an Fermionen, z.B. $W e \nu$ oder $W u \bar{d}$.

Wie man sieht, beschreibt die Summe aus γ , Z und Neutrino-Austausch die gemessene Rate sehr genau. Dies ist eine sehr wichtige Bestätigung der $SU(2)_L$ Symmetrie und des Konzepts der nicht-Abelschen Eichtheorie.

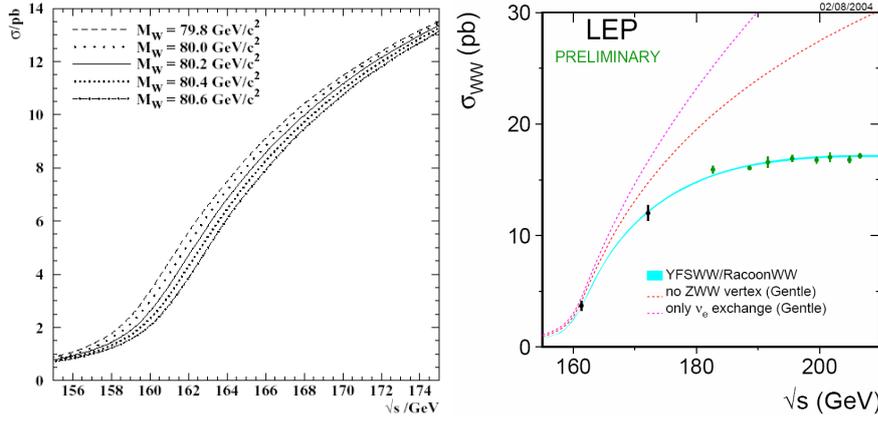


Abb. 4.20 Links: Theoretischer WW - Wirkungsquerschnitt für verschiedene m_W nahe der kinematischen Schwelle, $\sqrt{s} \approx 2m_W$. Rechts: Gemessener WQ im Vergleich zur theoretischen Vorhersage für den Wert von m_W , der am Besten zu den Daten passt. Auch gezeigt sind die theoretischen Wirkungsquerschnitte falls es nur jeweils eines der beiden Feynman-Diagramme geben sollte.

4.10 W und Z Produktion in $p\bar{p}$ Kollisionen

In $p\bar{p}$ Kollisionen werden bei hohem \sqrt{s} die W und Z Bosonen mit sehr hohen Wirkungsquerschnitten produziert. Da aber immer nur ein Teil der Proton-Energie in die WW eingeht, muss die W und Z Masse aus den Zerfallsprodukten rekonstruiert werden. Da die Masse und Wechselwirkungen des Z sich nicht sehr von denen des W unterscheiden, wird die bekannte Z Masse und die gute Massenrekonstruktion bei $Z \rightarrow e^+e^-$ und $Z \rightarrow \mu^+\mu^-$ benutzt, um den Detektor zu kalibrieren und so die Messung von m_W zu optimieren.

Die m_W -Bestimmung erfolgt z.B. über die Verteilung des Transversalimpulses der Leptonen im Zerfall $W \rightarrow \mu\nu$, $W \rightarrow e\nu$. Genauer (weil unabhängiger von einem möglichen Transversalimpuls des W) ist aber die Messung über die sogenannte “transversale Masse”,

$$m_T(e\nu)^2 = (P_{T,e} + P_{T,\nu})^2 - (\vec{P}_{T,e} + \vec{P}_{T,\nu})^2$$

Diese Definition ist ähnlich wie die der invarianten Masse (für masselose e, ν gilt z.B. $E_e = P_e$)

$$M(e\nu)^2 = (P_e + P_\nu)^2 - (\vec{P}_e + \vec{P}_\nu)^2$$

Der Wert von m_T liegt immer im Bereich

$$0 \leq m_T(e\nu) \leq M(e\nu)$$

und kann direkt aus dem Elektron und dem fehlenden Transversalimpuls im Ereignis berechnet werden. Im Gegensatz zu $M(e\nu)$ benötigt man also nicht die (nicht messbare) longitudinale Impulskomponente des Neutrinos. Die Verteilung zeigt ein klares Maximum und einen steilen Abfall bei größeren Werten von m_T . Die abfallende Flanke hängt dabei ab

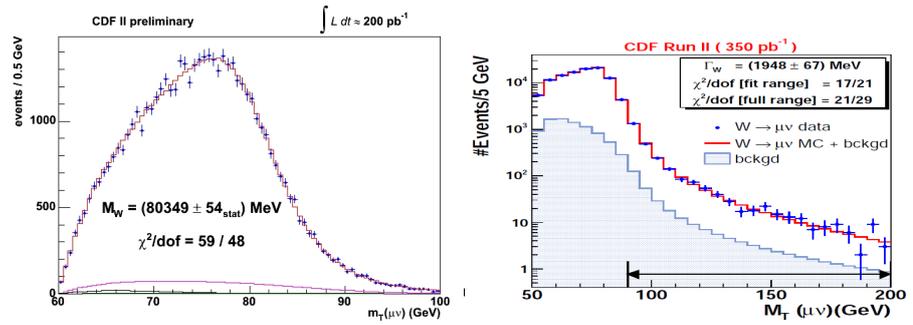


Abb. 4.21 Links: Transversale Masse M_T des W für $W \rightarrow \mu\nu$ vom CDF Experiment nahe von $m_W/2$. Rechts: Anpassung der Breite des W bei hohen M_T .

- von der experimentellen Auflösung;
- vom Transversal-Impuls des W . Hierfür muss also die $P_{T,W}$ -Verteilung theoretisch berechnet werden;
- von der Zerfallsbreite Γ_W des W .

Berücksichtigt man dies, so kann man diese Breite durch Anpassung der Vorhersage an die Daten bestimmen.

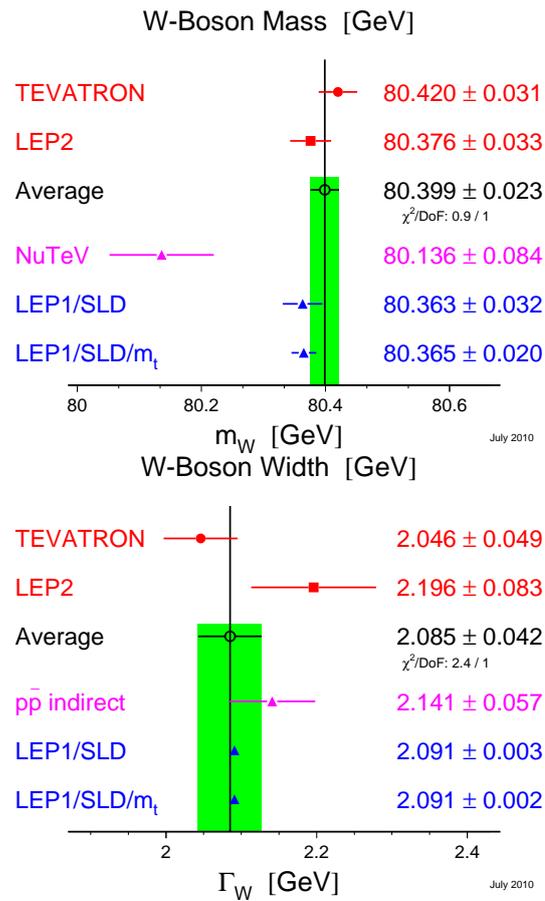


Abb. 4.22 Messungen der W -Masse und W -Breite.

5 Elektroschwache Symmetriebrechung: Higgs

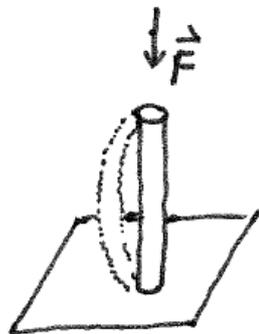
Die bis hier genannten Konzepte beschreiben alle experimentellen Befunde zur elektroschwachen Wechselwirkung mit folgenden Ausnahmen:

- Die Massen von W, Z sind nicht null. Ihre Klein-Gordon Gleichungen sind aber nicht invariant unter Eichtransformationen, wenn $m_{W,Z} \neq 0$.
- In Theorien, in denen links- und rechtshändige Fermionen unterschiedlich wechselwirken, können diese Teilchen keine Masse haben. Tatsächlich haben aber alle Fermionen (Elektron, Quarks, ...) eine Masse.

Diese Unzulänglichkeiten der Theorie lassen sich mit neuen Symmetrien nicht beheben.

Im Standard-Modell wird daher angenommen, dass nur der Grundzustand (das Vakuum) die Symmetrie bricht. Dieser Mechanismus wird spontane Symmetriebrechung genannt. Bei lokalen Eichtheorien entspricht dies dem Higgs-Mechanismus.

Als anschauliches Beispiel für eine spontane Symmetriebrechung dient ein senkrecht stehender Stab. Dieser Zustand ist invariant unter Rotationen um die Stabachse. Setzt man nun den Stab mit einer Kraft von oben unter Spannung (Potential), so wird er sich spontan in eine beliebige Richtung biegen. Für diesen neuen Grundzustand ist die Symmetrie gebrochen und die Auslenkung des Stabs hat einen Wert, der von Null verschieden ist.



Ein weiteres Beispiel ist ein Ferromagnet, der zunächst ungeordnete Ausrichtungen der Spins enthält. Dieser Zustand hat keine ausgezeichnete Richtung, ist also rotationsinvariant. Spontan können sich jedoch Weis'sche Bezirke ausbilden und damit der Ferromagnet insgesamt seinen Grundzustand ändern, so dass eine von Null verschiedene Magnetisierung entsteht.

5.1 Der Higgs-Mechanismus im Standard-Modell

Im Standard-Modell wird zur Beschreibung der Masse aller Fermionen und der Masse der $SU(2)_L$ Eichbosonen ein neues, komplexes Spin-0 Feld postuliert. Dieses soll ein $SU(2)_L$ Doublett sein,

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$$

Tatsächlich wurde ϕ hier so gewählt, dass eine Komponente keine Ladung hat, so dass später das Vakuum auch elektrisch neutral sein kann. Dieses Higgs Doublett ist das einzige elementare Spin-0 Feld im Standard-Modell. Da ϕ^0 und ϕ^+ komplex sein sollen, hat dieses Doublett 4 Freiheitsgrade,

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix}$$

Für Ausdrücke, die symmetrisch in allen vier Komponenten sein sollen, ist eine einfache Notation z.B.

$$|\phi|^2 = \phi^\dagger \phi = (\phi^+, \phi^0)^* \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = |\phi^+|^2 + |\phi^0|^2 = \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2$$

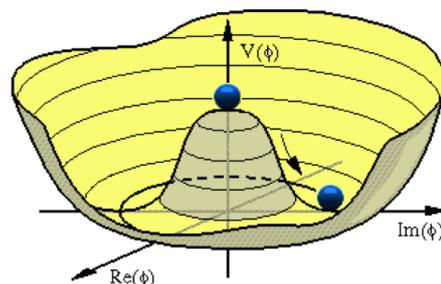
(Hier sind $+$ und \dagger zu unterscheiden.) Ein Potential $V(\phi)$ wird ebenfalls neu postuliert und nicht wie die anderen Wechselwirkungen aus einer Eichsymmetrie abgeleitet. Es soll ebenfalls invariant unter Eichtransformationen sein, d.h. invariant unter Änderungen der komplexen Phase und invariant unter Rotationen zwischen ϕ^+ und ϕ^0 . Das Potential muss daher symmetrisch in allen vier Komponenten sein und kann daher nur von $|\phi|^2$ abhängen. Als Ansatz für das Potential wird gewählt:

$$V(\phi) = \mu^2 |\phi|^2 + \lambda |\phi|^4$$

Es gilt:

- μ^2 und λ sind neue, reelle Naturkonstanten. μ hat die Dimension einer Masse. Der $|\phi|^4$ Term beinhaltet eine Selbstwechselwirkung des Higgs-Feldes. Dabei muss $\lambda > 0$ sein, damit das Potential im Limes großer Felder $|\phi|$ positiv ist, das Vakuum also nicht instabil ist.

Frei ist noch das Vorzeichen von μ^2 . Für $\mu^2 > 0$ bleibt der Grundzustand bei $|\phi| = 0$, die Symmetrie ist nicht spontan gebrochen. Anders ist es bei $\mu^2 < 0$. Die Graphik zeigt das entsprechende Potential als Funktion von zwei der vier Komponenten von ϕ .



Das Minimum des Potentials entspricht dem Vakuum. Das Potential ist nicht minimal bei $|\phi| = 0$, sondern entwickelt ein Minimum bei $|\phi|_{min} = v/\sqrt{2}$ mit dem Vakuumserwartungswert

$$v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}$$

Tatsächlich gibt es ein Kontinuum von entarteten Grundzuständen.

Spontane Symmetriebrechung wird durch die Wahl (Eichung) eines bestimmten Zustands als Vakuum eingeführt. Da experimentell das Vakuum natürlich elektrisch neutral ist, wählen wir als Grundzustand:

$$\phi_{Vak} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

d.h. nur die reelle Komponente ϕ_3 des neutralen Feldes bleibt.

Zur Quantisierung entwickelt man das Potential um das Minimum v ,

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}$$

Hier stellt $H(x)$ das Feld des physikalischen Higgs-Teilchens dar. Setzt man dies in das Potential ein, so ergibt sich

$$V(H) = -\mu^2 H^2 + \lambda v H^3 + \frac{1}{4} \lambda H^4$$

Dies kann wie folgt interpretiert werden:

- Der Term mit H^2 beschreibt die Masse des Higgs (vergleiche mit der Eigenfrequenz eines harmonischen Oszillators):

$$m_H = \sqrt{-2\mu^2}$$

- Die Terme mit H^3 und H^4 beschreiben die Selbstwechselwirkung des Higgs, also einen 3-er und einen 4-er Vertex.

Eichboson - Higgs Wechselwirkung Die WW zwischen Higgs-Feld und Eichbosonen ist gegeben durch:

$$= |(g(T^+W^+ + T^-W^-)^\mu + eQA^\mu + g_Z Z^\mu) \phi|^2 - V(\phi)$$

Da das Higgs elektrisch neutral ist, $Q\phi = 0$, entfallen alle Terme mit dem Photon Feld A^μ , d.h. das Photon koppelt nicht an das Higgs und das Photon wird masselos bleiben. Da außerdem bei obiger Entwicklung $\phi^+ = 0$ ist gibt es auch keine Mischterme zwischen W^\pm und Z^0 .

$$\frac{1}{4} g^2 W^+ W^- (v + H)^2 + \frac{1}{2} g_Z^2 Z^2 (v + H)^2 - V(\phi)$$

Die einzelnen Terme können wie folgt interpretiert werden:

- $\frac{1}{4}g^2v^2W^+W^- + \frac{1}{2}g_Z^2v^2Z_\mu Z^\mu$

Da g und v konstant sind können die entsprechenden Terme mit v^2 als Massenterme interpretiert werden. Der Zahlenwert der Massen wird demnach nur von der schwachen Kopplungskonstanten und dem Higgs-Potential festgelegt und ist

$$m_W = \frac{1}{2}gv$$

$$m_Z = \frac{1}{2}v\sqrt{g^2 + g'^2}$$

- $\frac{1}{2}g^2vW^+W^-H + \frac{1}{4}g_Z^2vZZH$

Dies sind WW zwischen Higgs und W, Z . Mit den obigen Massentermen folgt, dass die Kopplungen an das Higgs proportional zu den W, Z Massen sind.

- $\frac{1}{4}g^2W^+W^-HH + \frac{1}{2}g_Z^2vZZHH$

Dies sind 4-er Vertizes zwischen den Bosonen mit jeweils zwei Higgs-Teilchen.

- Das Higgs Potential ergibt die Higgs-Masse und Selbstwechselwirkungen

$$m_H = \sqrt{-2\mu^2}$$

Die Masse des Higgs ist also nicht vorhergesagt.

Ausserdem ergibt sich

$$M_Z = \frac{1}{2}g_Zv = \frac{M_W}{\cos\theta_W} \quad v = 246\text{GeV}$$

$$\cos\theta_W = \frac{M_W}{M_Z} = \frac{80,4}{91,2} \quad \tan\theta_W = \frac{g'}{g}$$

5.2 Fermion-Higgs Kopplung und Fermion-Massen

Mit dem Higgs steht ein Doublett zur Verfügung, das mit den Fermion-Doubletts und Singletts so verbunden werden kann, dass das Resultat eichinvariant ist. Für das Beispiel der Quarks der ersten Generation und dem Higgs-Doublett ϕ lässt sich z.B. für das d -Quark schreiben:

$$-c_d \bar{Q}_L \phi = \frac{c_d}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix} = \frac{c_d v}{\sqrt{2}} d_L + \frac{c_d}{\sqrt{2}} d_L H$$

Der erste Term beschreibt die Masse des d -Quarks mit der Masse des d -Quarks

$$m_d = c_d \frac{v}{\sqrt{2}}$$

- Die Masse der Fermionen wird somit als Kopplungskonstante zwischen Fermionen und Higgs erklärt. Diese Kopplung selber ist aber nicht vorhergesagt, so dass auch die Massen unbekannt sind.

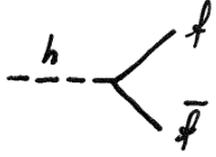
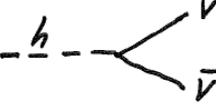
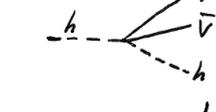
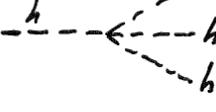
- Alle Massen im Standard-Modell skalieren mit dem Vakuumerwartungswert des Higgs. Dies ist der einzige Parameter im SM mit der Dimension [GeV].
- Das Higgs koppelt vornehmlich an die schwersten Teilchen
- Der letzte Term entspricht den Prozessen

$$d_R + H \rightarrow d_L \quad d_L \rightarrow d_R + H$$

Für ähnliche Prozesse mit dem u -Quark wird ein Higgs-Doublett mit $Y = -1$ benötigt. Dies lässt sich als ladungskonjugierter Zustand erzeugen. Für die anderen Quark-Generationen und die Lepton-Generationen ergeben sich ganz ähnliche Ausdrücke.

5.3 Eigenschaften des Higgs-Teilchens

Higgs Kopplungen

an Fermionen		$g_{hf\bar{f}} = \frac{m_f}{v}$
an Eichbosonen $V = W, Z$		$g_{hVV} = \frac{2m_V^2}{v}$
an Eichbosonen		$g_{hhVV} = \frac{2m_V^2}{v^2}$
3-Higgs Kopplung		$g_{hhh} = \frac{3m_h^2}{v}$
4-Higgs Kopplung		$g_{hhhh} = \frac{3m_h^2}{v^2}$

5.4 Higgs Zerfälle

Das Higgs koppelt an alle Teilchen mit Masse, also an alle Fermionen und die W - und Z -Bosonen. Da die Massen der Teilchen sehr große Unterschiede aufweisen ergibt sich auch, dass die Kopplungskonstanten sehr unterschiedlich sind. Für die möglichen Zerfälle des Higgs-Teilchens bedeutet dies, dass jeweils der Zerfall in das schwerste Teilchen überwiegt, in das das Higgs überhaupt zerfallen kann, ($M_H > 2m_i$). Es überwiegt daher für kleine Higgs-Massen $10 < m_H < 130$ GeV der Zerfall

$$H \rightarrow b\bar{b}$$

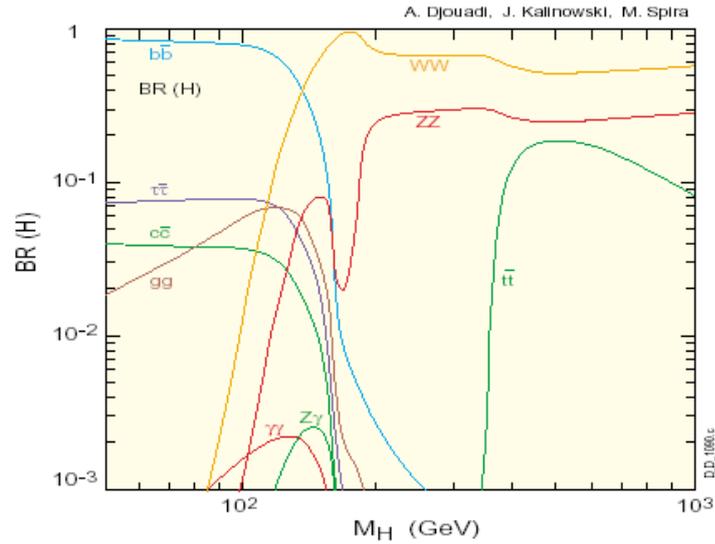


Abb. 5.1 Verzweigungsverhältnisse BR_H des Higgs-Bosons im Standard-Modell als Funktion der Higgs-Masse.

für große m_H dagegen die Zerfälle

$$H \rightarrow WW, ZZ, t\bar{t}$$

Für diese 2-Körperzerfälle in reelle Teilchen ergeben sich die Partialbreiten aus den Kopplungen² und den Phasenräumen.

Die totale Breite spiegelt bei kleinen Massen des Higgs die Proportionalität zu m_b^2 und M_H wieder. Bei $M_H = 125$ GeV ist die Breite etwa 4 MeV. Rekonstruiert man die Masse des Higgs aus seinen Zerfallsprodukten, ist daher in diesem Bereich die natürliche Breite vernachlässigbar klein gegenüber der experimentellen Auflösung.

Ab ca. 160 GeV ergibt sich ein starker Anstieg durch Zerfälle in W und Z , die bei sehr großen Higgs-Massen zusammen mit Zerfällen in $t\bar{t}$ -Quarks dominieren. Unterhalb der kinematischen Schwelle (z.B. 160 GeV für $H \rightarrow W^+W^-$) muss zumindest eines der Zerfallsprodukte virtuell sein. Trotzdem können diese Zerfälle wichtig sein, wenn die Unterdrückung durch den Propagator des virtuellen Teilchen durch die viel größere Kopplung (hier z.B. HWW -Kopplung) mehr als ausgeglichen wird. Dies ist insbesondere wichtig für Teilchen mit großer Breite, also für die Zerfälle

$$H \rightarrow WW^*, ZZ^*, t\bar{t}^*$$

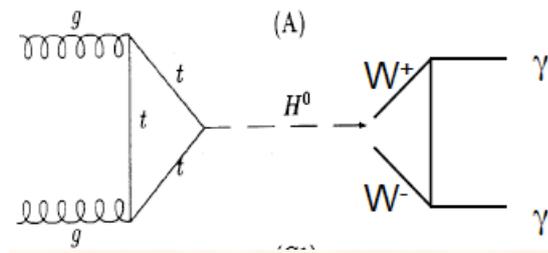
Da Photonen und Gluonen masselos sind, koppeln sie nicht direkt an das Higgs-Boson. Trotzdem sind die Zerfälle

$$H \rightarrow \gamma\gamma \quad \text{und} \quad H \rightarrow gg$$

über Schleifen von Fermionen und Bosonen möglich. In den Schleifen dominieren dann wegen ihrer großen Kopplung an das Higgs die schwersten Teilchen, t, b, W, Z . Durch die Schleifen sind die Formeln deutlich komplizierter. Die wesentlichen Abhängigkeiten sind

$$\Gamma(H \rightarrow \gamma\gamma) \sim \alpha^2 G_F M_H^3$$

Solche Beiträge können dann auch in der Produktion wichtig sein.



5.5 Entdeckung des Higgs-Bosons

Innerhalb des Standard-Modells wird der Higgs-Mechanismus eingeführt, um die Massen der Eich-Bosonen W^\pm und Z^0 und auch die Massen der Fermionen erklären zu können. Hierfür werden jedoch relativ viele neue Parameter eingeführt. Entscheidend ist daher der Nachweis, dass es tatsächlich ein Higgs-Boson gibt. Ziel der LHC-Experimente war es, im gesamten Massen-Bereich von 100 GeV bis 1 TeV nach dem Higgs-Boson zu suchen.

Im Juli 2012 haben die LHC-Kollaborationen Atlas und CMS die Entdeckung eines neuen Bosons mit einer Masse von 125 GeV berichtet, dessen Eigenschaften mit denen des theoretisch vorhergesagten Higgs-Teilchens kompatibel ist. Obwohl noch nicht geklärt ist, ob es sich tatsächlich um das Higgs-Teilchen des Standard-Modells handelt, werden hier diese Resultate aus dieser Perspektive zusammengefasst.

Glücklicherweise liegt die Higgs-Masse in einem Bereich, in dem, zumindest prinzipiell, Higgs-Kopplungen sowohl mit Bosonen als auch mit Fermionen beobachtet werden können. Nicht beobachtet werden konnten bisher Zerfälle in Quarks wie z.B.

$$gg \rightarrow H \rightarrow b\bar{b}$$

Dieser Zerfall hat zwar bei kleinen Massen das höchste Verzweigungsverhältnis aber auch einen viel zu großen Untergrund durch QCD-Prozesse mit virtuellen Quarks oder Gluonen wie $gg \rightarrow b\bar{b}$. Aus ähnlichen Gründen sind auch andere Zerfälle des Higgs in zwei andere Quarks oder zwei Gluonen nicht beobachtbar.

H \rightarrow $\gamma\gamma$

Das Signal besteht nur aus zwei Photonen. Dies ist trotz des geringen Verzweigungsverhältnisses einer der wichtigsten Kanäle für eine Entdeckung des Higgs bei einer Masse von 125 GeV. Die Gründe hierfür sind

- die sehr gute Energieauflösung von ca. 1% für Photonen. Dies führt auch zu einer Massenauflösung für das Higgs-Teilchen

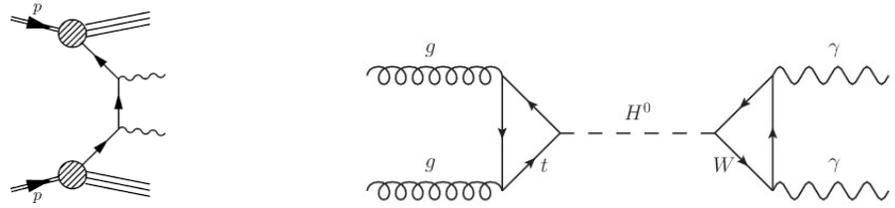


Abb. 5.2 Feynman-Diagramme für Prozesse mit zwei Photonen im Endzustand aus QED-Prozessen und aus Higgs-Zerfällen.

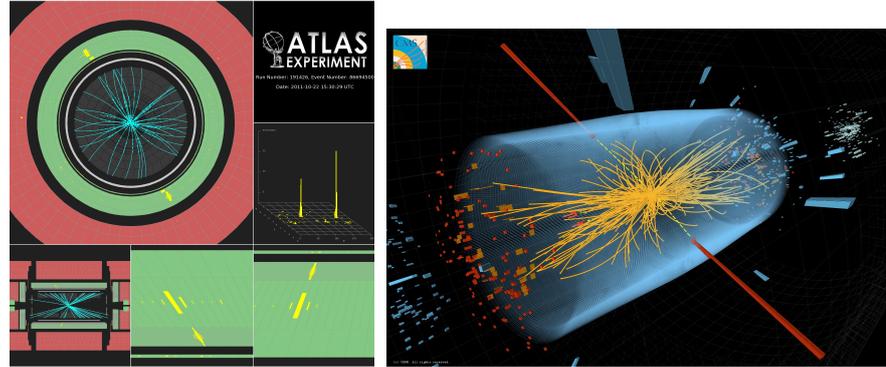


Abb. 5.3 Ereignisse mit zwei Photonen im Endzustand bei den LHC-Experimenten Atlas und CMS. Die invariante Masse der Photon-Paare beträgt in beiden Fällen etwa 125 GeV.

von ebenfalls ca. 1%. Man kann daher nach einer schmalen Resonanz suchen.

- der Untergrund entsteht durch Photonen aus QED-Prozessen wie $q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma$ mit einem virtuellen Quark im t -Kanal. Solche Ereignisse sind im Einzelfall ununterscheidbar, bilden aber keine Resonanzen, sondern eine kontinuierliche Verteilung in der invarianten Masse der beiden Photonen. Andere Untergrundprozesse, bei denen z.B. Photonen aus π^0 -Zerfällen entstehen, können weitgehend unterdrückt werden, indem man fordert, dass die Photonen nicht in der Nähe eines Jets aus anderen Hadronen im Detektor nachgewiesen werden, sondern isoliert sind.

Abb. 5.3 zeigt Ereignisse der Atlas und CMS Experimente mit diesem Endzustand⁸. Abb. 5.8 zeigt die Verteilung der gemessenen Ereignisse als Funktion der invarianten Masse $M_{\gamma\gamma}$ der Photon-Paare. In beiden Experimenten zeigt sich über dem ansonsten stetig abfallenden Untergrund eine signifikante Anhäufung von Ereignissen bei etwa $M_{\gamma\gamma} \approx 125$ GeV. Ermittelt man die Signalstärke aus einer gemeinsamen Anpassung einer abfallenden Funktion für den Untergrund und einer Gauß-Funktion für das Higgs-Signal an die Daten,

⁸Neben den beiden hochenergetischen Photonen sind jeweils viele niederenergetische Hadronen (π^\pm, p, \dots) und Photonen (aus π^0 Zerfällen) zu erkennen. Diese entstehen durch weitere Prozesse der starken Wechselwirkung in der gleichen Proton-Proton-Wechselwirkung (“Underlying Event”) oder aber Wechselwirkungen anderer Proton-Proton-Paare (“Pile-up”).

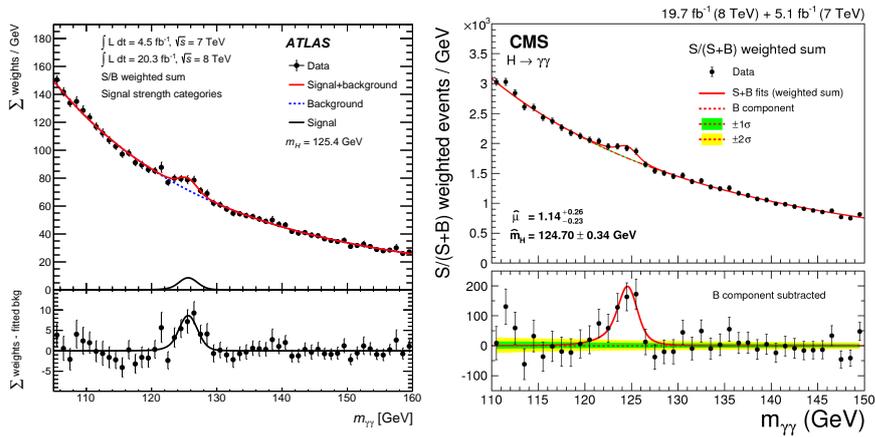


Abb. 5.4 Massenverteilung $M_{\gamma\gamma}$ bei den LHC-Experimenten Atlas und CMS (Daten bis Ende 2012).

so ergibt sich eine Signifikanz des Signals von jeweils mehr als 4σ .

$H \rightarrow ZZ^*$

Bei hohen Massen $M_H \gtrsim 120 \text{ GeV}$ ist der Zerfall

$$H \rightarrow ZZ^* \rightarrow l^+l^-l'^+l'^-$$

in vier geladene Leptonen besonders einfach nachweisbar, insbesondere wenn es sich um e^+e^- oder $\mu^+\mu^-$ handelt. Die Massenauflösung für das Higgs aus der Summe der vier Leptonimpulse ist dann wieder sehr gut.

- Irreduzibel ist der Untergrund durch andere Standard-Modell Prozesse mit ZZ^* im Endzustand, z.B. $q\bar{q} \rightarrow ZZ^*$ mit Quarks im t-Kanal. Allerdings sollte hierdurch dann keine Anhäufung bei einer bestimmten M_{ZZ^*} Masse auftreten.
- Bei $M_H < 2M_Z$ ist eines der Z -Bosonen mit großer Wahrscheinlichkeit reell, bei $M_H > 2M_Z$ sind beide Z reell. Daher kann man im Bereich um $M_H = 125 \text{ GeV}$ aus zwei der Leptonen die Masse eines Z rekonstruieren und damit Untergrund bereits sehr gut reduzieren. Der wichtigste reduzierbare Untergrund entsteht durch Endzustände $Zb\bar{b}$ (oder $Zc\bar{c}$, ...) mit den Zerfällen $Z \rightarrow \mu^+\mu^-$ und $b \rightarrow c\mu\nu_\mu$ für beide b -Quarks. Aufgrund der relativ kleinen b -Masse (c -Masse, ...) werden die Myonen hierbei nahezu parallel zum b -Jet fliegen. Verlangt man, dass alle vier Myonen im Winkel isoliert von anderen Teilchen und insbesondere Jets sind, so wird dieser Untergrund sehr klein.

Abb. 5.6 zeigt Ereignisse der Atlas und CMS Experimente mit diesem Endzustand. Die entsprechende 4-Lepton Masse ist in Abb. 5.7 gezeigt. Der Peak bei $M_{4l} = M_Z$ entsteht durch die Produktion einzelner Z , also $q\bar{q} \rightarrow Z \rightarrow 4l$. Die Ereignisse bei $M_{4l} > 2M_Z$ gehen auf die Paarproduktion reeller ZZ -Paare zurück. Wieder zeigt sich

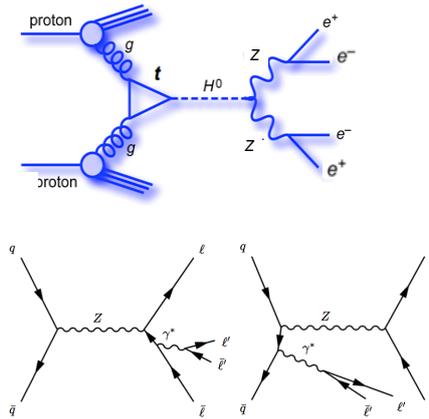


Abb. 5.5 Links: Feynman-Diagramm für Higgs-Produktion und Zerfall in zwei Z -Bosonen, die wiederum in Leptonen zerfallen. Rechts: Untergrundprozesse mit einem Z -Boson und vier Leptonen im Endzustand.

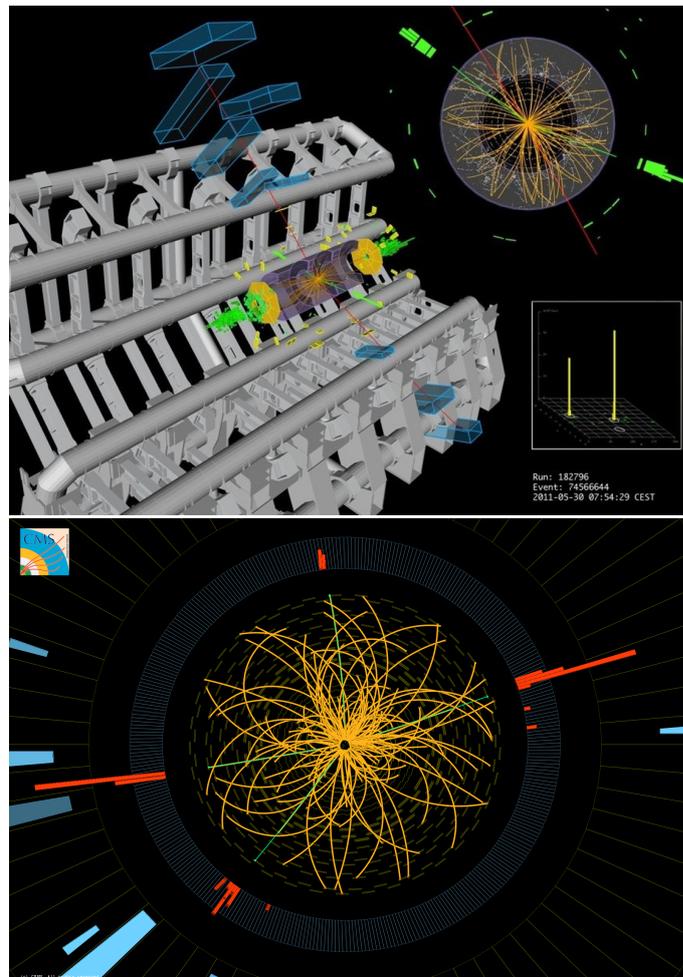


Abb. 5.6 Ereignisse mit $e^+e^-\mu^+\mu^-$ im Endzustand von Atlas (oben) und $e^+e^-e^+e^-$ von CMS (unten). In beiden Ereignissen beträgt die invariante Masse der 4 Leptonen etwa 125 GeV.

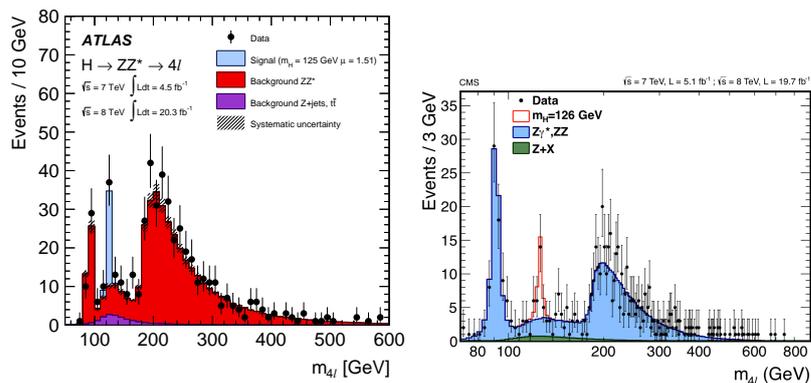


Abb. 5.7 Massenverteilung M_{4l} bei den LHC-Experimenten Atlas und CMS (Daten bis ca. Oktober 2012).

in beiden Experimenten eine signifikante Anhäufung von Ereignissen bei etwa $M_{4l} \approx 125$ GeV. Die Signalstärke beträgt etwa 4σ . Auch in Endzuständen mit anderen ZZ -Zerfällen wird nach Higgs-Produktion gesucht, z.B. $H \rightarrow ZZ^* \rightarrow l^+l^-\nu\bar{\nu}$, $H \rightarrow ZZ^* \rightarrow l^+l^-\tau^+\tau^-$, oder $H \rightarrow ZZ^* \rightarrow l^+l^-q\bar{q}$. Hierfür ist allerdings die Massenauflösung sehr viel schlechter, so dass die Resultate weniger sensitiv sind.

5.6 Zusammenfassung der Resultate zum Higgs vom LHC

Higgs-Suchen finden in allen möglichen Endzuständen statt und die Ergebnisse aller Suchen werden statistisch kombiniert. Die Resultate der statistischen Analyse lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Die Wahrscheinlichkeit, die beobachteten Ereignisse ohne Higgs-Boson sondern mit anderen Standard-Modell-Prozessen zu erklären, ist nahe $M_H = 125$ GeV am kleinsten und entspricht einer Fluktuation um ca. 7σ (Standardabweichungen).
- Die Signalstärke, bestimmt aus der Anzahl der beobachteten Ereignisse, ist im Rahmen von $\pm 20\%$ mit dem Standard-Modell verträglich. Diese Information stammt bisher dominant von den Endzuständen $H \rightarrow \gamma\gamma, ZZ$. Die anderen Zerfallskanäle haben noch viel zu große statistische Fehler.
- Die Beobachtung im $\gamma\gamma$ Kanal zeigt, dass es sich um ein Boson mit Spin 0 oder Spin 2 handeln muss.

Im Moment kann die Vermutung nicht wiederlegt werden, dass es sich um ein Higgs-Teilchen handelt wie im Standard-Modell vorhergesagt. Den Spin des neuen Teilchens wird man anhand der Winkelverteilungen schon bald bestimmen können. Langfristig wird besonders wichtig sein, ob man die Kopplungen des Higgs sowohl in Fermionen als auch in Bosonen messen kann, denn deren Vorhersagen sind im Standard-Modell unabhängig voneinander. Dies

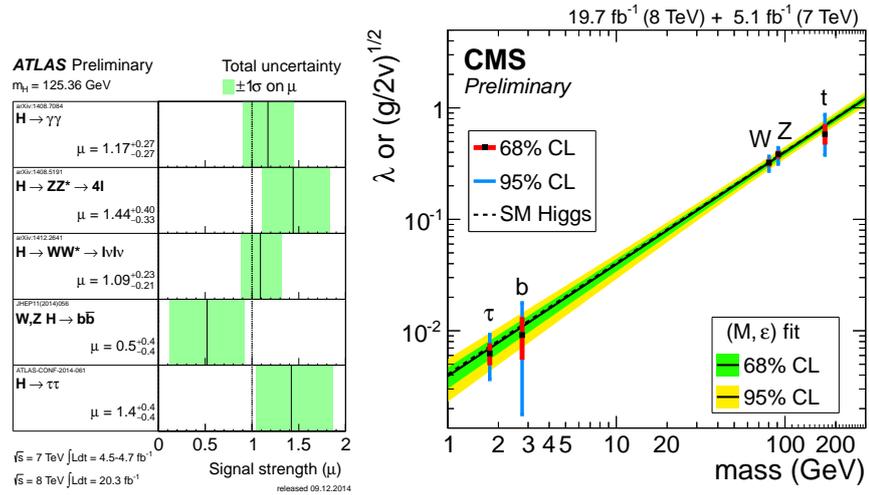


Abb. 5.8 Links: Gemessene Signalstärke relativ zur Erwartung des Standardmodells von Atlas. Rechts: Gemessene Beziehung zwischen Masse und Kopplung des Higgs an Fermionen und Bosonen. der Massenverteilung $M_{\gamma\gamma}$ bei den LHC-Experimenten Atlas und CMS (Stand 2014).

wird voraussichtlich in mehreren Zerfallskanälen mit einer Genauigkeit von besser als 10% möglich sein. Da die Rate $\sigma_{prod,f}$ für einen bestimmten Endzustand f auch vom Produktionsmechanismus abhängt, gilt

$$\sigma_{prod,f} \sim \frac{\Gamma_{prod} \Gamma_f}{\Gamma_{tot}} = \frac{\Gamma_{prod} \Gamma_f}{\sum_i \Gamma_i}$$

Man muss daher versuchen, möglichst viele Produktionsmechanismen und Zerfallskanäle zu messen, um alle Größen bestimmen zu können.

Langfristig ist es wichtig, auch die Selbst-Wechselwirkung des Higgs zu messen, um sicher zu sein, dass es sich um eine spontane Symmetriebrechung handelt. Hierfür sind weitaus mehr Daten erforderlich und letzten Endes ein hochenergetischer e^+e^- Beschleuniger.

Insgesamt ist der Higgs-Mechanismus unbefriedigend, da er nur die Massen von W und Z erklärt, für den Preis von zwei neuen Naturkonstanten des Higgs-Potentials. Für die Fermionen braucht man aber nach wie vor eine Naturkonstante (die Kopplung an das Higgs oder die Fermionmasse) für jedes Fermion. Dies sind allein 12 neue Naturkonstanten. Außerdem braucht man für die Flavour-Mischungen der Leptonen und Quarks weitere 8 Naturkonstanten. Diese 22 Naturkonstanten aus dem Higgs-Sektor sind ein starkes Argument für die Suche nach einer einfacheren Theorie. Hinzu kommen andere Probleme, insbesondere das Hierarchie-Problem des Standard-Modells.

6 Flavour und Mischung der Fermionen

6.1 Übergänge zwischen Quarks verschiedener Generationen

In der bis hier hin eingeführten theoretischen Darstellung der schwachen Wechselwirkung finden Übergänge zwischen Quarks verschiedener Flavour ausschliesslich innerhalb der gleichen Generation statt durch Austausch von W Bosonen. Experimentell beobachtet man aber nicht solche Prozesse, sondern auch Übergänge zwischen den Generationen.

$$1 \qquad 2 \qquad 3 \qquad (6.1)$$

$$d \rightarrow uW^- \qquad (6.2)$$

$$s \rightarrow uW^- \qquad (6.3)$$

$$c \rightarrow dW^+ \quad c \rightarrow sW^- \qquad (6.4)$$

$$b \rightarrow uW^- \quad b \rightarrow cW^- \qquad (6.5)$$

$$(t \rightarrow dW^+) \quad (t \rightarrow sW^+) \quad t \rightarrow bW^+ \qquad (6.6)$$

Ein auch historisch wichtiges Beispiel ist der Zerfall eines $K^0 = (u\bar{s})$, bei dem ein s -Quark der 2. Generation mit einem Quark der 1. Generation reagiert. Ein Beispiel für den Zerfall eines c -Quarks in leichtere Quarks zeigt Abb. C.13.

Natürlich können aufgrund von Energieerhaltung die jeweils leichtesten Quarks einer Generation, wenn sie einmal produziert worden sind, nur in Quarks der jeweils leichteren Generationen zerfallen. Insbesondere findet man, dass die schweren Quarks vornehmlich innerhalb ihrer eigenen Generation in das jeweils leichtere Quark zerfallen und mit deutlich kleinerer Wahrscheinlichkeit in die noch leichteren Quarks der jeweils nächsten oder sogar übernächsten Generation. Daraus ergibt sich z.B. für das b -Quark, dass die folgende Kette von Zerfällen am wahrscheinlichsten ist:

$$b \rightarrow c \rightarrow s \rightarrow u \qquad (6.7)$$

Am Ende dieser Zerfälle bleiben die Quarks der ersten Generation (u, d) übrig. Auch folgt, dass die Lebensdauer des b -Quarks größer als die des c -Quarks ist, denn für das b -Quark ist nur ein Zerfall in Quarks einer anderen Generation möglich. Hadronen aus b -Quarks und c -Quarks können daher über ihre Lebensdauer relativ gut von anderen Hadronen unterschieden werden. Einen Sonderfall stellt das top-Quark dar. Hier sind die Zerfälle in b -Quarks

$$t \rightarrow b \qquad (6.8)$$

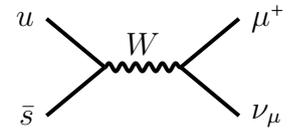


Abb. 6.1
 K^0 Zerfall.

b -Quark tagging

6.1 Übergänge zwischen Quarks verschiedener Generationen

Quarks	Meson	Lebensdauer τ	$c \cdot \tau$
s	$K^- = (s\bar{u})$	$1,24 \cdot 10^{-8}$ s	3,71 m
c	$D^+ = (c\bar{d})$	$1,04 \cdot 10^{-12}$ s	0,312 mm
b	$B^- = (b\bar{u})$	$1,64 \cdot 10^{-12}$ s	0,492 mm
t	-	$4 \cdot 10^{-25}$ s	10^{-16} m

Tabelle 6.1 Lebensdauer τ einiger Mesonen. Auch angegeben ist $c\tau$ als Maß für die mittlere Fluglänge $l = \gamma\beta c\tau$ bis zum Zerfall. Mit Quark ist hier das Quark im Meson gemeint, dessen Lebensdauer für die Lebensdauer des gesamten Mesons am wichtigsten ist. Neben der Lebensdauer der Quarks spielt auch der Phasenraumfaktor eine große Rolle, siehe Gl. 2.124 .

so viel häufiger, dass ein direkter Nachweis der Zerfälle $t \rightarrow s, u$ bisher noch nicht gelungen ist. Aufgrund der großen Masse des t -Quarks ist der Phasenraum für den Zerfall sehr groß. Daher ist die Lebensdauer *vermutlich* außerordentlich klein und das t -Quark zerfällt, bevor es sich mit anderen Quarks zu einem Meson verbinden kann.

Empirisch kann man die Übergänge zwischen Quarks verschiedener Generationen durch die sogenannte Cabibbo-Kobajashi-Maskawa Matrix darstellen.

Hierfür verändert man den geladenen Strom zwischen z.B. einem u -Quark und einem d -Quark mit dem W

$$j_{ud}^\mu = u_L^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu d_L \quad (6.9)$$

um einen Faktor V_{ud} zu

$$j_{ud}^\mu = u_L^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \underbrace{V_{ud} d_L}_{d'_L} \quad (6.10)$$

Dies kann man generalisieren auch für die Kopplung zwischen u und s ,

$$j_{us}^\mu = u_L^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \underbrace{V_{us} s_L}_{s'_L} \quad (6.11)$$

Für alle drei Generationen lässt sich dies schreiben als Matrixgleichung,

$$j_{us}^\mu = (u^\dagger, c^\dagger, t^\dagger)_L \gamma^0 \gamma^\mu \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}_L \quad (6.12)$$

Dies kann man auffassen als einen Wechsel der Basis der d -artigen Quarks zwischen

- d, s, b = Masseneigenzuständen
- d', s', b' = Eigenzuständen der schwachen Wechselwirkung

CKM-Matrix

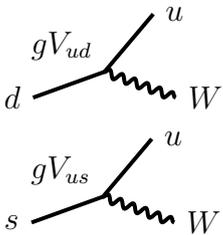


Abb. 6.2
Vertex mit
CKM-Element

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix}_L = \underbrace{\begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}}_{V_{CKM}} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}_L \quad (6.13)$$

Die einzelnen Elemente der CKM-Matrix treten in den Matrixelementen und damit (quadratisch) in den Wahrscheinlichkeiten vieler verschiedener Streuprozessen und Zerfälle auf⁹. Ausserdem sollte diese 3×3 -Matrix unitär sein, wenn es nur drei komplette Generationen von Quarks gibt. Die bisher bestimmten Elemente der CKM-Matrix stimmen im Rahmen ihrer Fehler mit dieser Annahme überein. Damit lassen sich auch die bisher nicht direkt gemessenen Elemente berechnen.

$$\begin{pmatrix} |V_{ud}| & |V_{us}| & |V_{ub}| \\ |V_{cd}| & |V_{cs}| & |V_{cb}| \\ |V_{td}| & |V_{ts}| & |V_{tb}| \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,974 & 0,225 & 0,004 \\ 0,225 & 0,973 & 0,041 \\ 0,009 & 0,040 & 0,999 \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

Da die Diagonalelemente $V_{ud}, V_{cs}, V_{tb} \approx 1$ sind, überwiegen Übergänge innerhalb der gleichen Generation.

CP-Verletzung: Eine wichtige Eigenschaft der CKM-Matrix ist, dass sie zwar unitär, aber nicht reell sein muss, sondern die einzelnen Elemente auch komplex sein können. Da man komplexe Phasen auch in den Wellenfunktionen der Quarks absorbieren kann, ergibt sich, dass die CKM-Matrix nur vier freie Naturkonstanten beinhaltet, drei Mischungswinkel und eine komplexe Phase. Diese Phase ist verantwortlich für das Phänomen der CP-Verletzung der schwachen Wechselwirkung, also der Eigenschaft, dass links- und rechtshändige Quarks und antiquarks nicht genau gleich an der schwachen Wechselwirkung teilnehmen. Experimentell wird bei Zerfällen von K_0 -Mesonen und B^0 -Mesonen diese Eigenschaft tatsächlich beobachtet. In der Kosmologie ist allerdings eine deutlich größere CP-Verletzung notwendig, um die Asymmetrie zwischen Materie und Antimaterie zu erklären.

Higgs und Massenmatrix Im Standard-Modell ist die CKM-Matrix mit dem Higgs-Mechanismus verbunden, denn dieser bestimmt ja gerade die Masseneigenzustände der Quarks. Man postuliert daher zusätzlich zum Higgs-Potential sogenannte Yukawa-Potentiale für die schwachen Eigenzustände der drei Quark-Generationen u'_i, d'_i ($i=1,2,3$), mit $\bar{u} = u^\dagger \gamma^0$, der Form

$$V \sim Y_{ij}^d (\bar{u}'_i, \bar{d}'_i)_L \begin{pmatrix} 0 \\ v + H \end{pmatrix} d'_{jR} + \dots \quad (6.16)$$

⁹ Da historisch zunächst nur die Quarks u, d, s bekannt waren, hat man zunächst nur einen Basiswechsel

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

mit dem sogenannten Cabibbo-Mischungswinkel $\theta_c \approx 13,1^\circ$ angenommen.

Die *Massen-Matrizen* Y^d, Y^u sind komplexe 3×3 Matrizen im Raum der Generationen. Mit

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

folgen im Allgemeinen als Ausdrücke für die Masse auch gemischte Terme zwischen den Generationen, so dass die Zustände u'_i, d'_i keine Masseneigenzustände sein können. Mit Basistransformationen für $u'_{iL}, u'_{iR}, d'_{iL}, d'_{iR}$ kann man dann die Massenmatrizen diagonalisieren, so dass Massenausdrücke für jedes Quark einzeln entstehen. Die CKM-Matrix ist dann erklärt als Produkt der Matrizen dieser Basistransformationen.

Insgesamt benötigt man für die 6 Massen der Quarks und 4 Mischungsparameter der CKM-Matrix also 10 neue Naturkonstanten, die im Standardmodell nicht abgeleitet werden können.

6.2 Massen und Mischungen der Neutrinos

Die drei geladenen Leptonen e, μ, τ können experimentell leicht anhand ihrer elektromagnetischen Wechselwirkung und ihrer Massen unterschieden werden. Dies gilt nicht für die drei Neutrino-Sorten. Man definiert daher die Neutrino-Flavour ν_e, ν_μ, ν_τ als diejenigen Zustände, die in Reaktionen mit geladenem Strom (W^\pm) zusammen mit den jeweiligen geladenen Leptonen auftreten. Damit sind ν_e, ν_μ, ν_τ also Eigenzustände der schwachen Wechselwirkung.

Die Massen der Neutrinos sind so klein, dass sie bisher nicht wie andere Massen direkt aus Energie- und Impulserhaltung gemessen werden konnten. Die beste Grenze bisher kommt aus dem Tritium-Zerfall und schränkt die Masse des in diesem Prozess entstehenden Neutrinos auf < 2 eV ein.

Allerdings ist aufgrund von Experimenten zur Oszillation von Neutrinos verschiedener Flavour seit Ende der 1990^{er} Jahre bekannt, dass Neutrinos eine Masse im Bereich $50\text{meV} < m_\nu < 1\text{eV}$ haben müssen. Man definiert Masseneigenzustände ν_1, ν_2, ν_3 über die sogenannte Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata Matrix,

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

Ganz in Analogie zur CKM-Matrix der Quarks ist also beispielsweise das Elektroneneutrino eine lineare Supersposition der Masseneigenzustände. Wird in einer schwachen Reaktion ein Neutrino mit bestimmter Flavour erzeugt, so wird es in der Regel lange Strecken zurücklegen bis zur nächsten Wechselwirkung. Die Ausbreitung zwischen Erzeugung und Nachweis wird durch die Masseneigenzustände erfolgen, da diese der freien Dirac-Gleichung folgen.

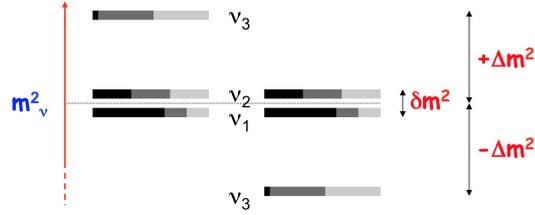


Abb. 6.3 Neutrino-Massen: Gemessen werden keine absoluten Neutrino-Massen, sondern nur quadratische Differenzen. Die Zahlenwerte hierfür sind $\delta m^2 = 8 \cdot 10^{-5} \text{ eV}^2$ und $\Delta m^2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2$. Daraus ergibt sich nicht, ob ν_3 schwerer (links) oder leichter (rechts) ist als die anderen Neutrinos.

Da die Differenzen der Neutrinomassen aber klein sind gegenüber ihrer Energie, überlagern sich die Wellenpakete der unterschiedlichen Masseneigenzustände auch nach langen Strecken noch kohärent, so dass Interferenz-Effekte beobachtet werden können.

Als einfaches Beispiel wird hier die Oszillation zwischen ν_μ und ν_τ betrachtet und angenommen, dass nur die Masseneigenzustände ν_2, ν_3 signifikant beitragen. Damit ist

$$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Theta_{23} & \sin \Theta_{23} \\ -\sin \Theta_{23} & \cos \Theta_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich eine bestimmte erzeugte Neutrino-Flavour (z.B. ν_μ) nach einer Strecke L als eine andere Flavour (z.B. ν_τ) nachweisen lässt, ergibt sich zu

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau) = \sin^2(2\theta_{23}) \cdot \sin^2\left(1,267 \cdot \frac{|m_2^2 - m_3^2|}{\text{eV}^2} \frac{L}{\text{km}} \frac{\text{GeV}}{E}\right) \quad (6.20)$$

Aus verschiedenen Messungen mit Neutrinos aus der Sonne, der kosmischen Strahlung, Kernreaktoren und hochenergetischen Teilchenbeschleunigern ergibt sich, dass die Mischungswinkel relativ groß sind und die Massen noch nicht eindeutig bestimmt werden können.

$$\begin{pmatrix} |U_{e1}| & |U_{e2}| & |U_{e3}| \\ |U_{\mu 1}| & |U_{\mu 2}| & |U_{\mu 3}| \\ |U_{\tau 1}| & |U_{\tau 2}| & |U_{\tau 3}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 & 0,7 \\ 0,4 & 0,6 & 0,7 \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

Wie bei den Quarks kann auch die PMNS Matrix auf den Higgs-Mechanismus zurückgeführt werden. Wie bei den Quarks sind für die Leptonen insgesamt 6 Massen und 4 Mischungsparameter, also insgesamt 10 weitere Naturkonstanten notwendig, die nicht aus anderen Überlegungen im Standardmodell abgeleitet werden können.

7 Starke Wechselwirkung

7.1 Quarks und Gluonen

Experimentell gibt es durch zahlreiche Messergebnisse Evidenz für eine innere Struktur der Hadronen und insbesondere der Nukleonen (Protonen und Neutronen).

- Durch Streuexperimente mit Impulsüberträgen $10 \text{ MeV} > \Delta p > 1 \text{ GeV}$ kann man den Formfaktor, d.h. die geometrische Größe der Kerne und der Protonen und Neutronen messen, siehe Abschnitt 2.4.2. Das Volumen von Atomkernen nimmt linear mit der Anzahl der Protonen und Neutronen zu. Dies deutet auf eine feste geometrische Ausdehnung der Nukleonen mit einem Radius von ca. 1 fm hin.
- In der tief-inelastischen Elektron-Proton Streuung, $e + p \rightarrow e + X$ wird ein Wirkungsquerschnitt gemessen, der nicht dem einer homogenen, strukturlosen Ladungsverteilung innerhalb des Protons entspricht, sondern der sich aus der Summe von Streuprozessen der Elektronen an einzelnen, punktförmigen Ladungsträgern (den Quarks) erklären lässt. Auf diese Art wurden die Quarks an Experimenten am SLAC entdeckt, siehe Abb. 2.11.
- Der totale Wirkungsquerschnitt von Proton-Anti-Proton Kollisionen ist etwa gleich groß wie die daraus berechnete Querschnittsfläche eines Protons von $A = \pi(1 \text{ fm})^2 = 0.31 \text{ mb}$ und steigt leicht mit der Schwerpunktsenergie \sqrt{s} . Dies ist ca. 10^6 mal größer als der Wirkungsquerschnitt für e^+e^- Streuung bei $\sqrt{s} = 1 \text{ GeV}$, der zudem mit der Schwerpunktsenergie fällt.
- Durch Streuung mit Photonen oder anderen Hadronen lässt sich ein Spektrum von angeregten Zuständen der Protonen erzeugen, die anschließend wieder in Protonen, Neutronen und Pionen zerfallen (Abb.2.14).

Das Proton ist also ausgedehnt und damit nicht elementar, sondern besteht aus "Partonen". Die Natur der Partonen ist ebenfalls bekannt:

- Quarks: In der e^+e^- Streuung wird die Produktion von "Jets" von Teilchen beobachtet. In den meisten Fällen entstehen 2 entgegengerichtete Jets gleicher Energie, deren Winkelverteilung gegenüber den einlaufenden Teilchen genau wie bei der Produktion von $\mu^+\mu^-$ ist, also

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim 1 + \cos^2 \Theta^*$$

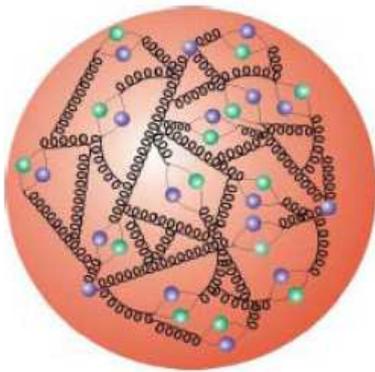


Abb. 7.1
Struktur des Protons aus Quarks und Gluonen.

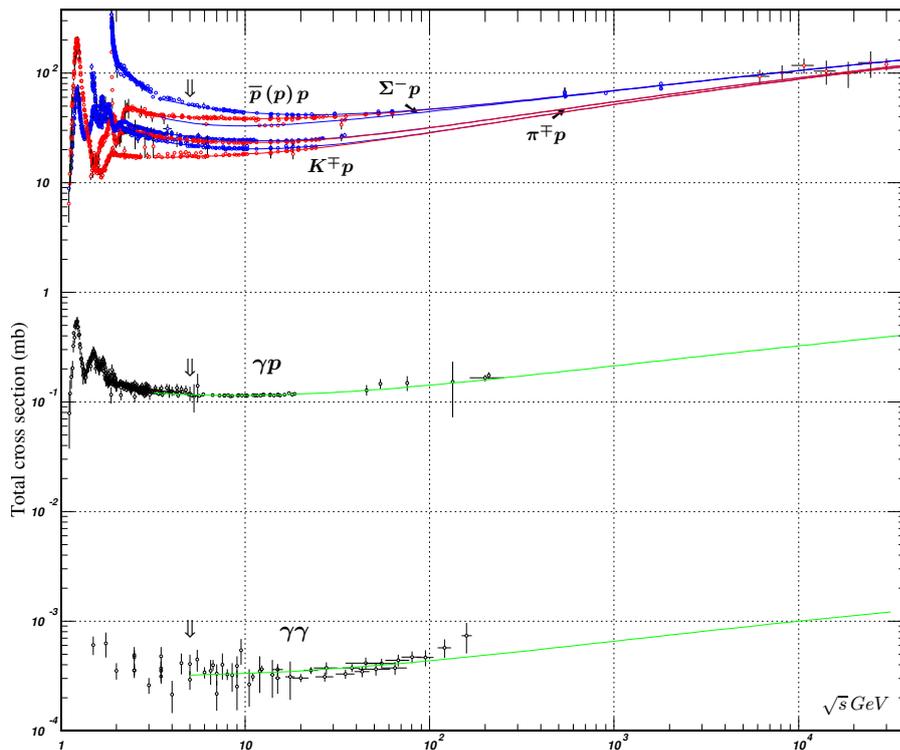


Abb. 7.2 Totaler Wirkungsquerschnitt als Funktion der Schwerpunktsenergie. Oben: $p\bar{p}$, πp , Kp , Mitte: γp , Unten: $\gamma\gamma$ (Particle Data Group).

Es ist daher anzunehmen, dass die Jets aus der Produktion von Spin 1/2 Teilchen, den Quarks, entstehen.

- u und d Quarks Der Aufbau der leichtesten Hadronen lässt sich mit nur zwei Quark-Sorten erklären, den up und $down$ Quarks mit den elektrischen Ladungen $q_u = 2/3 e$, $q_d = -1/3 e$.

Baryonen	Mesonen
$p = (uud)$	$\pi^+ = u\bar{d}$
$n = (udd)$	$\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d})$
0	$\pi^- = \bar{d}u$

- Gluonen: In der e^+e^- Streuung werden in typisch 10% der Fälle nicht nur zwei sondern 3 Jets beobachtet, wobei die Winkelverteilung der Jets untereinander mit der Erwartung für die Abstrahlung eines Spin 1 Teilchens (“Gluon”) von einem Spin 1/2 Teilchen (Quark) übereinstimmt. Auf diese Weise wurde das Gluon am PETRA Beschleuniger bei DESY entdeckt.
- Starke Kopplungskonstante α_s : Die Häufigkeit von etwa 10% dieser 3-Jet Ereignisse deutet auf eine große Kopplungskonstante zwischen Quarks und Gluonen hin, $\alpha_s \approx 10\alpha_{em}$.

Die Natur der Wechselwirkung zwischen Quarks und Gluonen hängt, in Analogie zur elektromagnetischen Wechselwirkung, mit einer erhaltenen “Ladung der Starken Wechselwirkung”, zusammen:

- Farbe: Eine der Baryon-Resonanzen, das Δ^{++} , trägt doppelte elektrische Ladung und Spin $3/2$. Es besteht demnach aus 3 u Quarks. Wegen des Pauli-Prinzips können aber identischen Fermionen nicht im gleichen Zustand sein. Daher müssen die drei Quarks des $\Delta^{++} = (uuu)$ in drei unterschiedlichen Zuständen einer neuen, inneren Quantenzahl, der Farbe, vorkommen können.
- Das W^\pm Boson der schwachen Wechselwirkung zerfällt dreimal häufiger in Quark-Paare als in Lepton-Paare.
- Das Verhältnis

$$R = \frac{\sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}}}{\sigma_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}},$$

der Streuung in Hadronen oder Myonen zeigt Resonanzen und erhöht sich stufenweise um Beträge von

$$3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \quad \text{oder} \quad 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

Dies deutet auf die paarweise Erzeugung neuer Quarks hin, $e^+e^- \rightarrow u\bar{u}, d\bar{d}, s\bar{s}, c\bar{c}, b\bar{b}$ hindeutet.

- Skala der QCD: Die Zerfallsbreite (oder Energieunschärfe = $1/\text{Lebensdauer}$) der Hadron-Resonanzen beträgt typisch etwa 200 MeV. In der gleichen Größenordnung liegt die Masse des Pions (leichtestes Hadron) und auch $1/\text{Radius}$ des Protons. Der Wert $\Lambda_{QCD} \approx 200 \text{ MeV}$ wird daher als Skala der QCD bezeichnet. Die Existenz und Größe dieser Skala wird später aus der Energie-Abhängigkeit von α_s und damit dem Confinement erklärt.

7.2 Potential der QCD

Bei kleinen Energien (oder Impulsüberträgen) kann die durch Gluonen vermittelte starke Wechselwirkung effektiv durch ein Potential beschrieben werden. Insbesondere gebundene Zustände lassen dabei Rückschlüsse auf das Potential zu.

Dies ist ganz analog zu verstehen wie bei der elektromagnetischen Wechselwirkung, bei der das Photonfeld einer elektrischen Ladung dem Potential entspricht und z.B. aus dem Spektrum des Wasserstoffs das Coulomb-Potential berechnet werden kann.

Bei der starken Wechselwirkung werden daher besonders die Mesonen, also gebundenen $q\bar{q}'$ -Zustände, benutzt, um das QCD-Potential zwischen zwei Quarks zu ermitteln.

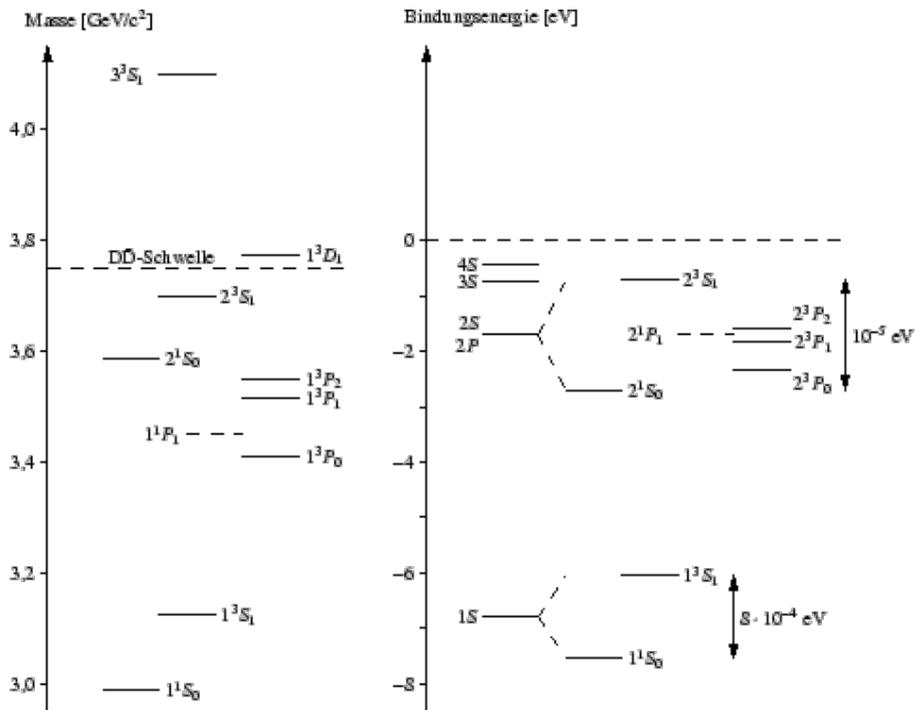


Abb. 7.3 Vergleich des Massen-Spektrums von Charmonium ($c\bar{c}$) und der Energieniveaus von Positronium e^+e^- .

Man findet bei kleinen Massen, also eng gebundenen Systemen, ein dem Positronium sehr ähnliches Schema. Damit sollte bei kleinen Abständen ein dem Coulomb-Potential ähnliches Potential der starken Wechselwirkung zugrunde liegen. Die Unterschiede der Niveaus liegen allerdings im Bereich 100 MeV und nicht wie beim Positronium im eV Bereich. Die Charmonium-Zustände sind also stark gebunden und geometrisch klein (< 1 fm). Bei den energetisch höheren Niveaus zeigen sich deutliche Unterschiede zwischen $c\bar{c}$ und e^+e^- . Bei großen Abständen entspricht die Form des QCD-Potentials also nicht mehr einem $1/r$ -Verlauf. Aus den Daten folgt vielmehr ein linear mit dem Abstand anwachsendes Potential, also eine konstante Kraft. Insgesamt ist damit

$$V_{QCD}(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} + k r \quad (7.1)$$

Bei kleinen Abständen überwiegt der $1/r$ -Term mit der starken Kopplungskonstante

$$\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi} \quad (7.2)$$

und dem Faktor $4/3$, der sich aus den Farb-Kombinationen der Quarks ergibt. Bei kleinen Abständen ähnelt das starke Potential daher dem Coulomb-Potential im Elektromagnetismus. Asymptotisch verhalten sich Quarks in diesem Bereich wie freie Teilchen,

$$r \ll 1 \text{ fm} \quad \Rightarrow \quad \text{asymptotische Freiheit} \quad (7.3)$$

Dagegen überwiegt bei großen Abständen der 2. Term. Die Konstante

$$k \approx 1 \frac{\text{GeV}}{\text{fm}} \quad (7.4)$$

QCD-Potential **zwi-**
schen Quarks

ist sehr groß und führt zu starken Abweichungen vom *Coulomb*-Verhalten. Das stetige Anwachsen der zur Vergrößerung des Abstands der Quarks benötigten Energie bedeutet, dass Quarks (genauer: Farbladungen) scheinbar nicht beliebig weit voneinander entfernt werden können,

$$r > 1\text{fm} \quad \Rightarrow \quad \text{Confinement} \quad (7.5)$$

Tatsächlich treten aber bereits bei Energien von typisch 100 MeV neue Effekte auf. Bei der $c\bar{c}$ -Erzeugung als Beispiel bilden sich keine noch höher-energetische $c\bar{c}$ Bindungszustände mehr, sondern z.B. Paare von $D^0 + \bar{D}^0 = (c\bar{u}) + (u\bar{c})$ -Mesonen. Diese sind farbneutral und können sich beliebig weit voneinander entfernen. Bei noch höheren Energien bilden sich sogenannte *Jets* aus, d.h. Gruppen von Hadronen, die in ihrer Summe mehr oder weniger in die gleiche Richtung und mit der gleichen Energie fliegen wie die erwarteten $c\bar{c}$ -Quarks.

Diese Interpretation ist keineswegs nur auf c -Quarks beschränkt, sondern wird auch bei allen anderen Quark-Sorten (außer bei top-Quarks) beobachtet.

7.3 Fragmentation und Jets

Die Ursache für das Confinement ist die Selbstwechselwirkung der Quarks. Da Quarks selber Farbe tragen, reagieren sie nicht nur mit Quarks, sondern auch mit sich selber. Dadurch ändert sich die Form des Farbfeldes im Vergleich zum Dipol-Feld des Elektromagnetismus. Wenn ein $q\bar{q}$ -Paar mit hoher invarianter Masse erzeugt wird streben beide Quarks mit hoher kinetischer Energie auseinander. Zwischen den beiden Quarks bildet sich ein relativ schmaler

String-Fragmentation

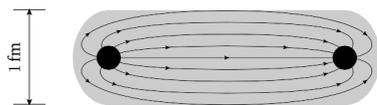


Abb. 7.4 Farb-String zwischen zwei Quarks bei großen Abständen (Skands, hep-ph 1207.2389v1).

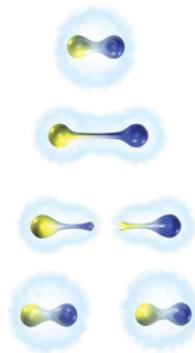


Abb. 7.5 Entstehung von Quark-Antiquarkpaaren bei der Hadronisierung (Skands, hep-ph 1207.2389v1).

Farb-Schlauch mit hoher Energiedichte aus. Bei Abständen $r > 1\text{fm}$ ist es energetisch günstiger, wenn sich zwischen den beiden Quarks ein weiteres Quark-Antiquarkpaar bildet, so dass die Gesamtlänge der Farbstrings reduziert wird. Vornehmlich werden aus energetischen Gründen Paare leichter Quarks erzeugt werden. Wenn

genug kinetische Energie vorhanden ist, werden auch die neuen Farbstrings wieder aufreißen und weitere $q\bar{q}$ Paare gebildet werden. Die Farbstrings ziehen dabei auch die neu gebildeten Quarks auseinander, so dass sich in Richtung der ursprünglich erzeugten Quarks *Jets*, d.h. Bündel von Hadronen, ausbilden. Je höher die ursprüngliche Energie ist, um so enger sind diese Bündel und um so genauer repräsentieren diese Jets die Energien und Impulse der ursprünglichen Quarks. Diese Prozesse sind statistischer Natur, so dass die Anzahl der Hadronen in einem Jet und auch ihr jeweiliger Energie-Anteil am Jet starken statistischen Schwankungen unterworfen ist.

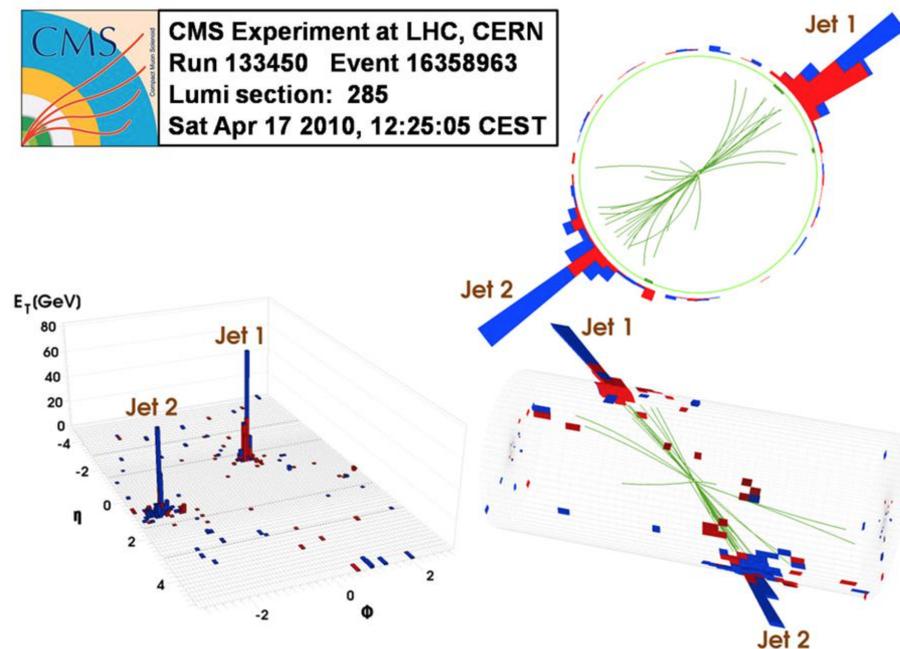


Abb. 7.6 Ereignis mit 2 Jets im CMS-Experiment am LHC.

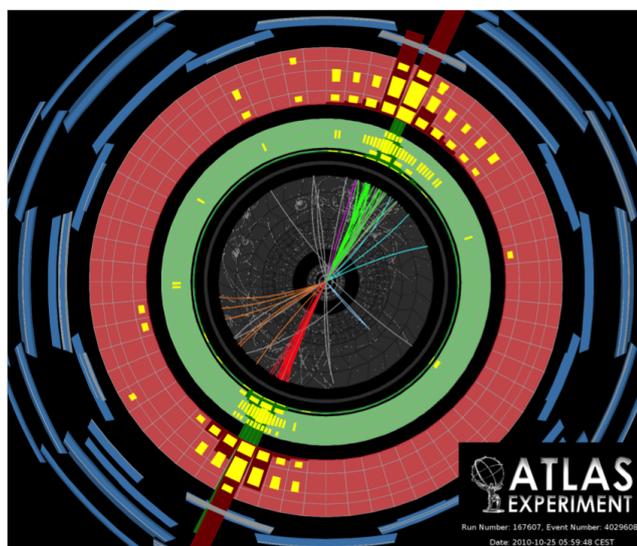


Abb. 7.7 Ereignis mit 3 Jets im CMS-Experiment am LHC.

Experimentell besteht die Kunst darin, die Gesamtenergie der Jets zu messen, unabhängig davon, welche und wie viele Teilchen jeweils

produziert worden sind. Man beobachtet, dass im statistischen Mittel Jets mit einem Impuls von z.B. 100 GeV aus typisch 10 - 20 Hadronen bestehen. Diese Anzahl steigt langsam (logarithmisch) mit der Jet-Energie. Die Hadronen in den Jets bestehen zu je etwa 25% aus π^+ , π^- , π^0 . Es treten aber auch Mesonen aus schwereren Quarks auf, und zu einem Anteil von ca. 10% auch (Anti-)Protonen, (Anti-)Neutronen, andere Baryonen aus 3 Quarks, gelegentlich sogar Helium-Kerne.

Auch Gluonen bilden Jets aus, denn aufgrund der Farbladung der Gluonen bilden sich auch zwischen ihnen sowie zwischen Quarks und Gluonen ebenfalls Farb-Strings, die dem gleichen Mechanismus der Hadronisierung unterworfen sind. Es ist im Einzelfall in der Regel nicht möglich zu entscheiden, ob ein Jet auf ein hochenergetisches u , d , s -Quark oder ein Gluon zurückgeführt werden kann, denn die Eigenschaften dieser Jets unterscheiden sich nur geringfügig. Anders sieht es bei c - und b -Quarks aus, denn diese sind deutlich schwerer und bilden schwere Hadronen, die einen im Mittel deutlich höheren Energieanteil am Jet tragen, längere Lebensdauern haben und charakteristisch durch die schwache Wechselwirkung zerfallen.

7.4 Proton-Struktur

Die innere Struktur der Hadronen und insbesondere des Protons kann in inelastischen Streuprozessen

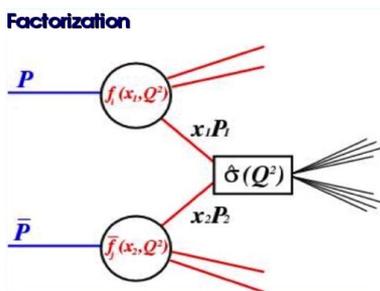


Abb. 7.8
Faktorisierungstheorem der QCD für pp -Streuung.

$$ep \rightarrow eX, \quad ep \rightarrow \nu X, \quad \nu p \rightarrow eX \quad pp \rightarrow \text{Jets} \quad (7.6)$$

untersucht werden. Bei Impulsüberträgen $Q^2 = -q^2 = (e - e')^2 \gg 1 \text{ GeV}^2$, weit oberhalb der Bindungsenergien der Quarks im Proton, können so Wechselwirkungen mit einzelnen Quarks studiert werden, ohne dass deren Bindung mit den anderen Bestandteilen des Protons einen großen Einfluss hat. Der Grund hierfür ist das sogenannte Faktorisierungstheorem der QCD, aufgrund dessen bei hohen Q^2 der Gesamtprozess beschrieben werden kann durch das Produkt des sogenannten harten Streuprozesses $\hat{\sigma}$, der die Reaktion einzelner Partonen miteinander beschreibt, multipliziert mit den Impulsverteilungen der Partonen im Proton.

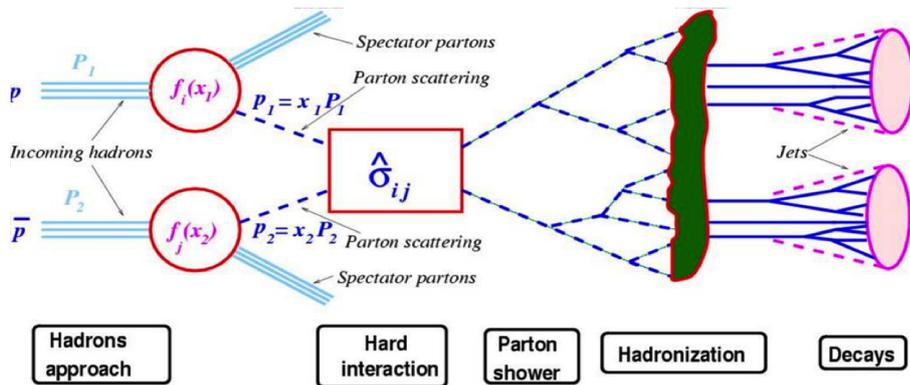


Abb. 7.9 Beschreibung der $P\bar{p}$ -Streuung durch Parton-Impulsverteilungen, den harten Streuprozess, die Abstrahlung weiterer Gluonen oder Quarks, die Hadronisierung und die Rekonstruktion von Jets.

Die Impulsverteilungen der Quarks und Gluonen im Proton hängen dabei vom Auflösungsvermögen Q^2 ab, mit dem der harte Streuprozess die Quantenfluktuationen im Proton auflöst.

Bei $Q^2 \ll M_Z^2$ ist der Effekt der schwachen Wechselwirkung noch klein, so dass in der ep -Streuung die elektrische Ladung der Quarks oder genauer die Strukturfunktion

$$F_2(x, Q^2) = \sum_{q=u,d,\dots,\bar{u},\bar{d}} e_q^2 f_q(x, Q^2) \quad (7.7)$$

bestimmt werden kann. Hierbei ist x der Impulsbruchteil des jeweiligen Quarks, $x = P_q/P_p$, und $f_q(x, Q^2) dx$ die Wahrscheinlichkeit, ein Quark q mit Impulsbruchteil x bis $x + dx$ zu treffen.

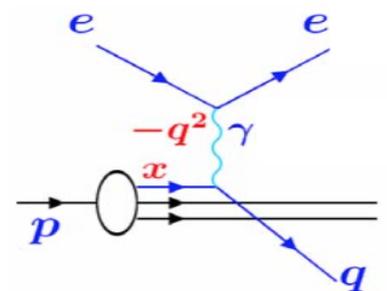


Abb. 7.10 Feynman-Diagramm zur tiefinelastischen Streuung.

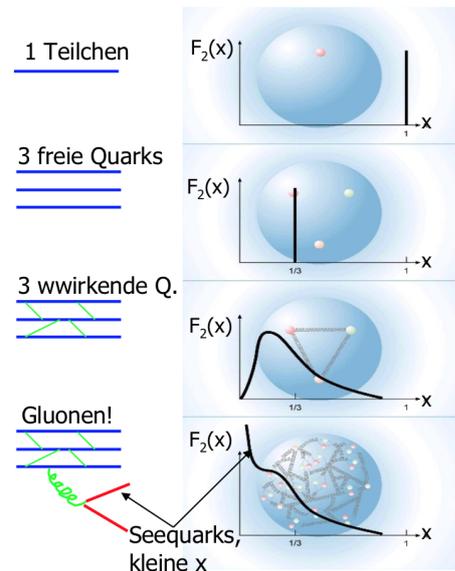


Abb. 7.12 Schema zum Verständnis der Verteilung der Quarks und Gluonen im Proton.

Die Quantenzahlen des Protons entsprechen in der Summe denen von zwei u -Quarks und einem d -Quark. Aufgrund der Quantenfluktuationen misst man aber vor allem bei kleinen Impulsbruchteilen x und hohem Auflösungsvermögen Q^2 . Aus den Messungen von F_2

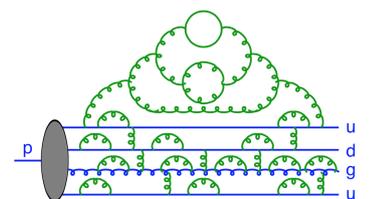


Abb. 7.11 Fluktuationen von Quarks und Gluonen im Proton (Skands, hep-ph 1207.2389v1)

sowie ähnlichen Observablen in der Neutrino- und pp -Streuung lassen sich die einzelnen Quark-Sorten separieren und auch die Gluon-Dichten berechnen. Das Ergebnis zeigt die erwarteten Verläufe der Valenzquarks (u, d) und eine sehr hohe Seequark- und Gluon-Dichte. Dies ist die Ursache für die hohe Rate von Gluon-Prozessen in der pp -Streuung, die sehr wichtig z.B. für die Higgs-Produktion ist.

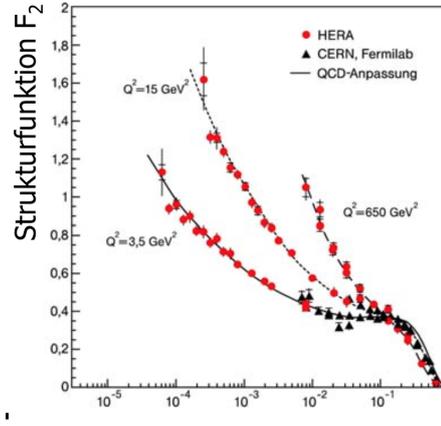


Abb. 7.13 Messung der Protonstrukturfunktion F_2 .

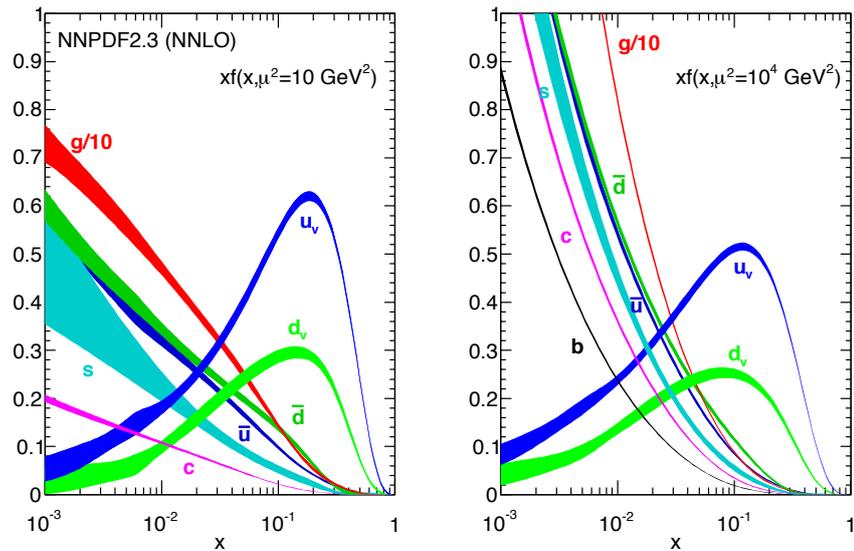


Abb. 7.14 Parton-Verteilungen im Proton.

7.5 Farbe und $SU(3)_C$

Die Quanten-Chromo-Dynamik (QCD) basiert auf der Symmetriegruppe $SU(3)$, also der unitären Transformationen in drei Dimensionen mit $\det(U) = +1$.

Man betrachtet Quarks mit gleichen Massen aber verschiedenen Farben r =rot, g =grün, b =blau, und führt diese Zustände als Basisvektoren im 3-dim Raum der Farb-Zustände ein.

$$\psi_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Wechselwirkung soll invariant unter Rotationen im Farb-Raum sein, so dass die Farben insgesamt erhalten sind. Postuliert man, dass diese Symmetrie auch lokal gelten soll, so kann man die Rotationen darstellen als unitäre Transformationen, die sowohl die Komponenten $\psi_{r,b,g}$ verändern als auch deren Phasen.

$$\psi \rightarrow \psi' = U\psi.$$

Hier ist U eine 3 x 3 Matrix im Farbraum, mit $U^\dagger U = 1$, so dass man U schreiben kann als

$$\psi' = e^{ig_s \alpha_a(x) T_a} \psi.$$

- g_s ist eine reelle Konstante, die starke Kopplungskonstante.
- Die reellen Funktionen $\alpha_a(x)$ sollen von Ort und Zeit abhängen, d.h. wie bei der QED fordern wir, dass die Symmetrie lokal gültig sein soll.
- Die Größen T_a sind linear unabhängige hermitesche 3×3 Matrizen im Farbraum, die man die Generatoren der $SU(3)_C$ nennt (Index C für "Colour"). Die T_a müssen so gewählt werden, dass mit $\alpha_a T_a$ (Summation über a) jede beliebige Rotation beschrieben werden kann.

Für eine solche 3×3 Matrix benötigt man im Allgemeinen 9 reelle Zahlen. Wegen der Bedingung $\det U = +1$ folgt jedoch, dass es für die $SU(3)$ nur 8 linear unabhängige T_a gibt. Daraus folgt auch die Existenz von 8 verschiedenen Gluonen¹⁰. Aus der Unitarität $U^\dagger = U^{-1}$ folgt $\alpha_a T_a = \alpha_a^* T_a^\dagger$. Eine mögliche Darstellung der Generatoren

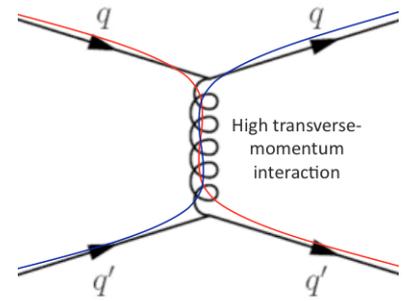


Abb. 7.15

Quark-Quark Streuung mit Farbfluss (Skands, hep-ph 1207.2389v1).

¹⁰Allgemein hat eine $SU(N)$ Gruppe demnach $N^2 - 1$ Generatoren und die entsprechende Eichtheorie $N^2 - 1$ unterschiedliche Eichbosonen.

$T_a = \lambda_a/2$ sind die sogenannten λ Matrizen,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Gluonen trage selber Farbe und Anti-Farbe und es gibt daher 3-er und 4-er Vertizes mit Gluonen. Diese Selbstwechselwirkung der Gluonen ist verantwortlich für

- die große Anzahl von Feynman-Diagrammen für QCD-Prozesse,
- den Anstieg der (renormierten) Kopplung bei großen Abständen zwischen Farbladungen. Dies ist auch der Grund für das Confinement zwischen den Quarks und Gluonen, also der Beobachtung, dass es keine freien Farb-Ladungen sondern nur freie Farb-Singletts gibt.

Ähnlich wie in der $SU(2)$ lassen sich aus den λ -Matrizen Linearkombinationen bilden, die einen bestimmten Farbzustand in einen anderen transformieren. Z.B. ist

$$T_+ \psi_b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \psi_r \quad (7.8)$$

Das zu T_+ gehörige Gluon mit den Farben $b\bar{r}$ vermittelt also eine Wechselwirkung der Form $\psi_b \rightarrow \psi_r + g_{b\bar{r}}$. Man findet

$$T_{\pm} = \frac{1}{2}(\lambda_1 \pm i\lambda_2) \quad b\bar{r}, r\bar{b} \quad (7.9)$$

$$U_{\pm} = \frac{1}{2}(\lambda_4 \pm i\lambda_5) \quad g\bar{r}, r\bar{g} \quad (7.10)$$

$$V_{\pm} = \frac{1}{2}(\lambda_6 \pm i\lambda_7) \quad b\bar{g}, g\bar{b} \quad (7.11)$$

$$\lambda_3 \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{r} - b\bar{b}) \quad (7.12)$$

$$\lambda_8 \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(r\bar{r} + b\bar{b} - 2g\bar{g}) \quad (7.13)$$

Ein farbneutrales Meson ist ein Quark-Antiquark-System mit der Farbwellenfunktion

$$r\bar{r} + b\bar{b} + g\bar{g} \quad (7.14)$$

Dieser farbneutrale Zustand ändert sich nicht, wenn man ihn um eine der Achsen rotiert und damit z.B. die Ersetzung $r \rightarrow b$, $b \rightarrow -r$ vornimmt.

8 Kerne

8.1 Untersuchungsmethoden zur Kernphysik

Die Eigenschaften der Kerne lassen sich u.a. bestimmen durch:

- elastische Streuexperimente (Rutherford-Streuung) mit Protonen, leichten Kernen, Elektronen,
- Anregung der Kerne mit γ , Neutronen, Elektronen, u.a.
- inelastische Stöße,
- Erzeugung neuer Kerne durch Fusion leichterer Kerne an Beschleunigern
- Messung der Zerfallsprodukte instabiler Kerne in $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ Zerfällen
- Untersuchung des Quark-Gluon-Plasma

Die Massen der Kerne können zudem in Massenspektrometern mit Spurkammern vermessen werden. Hinzu kommt die Messung der Spins der Kerne.

8.2 Eigenschaften der Kerne

8.2.1 Ausdehnung des Kerne

Wie bereits in Abschnitt 2.4.2 beschrieben, kann man aus der Rutherford-Streuung die geometrische Gestalt der Kerne bestimmen:

- Bei Streuwinkeln nahe 180° (Rückstreuung) lässt sich der Kernradius bestimmen, indem die Energie so lange erhöht wird, bis sich eine Abweichung vom Rutherford-Wirkungsquerschnitt ergibt. Dies ist der Fall für

$$E_{kin} = V(r_0) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2}{r_0} = \frac{200 \text{ MeV fm}}{r_0} \quad (8.1)$$

$=\alpha_{em}$

Für das Beispiel α -Gold ($Z_\alpha = 2, Z_{Au} = 79$) wird eine Abweichung beobachtet bei $\approx 25 \text{ MeV}$, was einem Kernradius von $\approx 8 \text{ fm}$ entspricht, also ca. ein Faktor 1000 kleiner als ein typischer Atomradius.

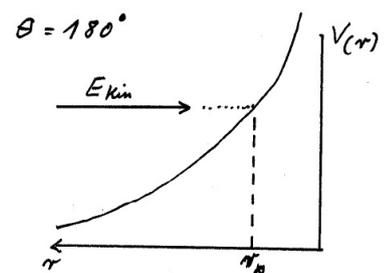
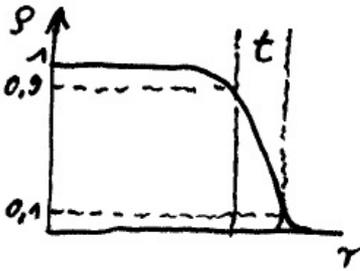


Abb. 8.1
Bestimmung der Kernradien bei α -Kern-Streuung.

- Die Formfaktoren, d.h. die Abweichung vom Rutherford- oder Mott-Wirkungsquerschnitt sind die Fourier-Transformierten der Ladungsverteilungen als Funktion des Abstands vom Kernzentrum, siehe Abschnitt 2.4.2,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega}\Big|_{Mott} \cdot |F(Q^2)|^2 \quad (8.2)$$



Die Form der Ladungsverteilungen der Kerne (vgl. Abbildung 2.12) kann approximiert werden durch die *Saxon-Woods Verteilung*

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{(r-R_{1/2})/t}} \quad (8.3)$$

Für die Dicke des Randbereichs t und den Radius $R_{1/2}$, definiert als Abstand bei halber Ladungsdichte, findet man experimentell

$$t = 4d \cdot \ln 3 = 2,4 \text{ fm} \quad R_{1/2} = 1,2 \text{ fm} \cdot A^{1/3} \quad (8.4)$$

Die Massendichte der Kerne ist damit extrem groß,

$$\rho \approx 0,18 \text{ Nukleonen/fm}^3 \approx 2 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3 \quad (8.5)$$

Eine konstante Dichte über weite Bereiche der Kerne und der Zusammenhang

$$R_{1/2} \sim A^{1/3} \quad (8.6)$$

sind zu erwarten, wenn Kerne dichte Packungen von Nukleonen sind, d.h. wenn die Nukleonen p, n ausgedehnt und nicht oder kaum kompressibel sind.

8.2.2 Massen und Bindungsenergien der Kerne

Als Notation für die Kerne des chemischen Elements X wird verwendet

$$A = \text{Massenzahl} = Z + N \quad (8.7)$$

$${}^A_Z X_N \quad \text{mit} \quad Z = \text{Kernladung} = \text{Anzahl der Protonen} \quad (8.8)$$

$$N = \text{Anzahl der Neutronen} \quad (8.9)$$

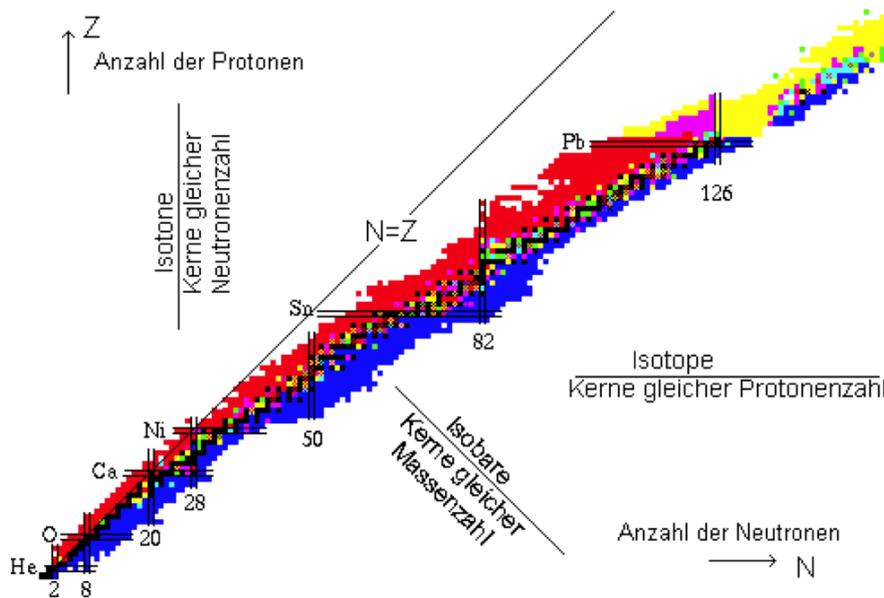


Abb. 8.3 Karte der Nuklide als Funktion der Anzahl der Neutronen und Protonen.

Zu erklären ist

- warum $Z \approx N$ für leichte Elemente,
- warum $Z < N$ für schwere Elemente,
- warum es nur einen schmalen Bereich mit stabilen Kernen gibt.

Die Massen der Nukleonen und Elektronen sind

$$\begin{aligned} \text{Proton} \quad m_p &= 938,272 \text{ MeV} \\ \text{Neutron} \quad m_n &= 939,565 \text{ MeV} \\ \text{Elektron} \quad m_e &= 0,551 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Zur Definition der atomaren Masseneinheit wird ein bestimmtes Isotop des Kohlenstoffs verwendet:

$$1u = \frac{1}{12} \text{Masse}({}^{12}_6\text{C}_6) = 931,494 \text{ MeV} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{kg} \quad (8.10)$$

Die Messung von Massen der Atome durch Massenspektrometer ist sehr genau, so dass dadurch auf die Bindungsenergie der Kerne geschlossen werden kann. Die Atommasse ist gegeben durch

$$M_A = \text{Atommasse} \hat{=} \underbrace{\text{Kern} + \text{Elektronen} + \text{Bindungsenergien}}_{\text{ganzes Atom}} \quad (8.11)$$

Die Bindungsenergie der Elektronen in der Hülle ist vernachlässigbar klein. Daher ist die Bindungsenergie des Kerns

$$E_B = M_K - Z \cdot M_p - N \cdot M_n \quad (8.12)$$

Die Bindungsenergie entspricht also gerade der Massendifferenz zur gleichen Anzahl Protonen und Neutronen. Genaue Messungen können erreicht werden durch die Messung von Atommassen,

$$E_B = M_A - Z \cdot M_H - N \cdot M_n \quad (8.13)$$

Isotope: gleiche Z , gleiche Elemente

Isobare: gleiches A

Isotone: gleiches N

Isomere: metastabile Kerne

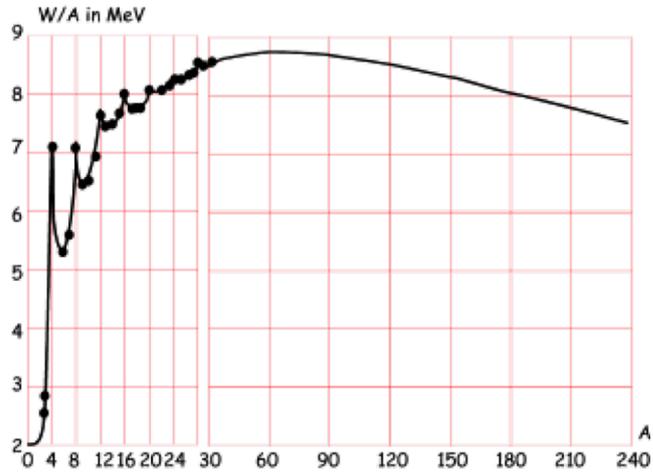


Abb. 8.4 Bindungsenergie je Nukleon als Funktion der Massenzahl.

Man findet:

1. Die typische Bindungsenergie je Nukleon ist ca. $E_B/A \approx 8 \text{ MeV}$.
2. E_B/A wird \approx konstant für große A . Dies entspricht einer kurzreichweitigen Wechselwirkung nur mit nächsten Nachbarn.
3. Es gibt Maxima bei bestimmten A : He, Be, ...
Helium ist besonders stabil, $E_B(\text{He}) = 29 \text{ MeV}$. Dies deutet auf quantisierte Energieniveaus hin.
4. Die stabilsten Kerne liegen bei $A \approx 56$: Eisen. Dies erlaubt Energie-Gewinnung durch Kernfusion oder Kernspaltung.

8.3 Kernmodelle

Da es keine Kenntnis über die exakte Form der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung gibt, sind eine Reihe semiklassischer Modelle entwickelt worden, unter anderem:

- Fermi-Gas Modell (analog zu Elektronen im Metall)
- Tröpfchen-Modell
- Schalen-Modell

8.3.1 Tröpfchen-Modell der Kerne

Die kleine Reichweite der Kräfte im Kern erlaubt eine Analogie zu den Van-der-Waals Kräften in Flüssigkeiten. C. F. v. Weizsäcker hat daraus folgend eine Parametrisierung der Bindungsenergien und Kernmassen entwickelt (1935),

Volumenenergie: WW mit direkten Nachbarn: $\sim A \sim V$

$$E_1 = c_1 \cdot A \qquad c_1 = -15,84 \text{ MeV}$$

Oberflächenenergie: an Oberfläche weniger Nachbarn

Oberflächenspannung $\sim R^2 \sim A^{2/3}$
 $E_2 = c_2 A^{2/3}$ $c_2 = +18,33 MeV$

Coulomb-Energie nur für Protonen, große Reichweite

$V(r) \sim \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}$ WW mit anderen Protonen
 $E_3 = c_3 \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}$ $c_3 = 0,714 MeV$

Asymmetrie-Energie: n-p Gleichgewicht durch Gleichgewicht des Fermi-Niveaus von n, p

$E_{kin(n+p)} \sim N E_F^n + Z \cdot E_F^p \sim N \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} + Z \left(\frac{Z}{V}\right)^{2/3}$

E_{kin} ist minimal für $Z = N$ ← Stabilität

erste Näherung: $E_{kin} \sim (N - Z)^2$

$E_4 = c_4 \frac{(N-Z)^2}{4A}$ $c_4 = 92,8 MeV$

Paarerzeugungungsenergie: jedes Niveau kann durch 2p oder 2n besetzt werden, ungerade Anzahlen sind ungünstig

$$E_5 = \begin{cases} -c_5/\sqrt{A} \\ 0 \\ +c_5/\sqrt{A} \end{cases} \text{ für } \begin{cases} (g,g) & \text{Kerne} \\ (g,u) \text{ und } (u,g) & \text{Kerne} \\ (u,u) & \text{Kerne} \end{cases}$$

$(g,u) \hat{=} (\text{gerade } \#p, \text{ ungerade } \#n)$

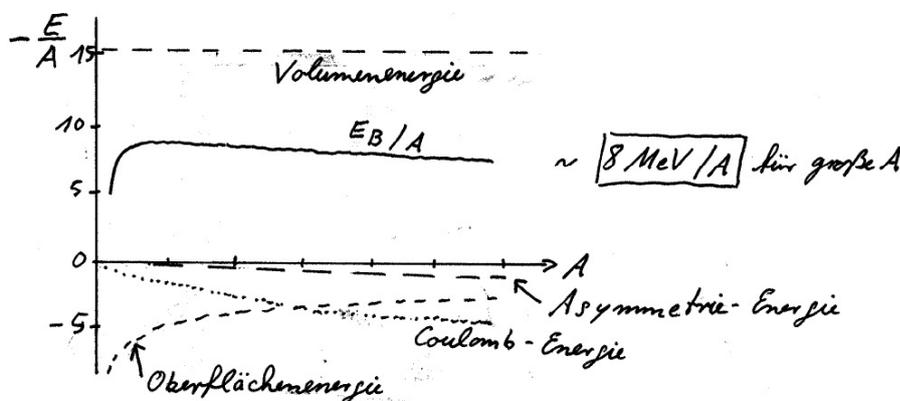


Abb. 8.5 Beiträge zur Bindungsenergie im Tröpfchenmodell.

Die gesamte Bindungsenergie nach Weizsäcker ist damit

$$E_B = \underbrace{c_1 A}_{\text{bindend}} + \underbrace{c_2 A^{2/3} + c_3 \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} + c_4 \frac{(N-Z)^2}{4A}}_{\text{anti-bindend}} + E_5 \quad (8.14)$$

Im allgemeinen ergibt sich eine gute Beschreibung der Bindungsenergien E_B der Kerne. Es gibt jedoch Kerne mit besonders großer E_B für

$Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82$ (8.15)

$N = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$ (8.16)

Magische Zahlen

In Analogie mit der Atomphysik lassen sich besonders stabile Systeme als abgeschlossene Schalen verstehen. Edelgase sind besonders stabil für

$$Z = 2, 10, 18, 36, 54, 86 \quad \text{Anzahl der Elektronen} \quad (8.17)$$

Dies sind nicht die Zahlen in der Kernphysik, da sich die Potentiale unterscheiden.

8.3.2 Fermi-Gas-Modell der Kerne

Es wird angenommen, dass Kerne als Fermi-Gase aus unabhängigen Fermionen, Neutronen und Protonen, beschrieben werden können. Da Kerne Vielteilchen-Systeme sind, können keine exakten Lösungen berechnet werden. Daher wird für jedes Fermion die Summe der Wechselwirkungen mit den anderen Fermionen durch einen Potentialtopf genähert,

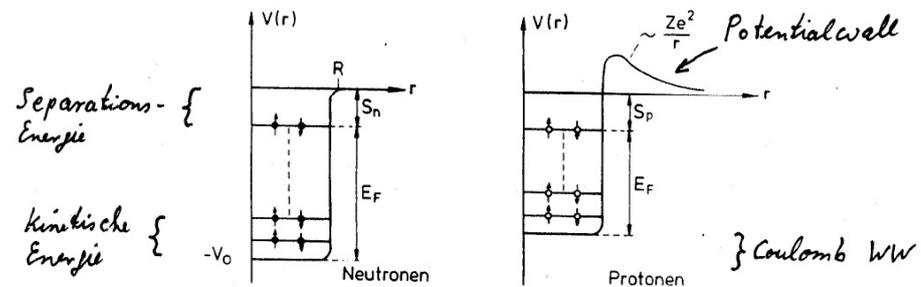


Abb. 8.6 Potentialtöpfe für einzelne Neutronen (links) und Protonen (rechts).

- Pauli-Prinzip: 2 Neutronen (Protonen) je Energieniveau.
- Protonen: Die Coulomb-WW im Kern reduziert die Tiefe des Potentialtopfs. Außerdem ergibt sich ein Potentialwall außerhalb des Kerns.
- Der flache Boden des Potentialtopfes bedeutet, dass innerhalb des Kerns freie Nukleonen vorliegen.
- Die Potentialtiefe $V_0 \approx -40 \text{ MeV}$ ist unabhängig von A (Kerngröße) und damit der Anzahl der Nukleonen (hier Neutronen).
- Die Coulomb-Abstoßung erklärt den Neutronen-Überschuss im Kern. Gleiche Fermi-Energien $E_{F,Proton} \approx E_{F,Neutron}$ sind energetisch am günstigsten. Ansonsten erlaubt es der β -Zerfall $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ oder $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$, einen energetisch günstigeren Zustand zu erreichen.

8.3.3 Schalenmodell

Betrachtet werden Fermi-Gase im Woods-Saxon Potential. Da die Reichweite der Kernkraft klein ist, sollte das Potential dem Verlauf

der Ladungsdichte $\rho(r)$ folgen. Zusätzlich nimmt man eine Spin-Bahn-WW der Nukleonen an, wie in der Atomphysik,

$$V_{ls} = V_{ls}^0 \cdot (\vec{l} \cdot \vec{s})$$

Dieser Effekt ist in der Kernphysik deutlich stärker als in der Hülle, und ähnlich groß wie der Niveau-Abstand. Die Lösung der Schrödinger-Gleichung mit $V = V(r) + V_{ls}$ liefert eine Erklärung der magischen Zahlen als gefüllte Niveaus mit großem Abstand zum nächsten Niveau. Dieses Modell erklärt auch die Kernspins sowie die magnetischen Momente. Es kann zusätzlich verfeinert werden durch Kopplung zwischen Paaren von Nukleonen.

8.4 Kernzerfälle

Kernzerfälle sind spontane Umwandlungen, die normalerweise ohne äußeren Einfluß ablaufen und auch nicht beeinflusst werden können. Sie folgen wie die Zerfälle elementarer Teilchen dem Zerfallsgesetz

$$dN = -N \cdot \lambda \cdot dt \quad \Rightarrow \quad N = N_0 e^{-t/\tau} \quad (8.18)$$

mit der Lebensdauer $\tau \equiv 1/\lambda$. Die Aktivität eines Stoffes ist die Anzahl der Zerfälle pro Zeit,

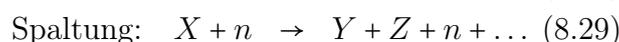
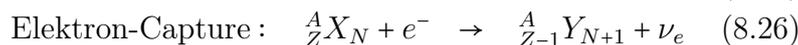
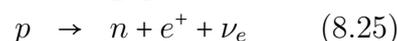
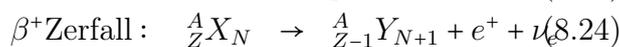
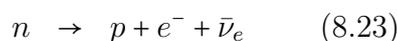
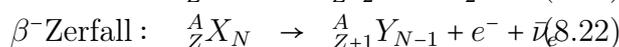
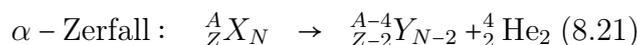
$$R = \lambda \cdot N = \frac{\#\text{Zerfälle}}{\text{Zeit}} \quad (8.19)$$

Die Aktivität wird in der Einheit Becquerel gemessen

$$1\text{Bq} = \frac{1\text{Zerfall}}{\text{s}} \quad (8.20)$$

Veraltet ist die Einheit 1 Curie = $3,70 \cdot 10^{10}$ Bq.

Kernzerfälle treten in folgenden Formen auf:



8.4.1 α -Zerfall der Kerne

Für schwere Kerne ist die Kernladungszahl sehr groß, so dass sie aufgrund der Coulomb-WW instabil werden. Energetisch günstiger ist dann die Abgabe von zwei p und zwei n . Im Kern bildet sich ein

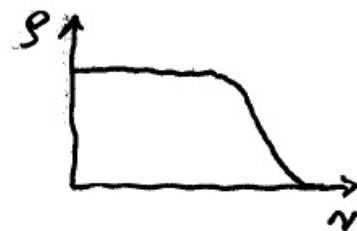


Abb. 8.7
Ladungsverteilung.

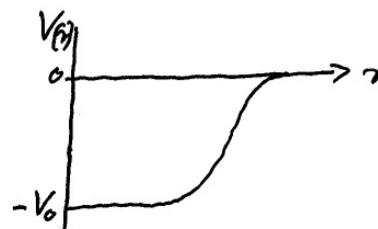


Abb. 8.8
Potential.

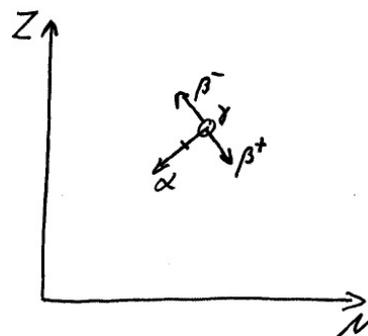


Abb. 8.9
Änderung von N und Z durch verschiedene Zerfälle.

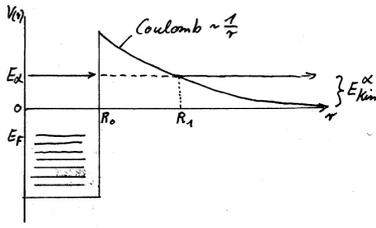


Abb. 8.10
Tunneleffekt beim α -Zerfall.

α -Teilchen, denn Helium hat eine besonders große Bindungsenergie. Klassisch ist der α -Zerfall verboten. Quantenmechanisch kann das α -Teilchen durch den Coulomb-Wall tunneln, wenn der sogenannte Q-Wert, d.h. die gesamte freiwerdende kinetische Energie der Reaktion $X \rightarrow Y + \alpha$, positiv ist

$$Q = (m_X - m_Y - m_\alpha) = E_{kin,Y} + E_{kin,\alpha} \quad (8.30)$$

Im CMS System ist $\vec{P}_\alpha = -\vec{P}_Y$ und damit

$$\frac{E_{kin,\alpha}}{E_{kin,Y}} \approx \frac{p_\alpha^2}{m_\alpha} \cdot \frac{m_Y}{p_Y^2} = \frac{m_Y}{m_\alpha} \Rightarrow E_{kin,\alpha} = \frac{Q}{1 + \frac{m_\alpha}{m_Y}} \quad (8.31)$$

Für schwere Kerne ist allgemein $Q \ll m_\alpha, m_Y$, so dass $E_{kin,Y}$ fast vernachlässigt werden kann. In jedem Fall ergibt sich aufgrund des 2-Körperzerfalls eine scharfe α -Energie.

Beim Tunneleffekt entspricht die Transmission T der |Amplitude|² der auslaufenden Welle und die Zerfallskonstante ist

$$\lambda \sim T \quad (8.32)$$

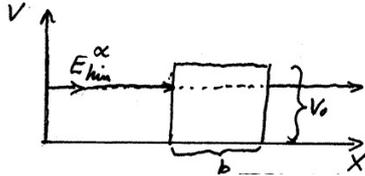


Abb. 8.11
Tunneleffekt bei einem Kastenpotential.

Für einen Tunnelprozess durch ein Kastenpotential ergibt sich für die einlaufende ebene Welle eine exponentielle Abnahme im verbotenen Bereich

$$T \sim e^{-2b\sqrt{2m_\alpha(V-E^\alpha)}/\hbar^2} \quad (8.33)$$

Für das Coulomb-Potential lässt sich der *Gamov-Faktor*

$$T \sim e^{-G} \quad G = \text{Gamov-Faktor} \quad (8.34)$$

berechnen durch ein Integral über den Potentialwall ($E_{kin}^\alpha = V(R_1)$),

$$G = +\frac{2}{\hbar} \int_{R_0}^{R_1} \sqrt{2m_\alpha(V(r) - E_{kin}^\alpha)/\hbar^2} dr \quad (8.35)$$

$$= \frac{2}{\hbar} \sqrt{\frac{4m_\alpha Z e^2}{4\pi\epsilon_0}} R_1 \left(\arccos \sqrt{\frac{R_0}{R_1}} - \sqrt{\frac{R_0}{R_1} - \frac{R_0^2}{R_1^2}} \right) \quad (8.36)$$

Mit

$$\frac{V_{max}}{V(R_1)} = \frac{R_1}{R_0} \gg 1 \quad (8.37)$$

für schwere Kerne folgt

$$G \approx \frac{2}{\hbar} \cdot \frac{2 \cdot Z \cdot e^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2m_\alpha}{E_{kin}^\alpha}} - 2\sqrt{\frac{2m_\alpha}{V_{max}}} \right), \quad (8.38)$$

Für kleine V_{max} folgt

$$\lambda \sim e^{\text{const}/\sqrt{E_{kin}^\alpha}} \quad (8.39)$$

Dies entspricht der empirisch gefundenen Geiger-Nuttall Regel, aufgrund der die Reichweite (und damit $E_{kin,\alpha}$) in einer Nebelkammer mit der Zerfallskonstanten (oder Lebensdauer) eines Isotops verknüpft ist.

$$\ln \lambda = -a_1 \frac{Z}{\sqrt{E_{kin,\alpha}}} + a_2 \quad (8.40)$$

Die bei einem α -Zerfall frei werdene Energie lässt sich in sog. Termschemata darstellen.

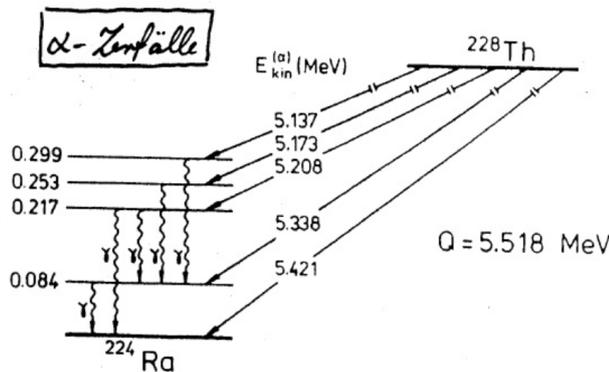


Abb. 8.15 Termschema für Thorium-Zerfälle in angeregte Niveaus des Radiums mit anschließenden γ -Zerfällen.

8.4.2 β -Zerfälle der Kerne

Der freie β^- -Zerfall eines Neutrons

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad \text{Lebensdauer } \tau_n = 887\text{s} \quad (8.41)$$

ist ein 3-Körperzerfall und zeigt daher kein monochromatisches sondern ein kontinuierliches Energiespektrum der e^- . Historisch hat die Entdeckung des kontinuierlichen Energiespektrums zum Postulat der Existenz von Neutrinos (Pauli 1930) und später zur Entdeckung der Neutrinos in der Reaktion $\bar{\nu}_e p \rightarrow e^+ + n$ (und $e^+ + e^- \rightarrow \gamma\gamma$) geführt (Cowan 1953). Der Wirkungsquerschnitt von Neutrinos im MeV Bereich ist mit $\sigma \approx 10^{-43}\text{m}^2$ so klein, dass der Nachweis einzelner Neutrinos nicht möglich ist. Da auch der Rückstoß auf den Kern zu klein für einen Nachweis ist, kann nur das e^+ benutzt werden, um den Prozess zu verstehen.

Der β^- Zerfall ist energetisch erlaubt für $Q > 0$. Für den Prozess

$$\begin{aligned} {}^A_Z X_N &\rightarrow {}^A_{Z+1} Y_{N-1} + e^- + \bar{\nu}_e \quad (8.42) \\ M_{A,Z} - Zm_e &= M_{A,Z+1} - (Z+1)m_e + m_e + m_\nu + \sum_{Y,e,\nu} E_{kin} \end{aligned}$$

ist daher

$$Q_{\beta^-} = M_{A,Z} - M_{A,Z+1} \quad (8.43)$$

Analog gilt für den β^+ -Zerfall

$$\begin{aligned} {}^A_Z X_N &\rightarrow {}^A_{Z-1} Y_{N+1} + e^+ + \nu_e \quad (8.44) \\ M_{A,Z} - Zm_e &= M_{A,Z-1} - (Z-1)m_e + m_e + m_\nu + \sum_{Y,e,\nu} E_{kin} \end{aligned}$$

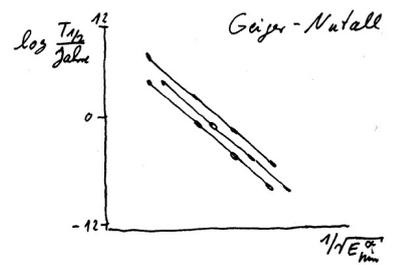


Abb. 8.13

Beziehung zwischen Lebensdauer und Energie der α -Teilchen für verschiedene Zerfallsketten.

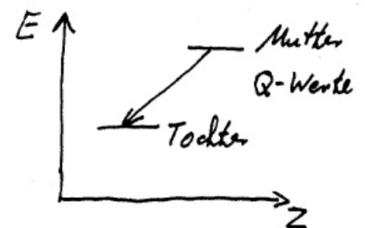


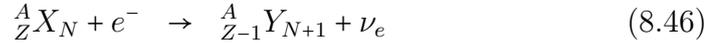
Abb. 8.14

Prinzip des Termschemas für einen α -Zerfall.

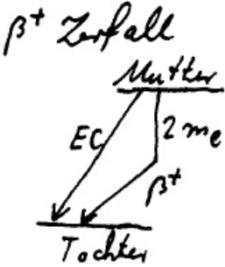
und daher

$$Q_{\beta^+} = M_{A,Z} - M_{A,Z-1} - 2m_e \quad (8.45)$$

Unter *Electron-Capture* (EC) versteht man den Einfang eines Elektrons aus der Hülle durch den Kern mit der anschließenden Umwandlung



$$M_{A,Z} - Zm_e + m_e + |E_B^e| = M_{A,Z-1} - (Z-1)m_e + m_\nu + \sum_{Y,\nu} E_{kin}$$



und daher

$$Q_{EC} = M_{A,Z} - M_{A,Z-1} - |E_B^e| \quad (8.47)$$

Der Einfang des e^- erfolgt dominant aus der K -Schale, da die Aufenthaltswahrscheinlichkeit $\Psi\Psi^*$ der Elektronen am Ort des Kerns $r \approx 0$ größer Null ist. Dieser Prozess kann durch zwei verschiedene Prozesse nachgewiesen werden.

Abb. 8.16 Prinzip des Termschemas für β^+ -Zerfall.

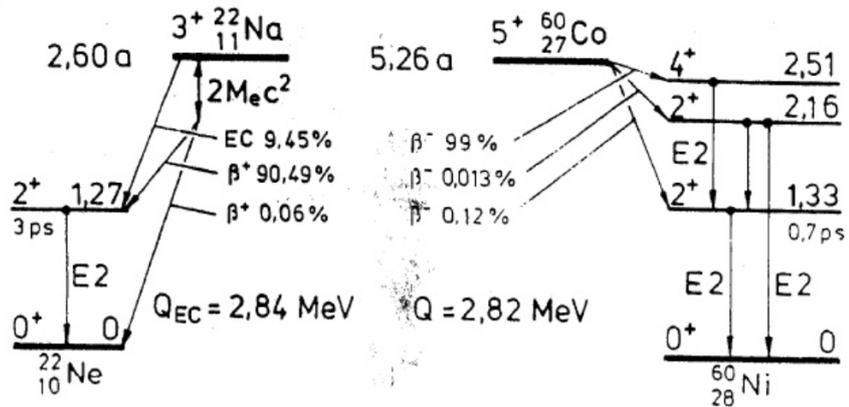


Abb. 8.17 Beispiel für Termschemata für EC und β^+ Zerfall (links) und für β^- Zerfall (rechts).

- Sehr schnell erfolgt ein Sprung von Elektronen aus einer höheren Schale in die K -Schale. Die dabei frei werdende Energie wird in Form von γ -Quanten frei (Röntgen-Fluoreszenz).
- Die frei werdende Energie wird auf ein anderes Elektron in einer höheren Schale übertragen, und dieses Elektron kann als freies Elektron nachgewiesen werden (Auger-Elektronen).

Bei allen β -Zerfällen bleibt die Massenzahl unverändert, $A = const.$ Den Effekt der β -Zerfälle sieht man daher am besten an einem Isobarenschnitt.

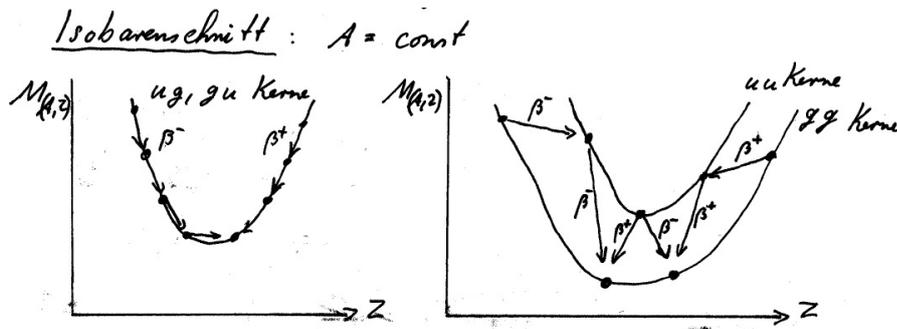


Abb. 8.18 Atommassen für einen Isobarenschnitt für (links) ug und gu Kerne sowie für (rechts) uu und gg Kerne.

Die stabilsten Kerne entlang eines Isobarenschnitts entsprechen den Kernen mit der kleinsten Atommasse (maximale Bindungsenergie). Es zeigt sich daher ein *Tal der Stabilität*.

- Bei ug und gu Kernen gibt es jeweils nur einen stabilen Kern im Minimum der Atommasse.
- uu -Kerne sind energetisch ungünstiger als gg -Kerne mit gleichem A . Es gibt daher keine stabilen uu -Kerne, aber häufig mehrere stabile gg -Kerne.

Insgesamt ergeben sich für die schwersten Kerne Abfolgen von α und (zumeist) β^- Zerfällen, die dem Tal der Stabilität folgen, bis ein stabiler Kern erreicht ist.

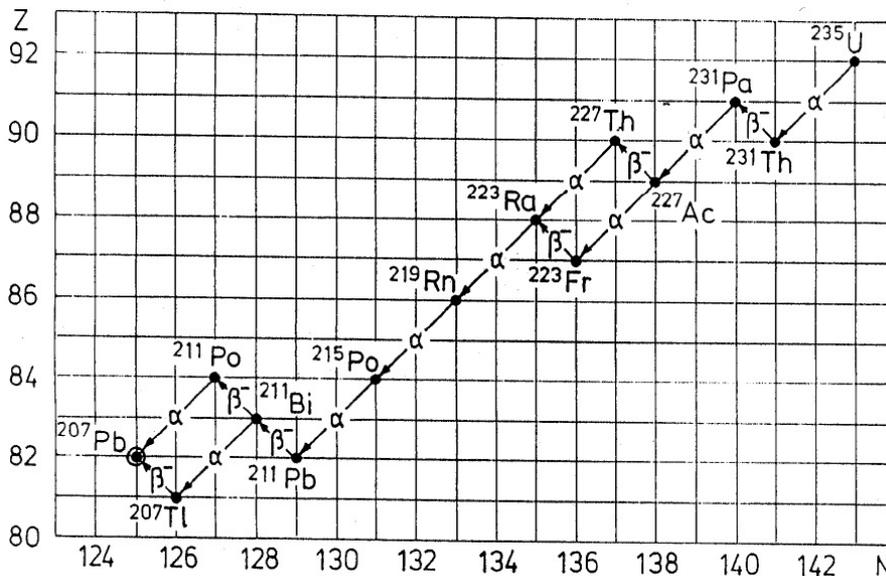


Abb. 8.19 Beispiel einer Zerfallskette (^{235}U) durch nacheinander ablaufende α und β^- Zerfälle bis zum Blei.

Die Lebensdauer aufgrund des β -Zerfalls lässt sich durch Fermi's goldene Regel ausrechnen (Gl. 2.8),

$$\lambda = 2\pi |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rho(E) \quad (8.48)$$

Der Phasenraumfaktor $\rho(E)$ wird, unter Berücksichtigung der Energieerhaltung ($\delta(E_f - E_i)$), ein Integral über alle möglichen Impulse des Elektrons und des Neutrinos im Endzustand beinhalten.

$$\rho(E) = \int \delta(E_f - E_i) df \quad (8.49)$$

Vernachlässigt man den Rückstoß auf den Kern so ist

$$df = \frac{V^2}{\hbar^2} d\vec{p}_e d\vec{p}_\nu \quad (8.50)$$

und

$$\rho = \int \delta(E_0 - E_{kin}^e - E_{kin}^\nu) p_e^2 E_\nu^2 dp_e dE_\nu \quad (8.51)$$

Nimmt man nun an, dass das Matrixelement kaum von den genauen Impulsen im Endzustand abhängt und berücksichtigt zusätzlich eine Korrektur durch die Coulomb-WW zwischen Kern und Elektron (Fermifunktion $F(Z, E_{kin}^e)$), so ist

$$\frac{dN}{dp_e} = c \cdot |V_{fi}|^2 F(Z, E_{kin}^e) (E_0 - E_{kin}^e) p_e^2 \quad (8.52)$$

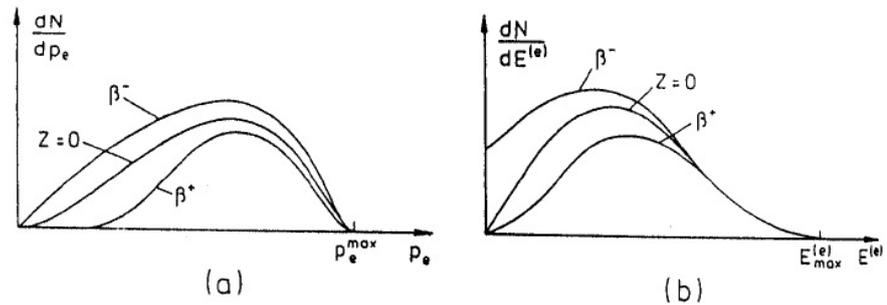


Fig. 8.61: β^+ - und β^- -Spektren ohne und mit Korrektur durch die Fermi-Funktion $F(Z, E^{(e)})$. a) Impulsverteilung, b) Verteilung der kinetischen Energie.

Abb. 8.20 Impulsverteilung (links) und Energieverteilung (rechts) der Elektronen im β -Zerfall. Aufgrund der Fermi-Funktion ergibt sich eine im Mittel höhere Energie der β^+ im Vergleich zu β^- .

Im sogenannten *Curie-Diagramm* lässt sich bei hohen β -Energien besonders gut der Effekt einer möglichen Neutrino-Masse ablesen, denn dieser führt zu einem kleineren Wert der maximalen Elektron-Energie. Speziell aus dem Tritium-Zerfall (${}^3_1\text{H}_2$) folgt daraus die bisher beste direkte Grenze für eine Neutrino-Masse,

$$m_{\nu_e} < 1,4 \text{ eV} \quad (8.53)$$

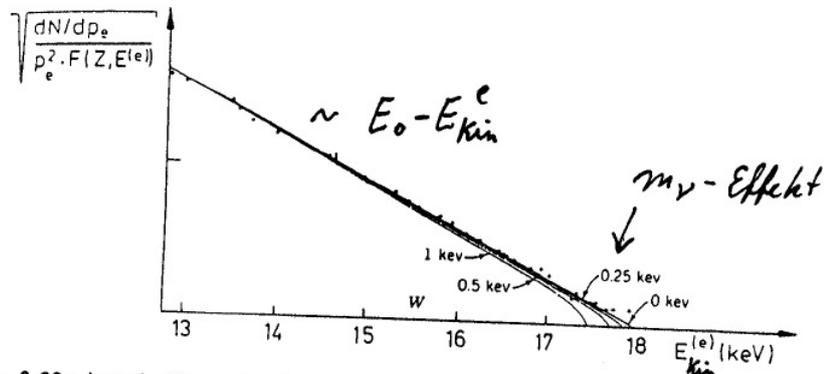


Fig. 8.62: Ausschnitt aus dem Curie-Diagramm des β^- -Zerfalls des Tritiums mit angenommenen Werten für M_ν zwischen 0 und 1 keV. Aus L. M. Langer, R. J. D. Moffat, *Phys. Rev.* 88(1952)689.

Abb. 8.21 Curie-Diagramm. Bei hohen Energien ist die Verteilung linear bis auf Effekte durch die Neutrino-Masse.

8.4.3 γ -Zerfälle und innere Konversion

8.5 Anwendungen der Kernphysik

9 Kosmologie und Physik jenseits des Standard-Modells

9.1 Grenzen des Standard-Modells

Das bis hierher beschriebene Standard-Modell der Teilchenphysik liefert eine erstaunlich erfolgreiche Beschreibung fast aller in Laborexperimenten beobachteten Phänomene in der Natur. Dies ist sicher eine herausragende Errungenschaft der Naturwissenschaften insgesamt. Darüber hinaus zählen zu seinen Erfolgen aber auch eine ganze Reihe von echten Vorhersagen, insbesondere die Vorhersagen fundamentaler Quanten (c, ν_τ, t, W, Z, H), die Vorhersage der Massen von W und Z sowie die Vorhersage der Higgs-Kopplungen durch die Massen der an das Higgs koppelnden Teilchen.

Forderungen an eine fundamentale Theorie	Standard-Modell
<i>Wenige Grundannahmen</i> Kausalität, Raum-Zeit, Quantentheorie	✓
<i>Wenige Naturkonstanten, Teilchen und Kräfte</i> 26 freie Parameter (ohne Gravitation); $e, \mu, \tau, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, u, d, s, c, t, b, W^\pm, Z, \gamma, g, H$, dunkle Materie	nein
<i>Vorhersagekraft</i> $\nu_\tau, t, W, Z, \text{Higgs}$	✓
<i>gültig in allen Prozessen</i> in Laborexperimenten im Kosmos	✓ nein
<i>gültig bei allen Energien: Extrapolierbarkeit</i> $\Lambda \gtrsim 1\text{TeV} \Rightarrow M_{\text{Higgs}} \rightarrow \infty$ Hierarchieproblem $\Lambda \geq 10^{19}\text{GeV} \Rightarrow \text{Quanten-Gravitation}$	nein
<i>Erklärung, warum die Natur so ist, wie sie ist</i>	nein

Tabelle 9.1 Das Standard-Modell im Vergleich zu Erwartungen an eine fundamentale Theorie der Natur.

Zu den größten Problemen des Standard-Modells gehören folgende Beobachtungen:

- Die Ladung des d -Quarks (u -Quarks) muss genau $1/3$ ($-2/3$) der Ladung des Elektrons sein, da sonst einzelne Prozesse eine unendlich hohe Wahrscheinlichkeit haben müssten.

- Um allein die Massen der Fermionen und ihre Mischungen erklären zu können, müssen 20 neue Naturkonstanten eingeführt werden. Ein Verständnis dieser Zahlen gibt es bisher nicht.
- Die Kopplung zwischen Higgs und top-Quark ist so stark, dass die Masse des Higgs-Teilchens hohe Beiträge durch Quantenkorrekturen erhält und daher nicht bei der beobachteten Masse von 125 GeV liegen kann. (Hierarchie-Problem)

Hinzu kommt natürlich an vielen Stellen das Argument, dass das Standard-Modell eine willkürliche Sammlung von Teilchen, Kräften und Quantenzahlen zu sein scheint, für die es keine Erklärungen gibt, siehe Tabelle 9.1.

Weitere Argumente für eine Ergänzung des Standard-Modells der Teilchenphysik stammen aus der beobachtenden Kosmologie, insbesondere die Existenz Dunkler Materie und Dunkler Energie sowie der Asymmetrie zwischen Materie und Antimaterie, siehe unten.

Erweiterungen des Standard-Modells

- Compositeness bezeichnet Modelle, in denen die bekannten Leptonen und Quarks nicht elementar sind, sondern aus anderen Quanten bestehen (Preonen). Da der Radius vor allem der Leptonen sehr klein ist ($< 10^{-19}\text{m}$) und damit entsprechend der Unschärferelation die Impulse der Preonen sehr groß sein müssen, sind kleine Leptonmassen aber nicht sehr plausibel. Eine Ausnahme bildet das top-Quark aufgrund seiner hohen Masse.
- Technicolor bezeichnet Modelle, bei denen das Higgs nicht fundamental ist.
- Grand Unification bezeichnet Modelle, in denen die Leptonen und Quarks gemeinsam in Multipletts angeordnet sind. Dadurch lässt sich die Ladung der Quarks erklären.
- Supersymmetrie bezeichnet Modelle, bei denen eine Spinsymmetrie angenommen wird, d.h. es gibt nicht nur Elektronen mit Spin $1/2$, sondern auch mit Spin 0. Das ist möglich, wenn diese Partnerteilchen deutlich schwerer sind als die bekannten Teilchen.

Die Verbindung von Supersymmetrie und Grand Unification ist die heute meist diskutierte Erweiterung des Standard-Modells und kann vermutlich alle Effekte auch in der Kosmologie erklären.

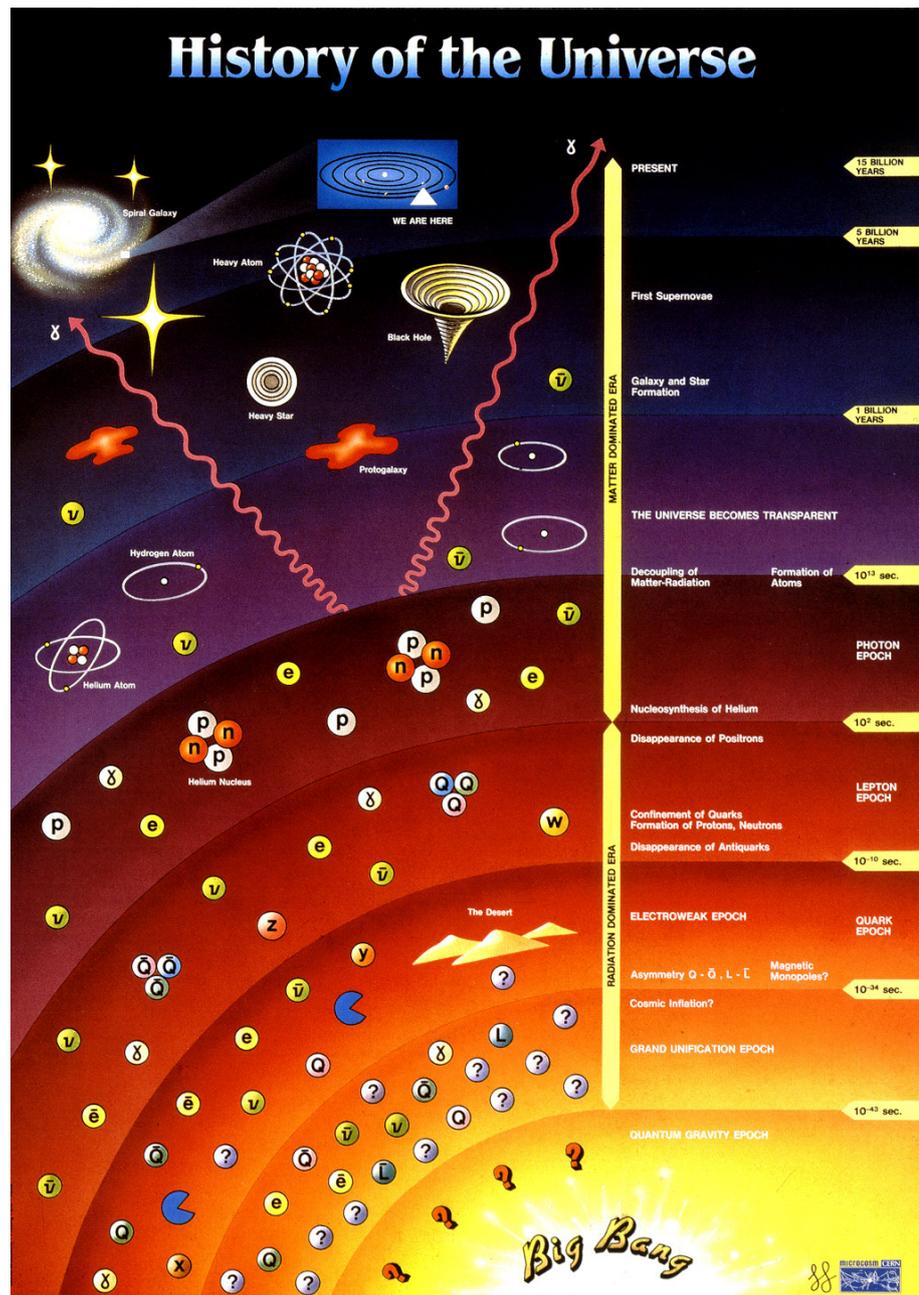


Abb. 9.1 Phasen und Phasenübergänge im frühen Universum

9.2 Phasen und Phasenübergänge im Kosmos

Im Rahmen des Standard-Modells der Kosmologie, des sogenannten Λ CDM Modells, wird die beobachtete Expansion des jetzigen Universums auf einen Urknall vor ca. $13,8 \cdot 10^9$ Jahren zurückgeführt. Seitdem hat es im Universum eine Abfolge von Phasen gegeben, von denen einige in Abb. 9.1 zu sehen sind. Grundlegend ist dabei die Vorstellung, dass bei den hohen Teilchendichten und den hohen Temperaturen im frühen Universum (oder auch im Innern der Sterne) die Natur durch Quantengase bestimmt ist, wobei die jeweils bei einer bestimmten Temperatur vorliegenden Quan-

ten Reaktionen eingehen. Diese Reaktionen sind die gleichen, die in Experimenten der Kernphysik und Teilchenphysik auf der Erde untersucht werden können. Aus diesem Grund sind Kosmologie und Teilchenphysik inzwischen eng verbundene Forschungsgebiete.

Der Zusammenhang zwischen Temperatur und Energie eines einzelnen Freiheitsgrades eines Quants ist einfach

$$E = \frac{1}{2} k_b T \quad (9.1)$$

Daher kann man die Temperatur immer in Einheiten einer Energie ausdrücken und die Boltzman-Konstante k_B in das Planck'sche System der natürlichen Einheiten aufnehmen,

$$\text{SI-System: } k_B = 8,617 \cdot 10^{-5} \frac{\text{eV}}{\text{K}} \quad (9.2)$$

$$\text{natürliche Einheiten: } k_B = 1 \quad (9.3)$$

$$290 \text{ K} = \frac{1}{40} \text{ eV}$$

$$1 \text{ MeV} = 1,16 \cdot 10^{10} \text{ K}$$

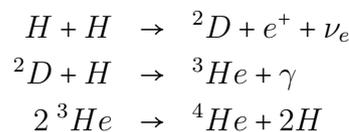
9.3 Kerne im Kosmos

9.3.1 Sterne und die Entstehung der Elemente

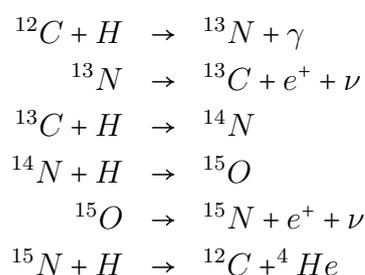
Sterne bestehen zu Anfang in der Regel aus Wasserstoff. Bei der Ballung eines Sterns wird Gravitationsenergie frei und führt zu einer hohen Temperatur (kinetischen Energie der H -Kerne) und zu hohem Druck. Unter diesen Bedingungen können die Protonen der H -Kerne den Coulomb-Wall anderer Protonen durchdringen, so dass eine Fusion der Protonen zunächst zu Deuterium und dann zu Helium möglich wird.

- Die Temperatur im Innern der Sonne ist daher abhängig von der Reichweite der starken WW und der elektrischen Elementarladung.

Diese Zündung der Kernfusion entsteht bei hohen Temperaturen, Wasserstoff-Brennen bei $\approx 10 \cdot 10^6 \text{ K}$

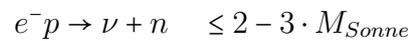


CNO-Zyklus bei $\approx 15 \cdot 10^6 \text{ K}$



Sterne sind relativ stabile Objekte, da in ihnen, zumindest über lange Zeitspannen, ein Gleichgewicht aus Gravitation und Strahlungsdruck herrscht. Danach kollabiert der Stern, die freiwerdende Gravitationsenergie führt zu einem Aufheizen der Hülle, es entsteht ein Roter Riese. Im Zentrum setzt nacheinander He-Brennen, C-Brennen, O, Si \rightarrow Fe ein. Beim Eisen als stabilstem Kern hören die Kernreaktionen auf, der Strahlungsdruck sinkt, und der Kern kollabiert weiter. Die *solaren* Neutrinos aus solchen Reaktionen wurden auf der Erde nachgewiesen.

- Für ($M < 1,4 \cdot M_{\text{Sonne}}$): Es bildet sich ein Elektronen-Fermi-Gas, das wegen des Pauli-Prinzips nicht weiter komprimiert werden kann (weißer Zwergstern).
- Bei höheren Massen kollabiert der Stern bis die Elektronen in die Kerne gedrückt werden und sich dort Protonen in Neutronen umwandeln,



Das Neutronen-Fermi-Gas stoppt den Kollaps und es verbleibt ein Neutronenstern, dessen Dichte ebenso groß ist wie die in einem Kern.

- Bei noch höheren Massen bildet sich ein schwarzes Loch, bei dessen Kollaps die äußere Hülle in einer Explosion abgestoßen wird. Dadurch werden die schweren Elemente bis zum Eisen frei und bei der Explosion bilden sich durch Kollisionen auch noch schwerere Kerne. Dies ist die Hauptquelle der schweren Elemente im Universum. Die bei der Entstehung einer Supernova freiwerdenden Neutrinos wurden 1987 tatsächlich beobachtet.

9.3.2 Big Bang Nukleosynthese

Die Masse der leichten Quarks u, d ist viel kleiner als die Bindungsenergie des Protons oder Neutrons, so dass die Massendifferenz $m_n - m_p$ nur etwa 1 MeV beträgt. Bei hohen Temperaturen, für $t \approx 3\text{min} \dots 20\text{min}$ nach dem Urknall, liegt daher ein thermisches Gleichgewicht zwischen p und n vor, so dass für die Anzahldichten $\#n, \#p$

$$\frac{\#n}{\#p} \approx e^{-\frac{m_n - m_p}{k_b T}} \quad (9.4)$$

gilt. Für $k_b \gg m_n - m_p$ ist daher $\#n \approx \#p$. Für $k_b T \approx 0,8 \text{ MeV}$ ist $\frac{\#n}{\#p} = \frac{1}{6}$. Dieses Verhältnis hat sich durch n -Zerfälle sowie durch Gleichgewichtsprozesse

$$kT \approx 0,1 \text{ MeV} \quad p + n \leftrightarrow d + \gamma \quad (9.5)$$

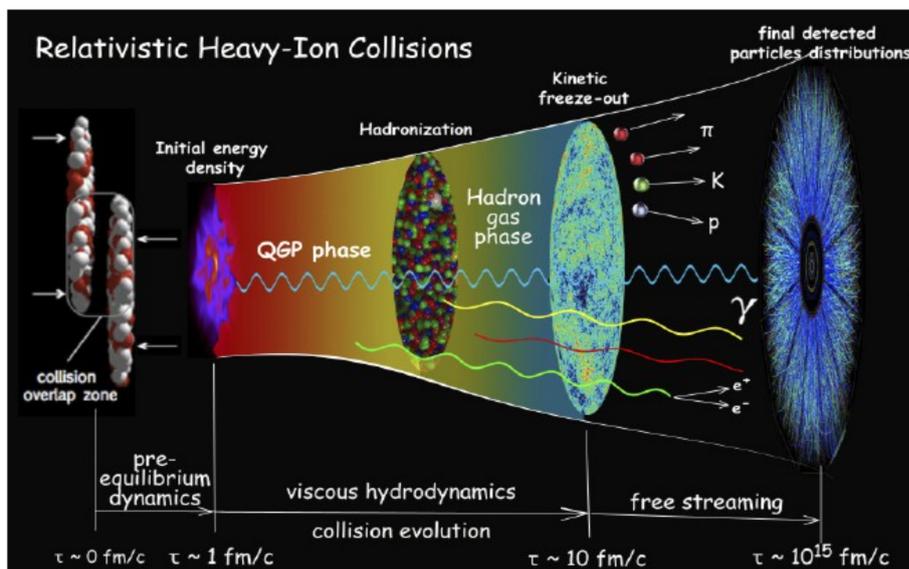
auf $\frac{\#n}{\#p} \approx \frac{1}{7}$ geändert. Da Helium ${}^4\text{He}_2$ zwei Neutronen enthält, ist

$$\frac{\#He}{\#n} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{He}{p+n} = \frac{\frac{1}{2}n}{p+n} = \frac{\frac{1}{2}n/p}{1+n/p} \approx 0,06 \quad (9.6)$$

Dies entspricht fast dem beobachteten Wert im Kosmos von 0,08. Der Unterschied ergibt sich aus der Produktion von He durch Sterne.

9.4 Teilchen-Epochen im frühen Universum

Hadron-Epoche Bei $10^{-6}s < t < 1s$ nach dem Urknall existierte ein sogenanntes Quark-Gluon-Plasma, denn bei Temperaturen $T > 200$ MeV und Dichten von mehr als $2,5$ GeV/fm können Quarks und Gluonen als asymptotisch frei angesehen werden. Die starke WW dominiert dann das Universum. Bei weiterer Expansion und Abkühlung gehen die Quarks und Gluonen dann in Hadronen über. Dieser Prozess wird auch in Teilchenreaktionen beobachtet. Das Phasendiagramm des Quark-Gluon Plasmas wird experimentell in Kollisionen schwerer Ionen an Beschleunigern untersucht, bei denen in etwa vergleichbare Konditionen herrschen. Am Ende dieser Phase ist die Dichte so gering, dass Neutrinos aus dem Gleichgewicht auskoppeln. Diese Neutrinos sind heute sehr niederenergetisch und konnten daher bisher nicht nachgewiesen werden.



Paul Sorensen and Chun Shen

Abb. 9.2 Schema einer Schwerionen-Kollision.

Lepton-Epoche Am Ende der Hadron-Epoche vernichten sich die meisten Hadronen und Antihadronen gegenseitig, so dass bis etwa 10 s nach dem Urknall Leptonen dominieren. Am Ende dieser Epoche ist die Temperatur so gering, dass Antileptonen nur noch selten erzeugt werden. Leptonen und Antileptonen vernichten sich gegenseitig und die Lepton-Anzahl sinkt drastisch. Nur die heute beobachteten Elektronen verbleiben.

Photon-Epoche Nach der Lepton-Epoche wird die Energiedichte des Universums durch Photonen dominiert, bis etwa 380000 Jahre nach dem Urknall. In diese Zeit fällt auch die Nukleonsynthese.

Materie-dominierte Epoche Etwa 70000 Jahre nach dem Urknall sind die Energiedichten der Atomkerne und der Photonen gleich groß. Anschließend überwiegt die Dichte der Materie, allerdings nicht nur in Form der bekannten Atomkerne, sondern auch in Form der sogenannten *kalten dunklen Materie*.

Kosmische Hintergrundstrahlung Etwa 377000 Jahre nach dem Urknall ist die Temperatur und Dichte so klein, dass Bindungen zwischen Atomkernen und Elektronen nicht mehr aufgebrochen werden. Es bilden sich Atome. Da damit das Universum plötzlich elektrisch neutral ist, wird es für Licht transparent, d.h. die Photonen entkoppeln von der Materie. Die verbleibende Photonstrahlung entspricht jetzt einer Temperatur von 2,7K und ihre Messung liefert heute ein sehr genaues Bild der Homogenität des damaligen Universums und auch kleiner Fluktuationen dieser Homogenität, aus denen sich dann durch Gravitation die heutige großräumige Verteilung der Galaxien und Galaxie-Clustern gebildet hat. Hierfür ist allerdings außer der bekannten Materie eine weitere Komponente notwendig, die sogenannte kalte dunkle Materie.

9.5 Dunkle Materie und Dunkle Energie

In Galaxien, Galaxienhaufen und auch auf noch viel größeren Längenskalen treten Effekte auf, die im kosmologischen Standard-Modell nur mit mindestens zwei zusätzlichen Beiträgen zur Energiedichte des Universums werden können. Für diese kennen wir allerdings in der Teilchenphysik keine Kandidaten, so dass dies ein fundamentales Problem der Verbindung von Kosmologie und Teilchenphysik darstellt.

Dunkle Materie Zu den Evidenzen für dunkle Materie zählen unter anderem

- Aus der Rotationsgeschwindigkeit von Spiralgalaxien ergibt sich, dass die meiste Energie der Galaxien nicht in Form der sichtbaren Atome/Sterne vorliegt, sondern über einen viel größeren Raumbereich (Halo) verteilt ist. Diese dunkle Materie muss daher elektrisch neutral sein und kann nicht durch starke WW in Protonen und Neutronen gebunden sein. Die gleiche Schlussfolgerung ergibt sich auch aus Messungen zur Ablenkung des Lichts entfernter Quellen an Galaxien (Gravitationslinsen).

- Bei der Kollision von Galaxiehaufen sieht man, dass die dunkle Materiekomponente anders als Gas kaum beeinflusst wird. Sie kann daher nur sehr schwach wechselwirken.
- Die Strukturverteilung der Galaxiehaufen im Universum braucht zusätzliche Beiträge zur Schwerkraft, die aus Objekten bestehen muss, die sich nicht relativistisch schnell bewegen dürfen. Die dunkle Materie muss also *kalt* sein.

In der Teilchenphysik ergibt sich daraus als einfachste Möglichkeit, dass es neue Teilchen geben muss, die relativ schwer sind und nur schwach wechselwirken. Überraschenderweise erfüllen Teilchen nahe der elektroschwachen Skala (100 GeV), die nur der bekannten schwachen WW unterliegen, die Bedingung, dass sie in hinreichender Anzahl aus dem Urknall ausgefroren sein können, um die jetzige Menge der dunklen Materie zu erklären. Allerdings gibt es keine Teilchen im Standard-Modell, die stabil sind und diese Bedingungen erfüllen. Das Standard-Modell muss daher erweitert oder verändert werden.

Dunkle Energie Die beobachtete beschleunigte Expansion des Universums kann in Einsteins allgemeiner Gravitationstheorie durch eine sogenannte kosmologische Konstante erklärt werden. Dieser heute Dunkle Energie genannte Effekt hat bisher keine Erklärung. Ein möglicher Zusammenhang mit einem skalaren Feld ähnlich dem Higgs-Feld, das auch die Inflationsphase im Universum verursacht, ist bisher spekulativ.

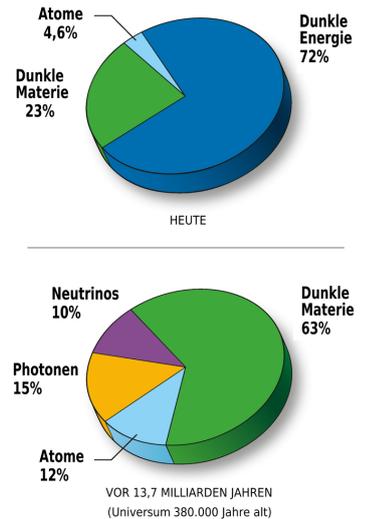


Abb. 9.3

A Natürliche Einheiten

In der klassischen Physik sind Prozesse langsam und makroskopisch, so dass die SI-Einheiten

$$\text{kg, m, s}$$

praktisch sind. Für relativistische und quantenmechanische Prozesse in der Teilchenphysik und Kernphysik ist das aber keine günstige Wahl. Max Planck erkannte als erster, dass sich alle anderen Einheiten auf eine einzige Einheit zurückführen lassen, wenn man Relativitätstheorie und Quantentheorie als gegeben annimmt. Dieses “natürliche Einheitensystem” (oder “Planck’sche Einheitensystem”) ist heute Standard. Die SI Einheiten sind historisch willkürlich gewählt worden und erfordern daher in den Naturgesetzen zusätzliche Konstanten, deren Zahlenwerte willkürliche sind:

$$\hbar_{SI} = 6,58211889 \cdot 10^{-22} \text{ MeV s} \quad (\text{A.1})$$

$$c_{SI} = 299792458 \text{ m/s} \quad (\text{A.2})$$

$$(\hbar c)_{SI} = 197,3269602 \text{ MeV fm} \quad (\text{A.3})$$

$$\epsilon_{0SI} = 8,854187817 \cdot 10^{-34} \text{ Cb}^2/(\text{Jm}) \quad (\text{A.4})$$

$$G_{NSI} = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2} \quad (\text{A.5})$$

Man kann alle diese Konstanten vermeiden, indem man nur eine einzige Einheit verwendet und alle Zahlenwerte zu 1 setzt.

$$\boxed{\hbar = 1 \quad c = 1 \quad \epsilon_0 = 1 \quad G_N = 1} \quad (\text{A.6})$$

- Energie: Die Basiseinheit sei 1 eV (oder MeV, GeV) als Einheit der Energie.
- Masse und Impuls: Mit $c = 1$ folgt aus der relativistischen Beziehung

$$E^2 = m^2 c^4 + \vec{P}^2 c^2$$

dass Energien, Massen und Impulse alle die Dimension der Energie haben.

$$\boxed{[\text{Energie}] = [\text{Impuls}] = [\text{Masse}] = \text{GeV}} \quad (\text{A.7})$$

- Zeit: Mit $\hbar = 1$ lautet z.B. die Unschärferelation

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq 1$$

Zeiten haben also offenbar die Dimension $[\text{Zeit}] = \text{GeV}^{-1}$.

- Länge: Mit $c = 1$ haben Zeit und Länge die gleiche Dimension, also

$$\boxed{[\text{Zeit}] = [\text{Länge}] = \text{GeV}^{-1}} \quad (\text{A.8})$$

- Geschwindigkeiten β sind dimensionslos.
- Drehimpuls und Spin: Mit $\hbar = 1$ sind Drehimpulse in der Quantenmechanik nur noch Zahlen, $S = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$

Dies macht viele Formeln viel übersichtlicher. Für die Berechnung experimenteller Ergebnisse muss von diesem natürlichen Einheitensystem in SI Einheiten (m, kg, s) umgerechnet werden. Dies ist immer möglich durch einfache Dimensionsbetrachtungen. Praktische Zahlenwerte der Umrechnungsfaktoren hierfür sind

$$\boxed{c_{SI} \approx 30 \frac{\text{cm}}{\text{ns}} \quad (\hbar c)_{SI} \approx 200 \text{ MeV fm}} \quad (\text{A.9})$$

Beispiel Länge $x = 1 \text{ MeV}^{-1}$:

$$\rightarrow x_{SI} = x \cdot \frac{(\hbar c)_{SI}}{\hbar c} = 1 \text{ MeV}^{-1} \frac{200 \text{ MeV fm}}{1} = 200 \text{ fm}$$

Beispiel Zeit $t = 1 \text{ MeV}^{-1}$:

$$\rightarrow t_{SI} = t \cdot \hbar = 6,6 \cdot 10^{-22} \text{ s}$$

Die Feinstrukturkonstante ist dimensionslos und damit in SI- und natürlichen Einheiten gleich. Aus der Messung der Feinstrukturkonstante in der Atomphysik

$$\alpha_{em} = \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137,036}$$

folgt in natürlichen Einheiten ($\epsilon_0 = 1$, $\hbar c = 1$) für die Elementarladung

$$\boxed{\alpha_{em} = \frac{e^2}{4\pi}, \quad e \approx 0,303} \quad (\text{A.10})$$

Die Elementarladung ist also in natürlichen Einheiten dimensionslos und von der Größenordnung 1.

B Relativistische Kinematik

B.1 4-er Vektoren und Lorentz-Transformation

Aus der experimentellen Beobachtung, dass die Lichtgeschwindigkeit in verschiedenen Inertialsystemen gleich ist, und der theoretischen Beobachtung, dass die Maxwellgleichungen ihre Form unter Lorentztransformationen nicht ändern, hat Einstein die spezielle Relativitätstheorie entwickelt. Sie basiert auf der Forderung, dass alle Inertialsysteme S gleichberechtigt sind:

- Die Naturgesetze (Maxwell-Gl., ...) haben in allen Inertialsystemen die gleiche Form.
- Die Naturkonstanten (c , \hbar , ...) haben in allen Inertialsystemen die gleichen Zahlenwerte.

Hieraus allein folgen Zeitdilatation und Längenkontraktion sowie die Formeln für die Lorentz-Transformationen. Da Ort- und Zeit-Koordinaten gleichermaßen transformiert werden müssen, ist die einfachste Notation die der Vierervektoren im Minkowski-Raum:

$$x = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

Die Zeit wird hier mit der Lichtgeschwindigkeit c multipliziert, damit aller Komponenten des Vierervektors die Dimension einer Länge haben. In natürlichen Einheiten wird $c = 1$ gesetzt, also:

$$x = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Notation:
4-er Vektor: x
3-er Vektor: \vec{x}
Betrag des 3-er Vektors: $|\vec{x}|$.

Die "0-te" Komponente¹¹ des 4-er Vektors ist die Zeit, $x_0 = t$. Lorentztransformationen erlauben die Umrechnung von beliebigen 4-er Vektoren zwischen verschiedenen Inertialsystemen. Aus Sicht eines Systems S' , dass sich mit Geschwindigkeit $\beta_s = v_s/c < 1$ und

$$\gamma_s = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_s^2}}$$

¹¹In älteren Büchern wird oft die Zeit als 4-ter Komponente eingeführt.

in x-Richtung bewegt, gilt (wenn der Ursprung von S und S' zur Zeit $t = 0, t' = 0$ übereinander liegt):

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma_s & -\gamma_s\beta_s & 0 & 0 \\ -\gamma_s\beta_s & \gamma_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\Lambda} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_s t - \gamma_s\beta_s x \\ \gamma_s x - \gamma_s\beta_s t \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

also

$$x' = \Lambda x$$

mit der 4×4 Matrix Λ .

Das Skalarprodukt zweier 4-er Vektoren

$$a = (t_a, x_a, y_a, z_a), \quad b = (t_b, x_b, y_b, z_b)$$

ist definiert als¹²

$$a b = t_a t_b - x_a x_b - y_a y_b - z_a z_b \quad (\text{B.5})$$

oder

$$\boxed{a b = t_a t_b - \vec{a} \vec{b}} \quad (\text{B.6})$$

Aufgabe B.1: Zeigen Sie, dass Skalarprodukte von Vierervektoren Lorentz-invariant sind,

$$\boxed{a' b' = a b} \quad (\text{B.7})$$

Die Norm eines Vierervektors ist sein eigenes Skalarprodukt,

$$a a = a^2 = t_a^2 - \vec{a}^2$$

Sie kann positiv, null oder negativ sein. Man unterscheidet daher

$$\text{Zeit-artige 4-er Vektoren} \quad a^2 > 0 \quad (\text{B.8})$$

$$\text{Licht-artige 4-er Vektoren} \quad a^2 = 0 \quad (\text{B.9})$$

$$\text{Raum-artige 4-er Vektoren} \quad a^2 < 0 \quad (\text{B.10})$$

¹² Wir verwenden auch im Folgenden immer die weit verbreitete $+- - -$ Vorzeichenkonvention für die Definition des Skalarprodukts. In älteren Büchern wird manchmal auch $- + + +$ benutzt. Praktisch ist auch die Schreibweise mit dem "Metrischen Tensor" g

$$a b = a^T g b = (t_a, x_a, y_a, z_a) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_g \begin{pmatrix} t_b \\ x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

Eine weitere Alternative ist die Verwendung von kovarianten

$$a^\mu = (t_a, x_a, y_a, z_a)$$

und kontravarianten

$$a_\mu = (t_a, -x_a, -y_a, -z_a)$$

4-er Vektoren, so dass mit der Einsteinschen Summenkonvention das Skalarprodukt einfach gleich $ab = a^\mu b_\mu$ ist.

B.2 4-er Impulse

Ähnlich wie im normalen 3-dim Raum sollte es auch in der 4-dim Raum-Zeit einen 4-er Impuls geben. Zur Ableitung betrachten wir ein Teilchen mit Koordinaten (t, \vec{x}) , Geschwindigkeit β und Lorentzfaktor γ ,

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{x}}{dt} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{\beta}^2}}$$

Ein kleines Linienelement ist dann

$$(ds)^2 = (dt)^2 - (d\vec{x})^2 = (dt)^2 (1 - \vec{\beta}^2) = (dt)^2 / \gamma^2$$

In seinem eigenen Ruhesystem sind die Koordinaten (τ, \vec{x}') mit der Eigenzeit τ und Position $\vec{x}' = \text{const.}$ In diesem System ist das Linienelement

$$(ds')^2 = (d\tau)^2$$

Aus der Lorentz-Invarianz des Linienelements folgt:

$$(ds')^2 = (ds)^2 \quad (\text{B.11})$$

$$(d\tau)^2 = (dt)^2 / \gamma^2 \quad (\text{B.12})$$

Der 4-er Impuls wird definiert als

$$p = \begin{pmatrix} E \\ \vec{P} \end{pmatrix} = m \frac{dx}{d\tau} \quad (\text{B.13})$$

Die 0-te Komponente, $p_0 = E$, (die Zeit-artige Komponente) wird Energie genannt. Die Masse¹³ m und Eigenzeit sind unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems. Damit ist

$$p = m \frac{dx}{d\tau} = m \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \gamma \\ \frac{d\vec{x}}{dt} \frac{dt}{d\tau} \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \gamma \\ \vec{\beta} \gamma \end{pmatrix} \quad (\text{B.14})$$

Damit folgt:

$$E = \gamma m \quad \vec{P} = \gamma \vec{\beta} m \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{P}}{E} \quad (\text{B.15})$$

Die Norm des 4-er Impulsvektors

$$p^2 = E^2 - \vec{P}^2 = \gamma^2 (1 - \beta^2) m^2 = m^2 \quad (\text{B.16})$$

ist die Masse² und damit tatsächlich Lorentz-invariant. Damit ist die relativistische Beziehung zwischen Energie, Impuls und Masse (Dispersionsbeziehung)¹⁴:

$$p^2 = E^2 - \vec{P}^2 = m^2 \quad (\text{B.17})$$

¹³Mit Masse ist immer die Ruhemasse gemeint.

¹⁴Setzt man c explizit ein entspricht dies $E^2 - \vec{p}^2 c^2 = m^2 c^4$.

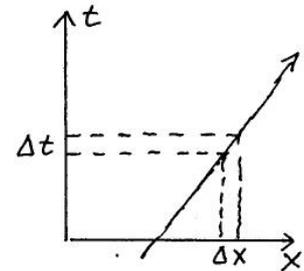


Abb. B.1
Linienelement eines Teilchens mit $\beta \neq 0$.

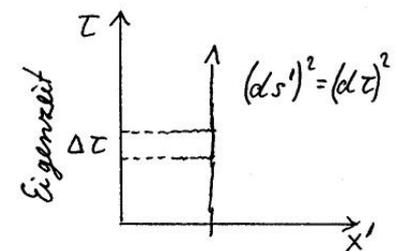


Abb. B.2
Linienelement eines Teilchens in seinem eigenen Ruhesystem.

Die kinetische Energie ist definiert als

$$E_{kin} = E - m = (\gamma - 1) m \quad (\text{B.18})$$

Im Ruhesystem eines Teilchen is $\vec{P} = 0$, so dass $E = m$. Damit lassen sich folgende kinematischen Grenzfälle für Teilchenimpulse unterscheiden:

ruhend:	$\beta = 0$	$\gamma = 1$	$\vec{P} = 0$	$E = m$
langsam:	$\beta \ll 1$	$\gamma \gtrsim 1$	$ \vec{P} \ll m$	$E = m + \frac{1}{2}m\beta^2 + \dots \beta^4 + \dots$
ultrarelativ.:	$\beta \lesssim 1$	$\gamma \gg 1$	$ \vec{P} \gg m$	$E \approx \vec{P} $
Masse-los:	$\beta = 1$	$\gamma = \infty$	$ \vec{P} = E$	

Aufgabe B.2: Berechnen Sie für ein langsames Teilchen ($\beta \ll 1$) die ersten Terme der Taylor-Entwicklung für $E = \gamma m$ bis zur Potenz β^4 .

Die Lorentz-Transformation eines 4-er Impulses erfolgt wie bei anderen 4-er Vektoren auch (wie in Gl. B.3 auch hier in x -Richtung):

$$p' = \Lambda p$$

$$\begin{pmatrix} E' \\ P'_x \\ P'_y \\ P'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_s & -\gamma_s \beta_s & & \\ -\gamma_s \beta_s & \gamma_s & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_s E - \gamma_s \beta_s P_x \\ \gamma_s P_x - \gamma_s \beta_s E \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}$$

Aufgabe B.3: In einem Inertialsystem S habe ein Teilchen die Geschwindigkeit $\vec{\beta} = (0,0,\beta)$. Wie lautet die Lorentztransformation in das Ruhesystem S^* des Teilchens?

Aufgabe B.4: Zeigen Sie, dass aus $\vec{\beta} = \vec{P} / E$ und $\beta'_x = P'_x / E'$ das Additionstheorem für Geschwindigkeiten folgt:

$$\beta'_x = \frac{\beta_x - \beta_s}{1 - \beta_x \beta_s}$$

B.3 Mehr-Teilchen Systeme

Gegeben sei ein System aus mehreren Teilchen i mit Massen m_i und 4-er Impulsen $p_i = (E_i, \vec{P}_i)$. Der gesamte 4-er Impuls ist dann

$$p = \begin{pmatrix} E \\ \vec{P} \end{pmatrix} = p_1 + p_2 + \dots \quad (\text{B.19})$$

Im Schwerpunktsystem der Teilchen gilt $\vec{P}^* = \sum_i \vec{P}_i^* = 0$, so dass

$$(p^*)^2 = (E^*)^2 - (\vec{P}^*)^2 = (E_1^* + E_2^* + \dots)^2 \quad (\text{B.20})$$

Die so definierte Schwerpunktsenergie des Teilchen-Systems

$$E_{CMS} = \sqrt{(p^*)^2} = E_1^* + E_2^* + \dots \quad (\text{B.21})$$

wird auch die ‘‘invariante Masse’’ des Teilchen-Systems genannt, denn sie ist das Quadrat eines 4-er Vektors und damit Lorentz-invariant. Verwendet wird oft auch die Abkürzung

Invariante Masse

$$\boxed{\sqrt{s} = E_{CMS} = \sqrt{p^2}} \quad (\text{B.22})$$

Wegen der Lorentz-invarianz von p^2 lässt sich die Schwerpunktsenergie in einem beliebigen Inertialsystem berechnen, ohne explizit eine Lorentz-Transformation ausführen zu müssen. Für zwei Teilchen ist

$$s = (p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2 p_1 p_2 \quad (\text{B.23})$$

Damit folgt

$$\boxed{s = (p_1 + p_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2(E_1 E_2 - \vec{P}_1 \vec{P}_2)} \quad (\text{B.24})$$

oder auch

$$\boxed{s = (p_1 + p_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\vec{P}_1 + \vec{P}_2)^2} \quad (\text{B.25})$$

Beispiel: Streuung an einem ruhende Teilchen

$$p_1 = \begin{pmatrix} E_1 \\ \vec{P}_1 \end{pmatrix} \quad p_2 = \begin{pmatrix} m_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$s = E_{CMS}^2 = (p_1 + p_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2 E_1 m_2$$

Die Schwerpunktsenergie steigt hier also nur langsam mit der Teilchenenergie,

$$E_{CMS} \sim \sqrt{E_1} \quad (\text{B.26})$$

Beispiel: Kollision von zwei Teilchen mit gleichem Impuls

$$p_1 = \begin{pmatrix} E_1 \\ \vec{P}_1 \end{pmatrix} \quad p_2 = \begin{pmatrix} E_2 \\ \vec{P}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 \\ -\vec{P}_1 \end{pmatrix}$$

Im CMS-System gilt $\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = 0$, so dass sich eine lineare Abhängigkeit mit der Energie ergibt,

$$E_{CMS} = E_1 + E_2 \quad (\text{B.27})$$

Hochenergie-Experimente werden daher bevorzugt an Kollidern mit entgegengesetzt laufenden Teilchen durchgeführt, so dass das Schwerpunktsystem das Laborsystem ist.

Beispiel: Ultra-relativistische Kollision

$$E_1 \approx |\vec{P}_1| \quad E_2 \approx |\vec{P}_2| \quad \vec{P}_1 \vec{P}_2 = -|\vec{P}_1| |\vec{P}_2|$$

und damit

$$E_{CMS} \approx \sqrt{4 E_1 E_2} \quad (\text{B.28})$$

Beim HERA Elektron-Proton-Kollider mit $E_e = 27,5 \text{ GeV}$ und $E_p = 920 \text{ GeV}$ ergibt sich $E_{CMS} = 318 \text{ GeV}$.

B.4 Zwei-Körper-Zerfall

Für den Zerfall $a \rightarrow bc$ gilt Energie und Impuls-Erhaltung,

$$p_a = p_b + p_c \quad \begin{pmatrix} E_a \\ \vec{P}_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_b + E_c \\ \vec{P}_b + \vec{P}_c \end{pmatrix}$$

Die Masse von Teilchen a ist daher die Schwerpunktsenergie der Teilchen $b + c$,

$$\boxed{m_a^2 = p_a^2 = (p_b + p_c)^2 = (E_b + E_c)^2 - (\vec{P}_b + \vec{P}_c)^2} \quad (\text{B.29})$$

Für die Messung von m_a benötigt man also Energien und Impulse der Zerfallsprodukte. Bei bekannten Massen m_b, m_c reichen auch entweder die Impulse oder die Energien.

Im Schwerpunktsystem von Teilchen a lässt sich die Energie der Zerfallsprodukte (hier E_b^*) berechnen aus

$$m_c^2 = (p_c^*)^2 = (p_a^* - p_b^*)^2 \quad (\text{B.30})$$

$$= m_a^2 + m_b^2 - 2(E_a^* E_b^* - \vec{P}_a^* \vec{P}_b^*) \quad (\text{B.31})$$

$$= m_a^2 + m_b^2 - 2(m_a E_b^*) \quad (\text{B.32})$$

wobei in diesem System $E_a^* = m_a$ und $\vec{P}_a^* = 0$ benutzt wurde. Es folgt

$$\boxed{E_b^* = \frac{m_a^2 + m_b^2 - m_c^2}{2 m_a}} \quad (\text{B.33})$$

Aufgabe B.5: Zeigen Sie, dass mit dieser Formel B.33 auch $E_b^* + E_c^* = \sqrt{s}$ gilt.

Für Zerfallsprodukte ohne Masse oder für $m_a \gg m_b, m_c$ folgt

$$E_b^* = E_c^* = \frac{m_a}{2} \quad (\text{B.34})$$

C Detektoren zur Messung elementarer Teilchen

C.1 Übersicht

Ziel der Messungen auch komplizierter Teilchenreaktionen ist es, möglichst alle entstehenden Quanten einzeln nachzuweisen und ihre Energien, Impulse, Massen und Ladungen zu messen. Das Prinzip ist dabei zumeist die Umwandlung von kinetischer Energie ($E \gtrsim \text{MeV}$) in elektrische oder optische Effekte.

- Elektrisch geladene Teilchen können nur direkt nachgewiesen werden, wenn ihre Lebensdauer groß genug ist, um messbare Strecken zurückzulegen. Dies sind insbesondere $e^\pm, \mu^\pm, \pi^\pm, K^\pm, p, \bar{p}, \alpha, \bar{\alpha}, \dots$
- Neutrale Teilchen wie $\gamma, n, \bar{n}, K^0, \dots$ werden durch ihre Reaktionen mit dem Detektormaterial und die daraus entstehenden Sekundärteilchen nachgewiesen.
- Kurzlebige Teilchen wie $\pi^0, \tau^\pm, c, b, t, Z^0, W^\pm, H, \dots$ und viele Hadronen können durch Ihre Zerfälle nachgewiesen werden.
- Eine Ausnahme bilden Neutrinos, da deren Wirkungsquerschnitt so klein ist, dass sie nicht einzeln direkt nachgewiesen werden können. Energie- und Impulserhaltung können jedoch benutzt werden, um Neutrinos indirekt nachzuweisen.

C.2 Geladene Teilchen

C.2.1 Ionisation und Bethe-Bloch-Formel

Hochenergetische geladene Teilchen übertragen durch elastische oder inelastische Stöße vor allem mit den Elektronen in der Hülle Energie auf Atome des Detektormaterials. Die Wahrscheinlichkeit und der jeweilige Energieverlust pro Stoß ergibt sich aus dem Rutherford-Wirkungsquerschnitt, wenn man die kleine Masse der Elektronen sowie die Energieniveaus der Elektronen und damit die Energie für Anregungen der Atome und die Ionisierungsenergien mit berücksichtigt. Integriert man über alle Streuwinkel und den jeweils damit verbundenen Energieverlust und berücksichtigt auch relativistische Effekte, so ergibt sich die Bethe-Bloch-Formel (siehe z.B. Sakurai). Sie beschreibt den *mittleren* Energieverlust $-dE$ durch

vielfache Coulomb-Wechselwirkung mit den Atomen im Material nach Durchqueren einer Schicht der Dicke dx .

$$\boxed{-\frac{dE}{dx} = \frac{Dz^2n_e}{\beta^2} \left[\ln \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I} - \beta^2 - \frac{\delta(\gamma)}{2} \right]} \quad (C.1)$$

Bethe-Bloch-Formel

Teilchen: Ladung $z \cdot e$, Geschwindigkeit $\beta = v/c$, $\gamma^2 = \frac{a}{a-\beta^2}$

Material: $n_e = \rho \cdot N_A \cdot \frac{Z}{A}$, Elektronendichte

Z = Kernladung, A = Atomgewicht, ρ = Dichte

I = mittlere Energie für Ionisation $\approx 10Z \cdot eV$

$D = 4\pi\alpha^2 \hbar^2 / m_e = 5,1 \cdot 10^{-25} MeV cm^2$

δ = Dichte-Effekt in Festkörpern für große γ

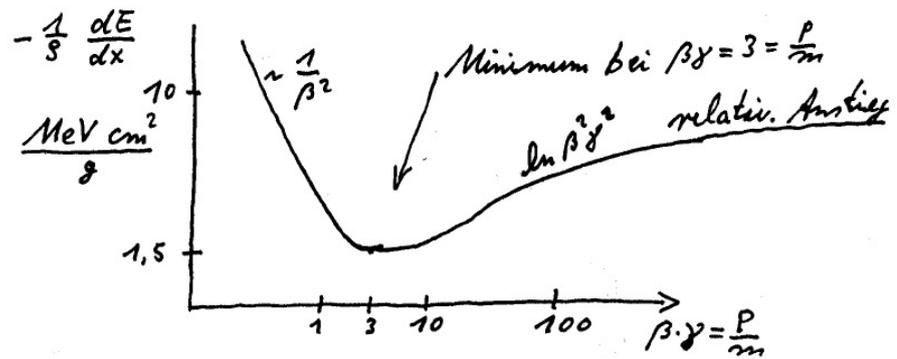


Abb. C.1 Skizze der Bethe-Bloch-Formel.

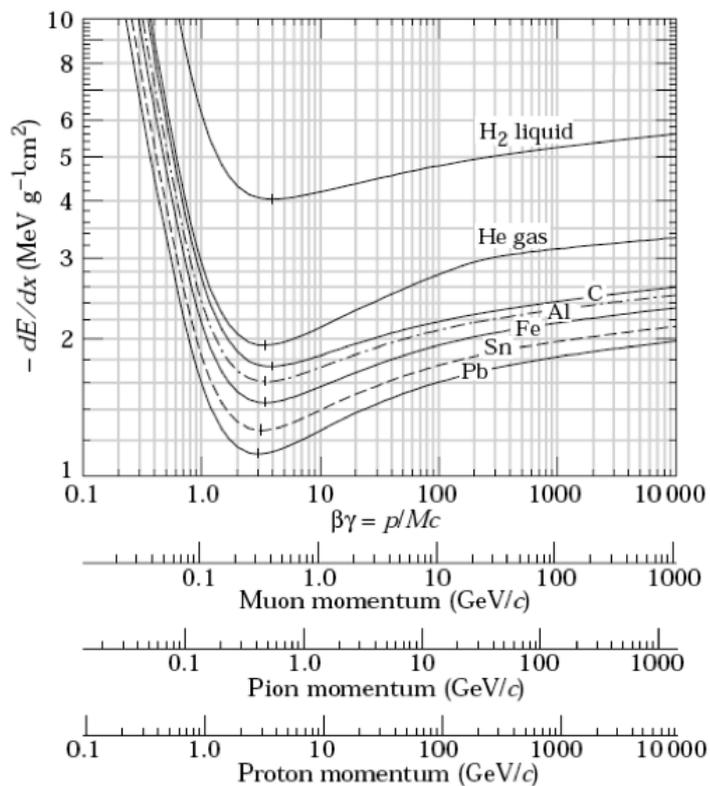


Abb. C.2 Bethe-Bloch-Formel für verschiedene Materialien und Teilchensorten. Gezeigt ist der Energieverlust normiert auf die Dichte ρ des Materials, $-dE/(\rho dx)$.

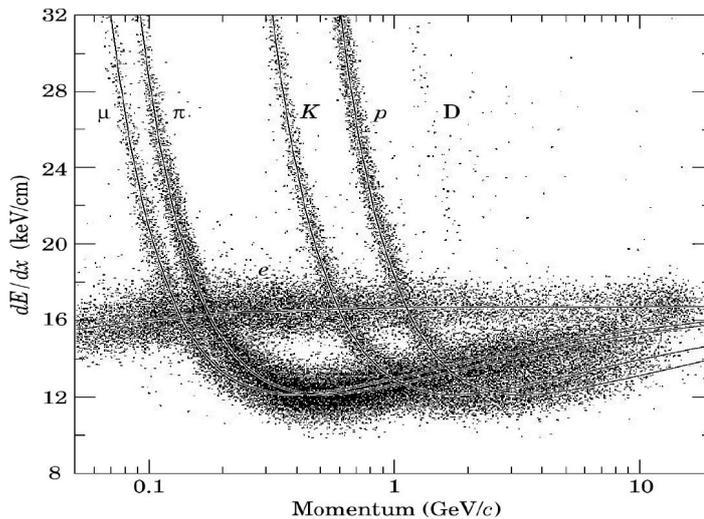


Abb. C.3 Kurven zeigen die Bethe-Bloch-Formel für eine mit Gas gefüllte Kammer für $p, K^\pm, \pi^\pm, \mu^\pm$ und e . Die fast konstante Linie bei etwa 16 MeV/cm gilt für Elektronen, wenn man auch Bremsstrahlung berücksichtigt. Die einzelnen Punkte stellen die experimentelle Messung der Ionisierung des Gases entlang einzelner Teilchenspuren dar, deren Impuls durch den Bahnradius im Magnetfeld bestimmt wurde (Messung der OPAL-Kollaboration).

Der minimale Energieverlust tritt unabhängig von der Teilchensorte bei einem Impuls von ca. $\gamma\beta = 3$ auf. Bei gleichzeitiger Messung des Impulses und der Ionisierung dE/dx kann bei kleinen Impulsen die Masse des Teilchens ermittelt werden (Abb. C.3). Bei großen Impulsen ionisieren aber alle Teilchen ähnlich stark, so dass die Teilchensorten nicht mehr unterschieden werden können. Eine Ausnahme bilden Elektronen aufgrund der zusätzlichen Bremsstrahlung.

Der minimale Energieverlust beträgt - je nach Material - ca. 2 MeV bei einer Dichte von $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$. Effektiv ist die mittlere Energie zur Ionisation eines Atoms etwa $10 \cdot Z \text{ eV}$. In einem Gas mit kleiner Dichte ($\approx 10^{-3} \text{ g/cm}^3$) werden daher einige hundert Atome pro cm ionisiert. In einem Festkörper dagegen mehr als 10000.

Der mittlere Energieverlust ist die statistische Summe aus vielen Einzelprozessen. Ist die Anzahl der Prozesse (in einer dünnen Schicht dx) nicht sehr groß, so gibt es starke statistische Schwankungen, die eine "Landau-Verteilung" ergeben. Der Ausläufer zu hohen Energien tritt auf, wenn zufällig in einem Stoß eines der Elektronen der Hülle viel Energie erhält und selber zur weiteren Ionisation beiträgt (sogenannte δ -Elektronen durch hohen Impulsübertrag bei der Rutherford-Streuung).

Nach der Rutherford-Formel erfolgt die Streuung ganz dominant unter kleinen Winkeln und damit kleinen Energieüberträgen. Daher durchdringt ein hochenergetisches geladenes Teilchen mehrere cm bis m dichtes Material und wird dabei immer langsamer, bis es schließlich komplett stoppt. Die Winkelablenkung vieler Stöße addieren sich zu einem Gesamtwinkel θ_P . Dessen Projektion auf eine Richtung senkrecht zum Anfangsimpuls folgt (zentraler Grenzwertsatz der Statistik) näherungsweise einer Gauß-Verteilung mit Breite

MIPS = minimal ionisierendes Teilchen

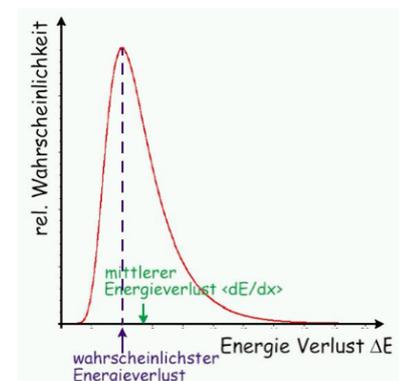


Abb. C.4 Landau-Verteilung des Energieverlusts in einer dünnen Schicht.

θ_0 ,

$$f(\theta_p) \sim e^{-\theta_p^2/2\theta_0^2} \quad (C.2)$$

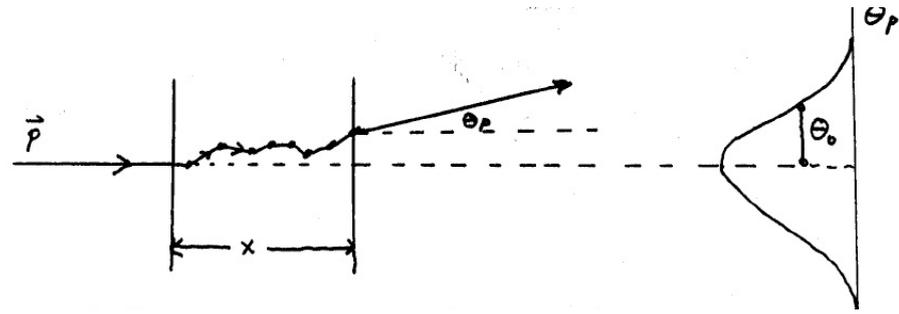


Abb. C.5 Prinzip der Vielfachstreuung.

Vielfach-Streuung um kleine Winkel

Eine statistische Rechnung ergibt

$$\theta_0 = \underbrace{\frac{13,6 \text{ MeV}}{\beta pc}}_{\text{Teilchen}} z_i \underbrace{\sqrt{\frac{x}{X_0}} (1 + 0,038 \ln \frac{x}{X_0})}_{\text{Material}} \quad (C.3)$$

Beispiel: Für ein Muon mit $P = 1 \text{ GeV}$, $\beta \approx 1$, $z_i = 1$, in Eisen ($x = 1 \text{ cm}$ dick, Strahlungslänge¹⁵ $X_0 = 1,8 \text{ cm}$) folgt $\theta_0 \approx 0,6^\circ$. Die Ablenkung ist also in der Regel sehr klein.

Insbesondere in Gasen ergibt sich damit die Möglichkeit, Teilchenbahnen über lange Strecken zu vermessen, indem man die Ionisation misst. Das ist das Prinzip der Spurdetektoren.

C.2.2 Bremsstrahlung

Wie schon vom Herz'schen Dipol bekannt, erzeugen beschleunigte elektrische Ladungen elektromagnetische Wellen. Hochenergetische geladene Teilchen werden in einem Material besonders stark beschleunigt, wenn sie leicht sind und in der Nähe eines (schweren) Kerns mit hoher Kernladungszahl Z vorbeilaufen. Besonders wichtig ist Bremsstrahlung daher für Elektronen, da sie die mit Abstand leichtesten geladenen Teilchen sind.

¹⁵Die Strahlungslänge X_0 charakterisiert allgemein elektromagnetische Wechselwirkungen,

$$\frac{1}{X_0} = \frac{4\hbar^2 c^2}{m^2 c^4} \cdot (Z^2 + Z) \cdot \alpha^3 \cdot n_a \ln(183 \cdot Z^{-\frac{1}{3}}) \quad (C.4)$$

mit $Z^2 + Z =$ Ladungszahl für Kern+Hülle und $n_a =$ Anzahl Atome / Volumen. m ist die Masse des Elektrons, wenn X_0 für e^+e^- -Paarbildung oder für Vielfachstreuung verwendet wird. Für Bremsstrahlung ist m die Masse des Teilchens, das das Photon abstrahlt, in der Regel also ebenfalls die Elektronmasse.

	Z	Dichte ρ [g cm ⁻³]	$-\frac{dE}{dx} _{\text{Ion,min}}$ [MeV cm ⁻¹]	X_0 [cm]	E_c [MeV]
C	6	2,27	3,97	18,8	103
Al	13	2,7	4,37	8,9	47
Fe	26	7,87	11,4	1,8	24
Pb	82	11,35	12,7	0,56	7

Als Feynman-Graphen dargestellt entspricht die Aussendung der elektromagnetischen Welle der Abstrahlung eines Photons vom Elektron im Anfangs- oder Endzustand.

$$e + X \rightarrow e + \gamma + X \quad (\text{C.5})$$

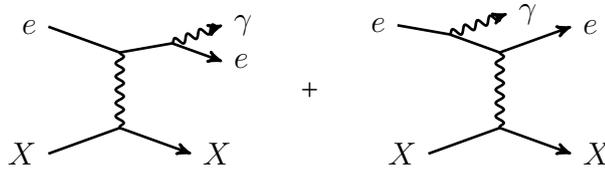


Abb. C.6 Feynman-Diagramme zur Bremsstrahlung.

Aufgabe C.1: Begründen Sie anhand von Energie- und Impulserhaltung, warum ein freies Teilchen kein Photon abstrahlen kann, sondern die Nähe eines anderen Teilchens braucht. Argumentieren Sie im Schwerpunktsystem des freien Teilchens.

In diesen Diagrammen gibt es jeweils 3 Vertizes von Photonen und Elektronen. Die Rate für diese Prozesse ist daher $\sim \alpha^3$. Die Rechnungen hierzu sind aufwendig. Als Resultat ergibt sich für sehr hohe Energien, dass das Energiespektrum der emittierten Photonen $\sim 1/E_\gamma$ ist. Gemittelt über viele dieser Prozesse in einer Materialschicht der Dicke dx ergibt sich der Energieverlust des geladenen Teilchens zu

$$\boxed{-\frac{dE_{Brems}}{dx} \approx \frac{E}{X_0}} \quad (\text{C.6})$$

Die Anfangsenergie nimmt also exponentiell ab mit der Strahlungslänge X_0 als charakteristische Länge,

$$E(x) = E(0) e^{-x/X_0} \quad (\text{C.7})$$

Dies wird oft auch als Definition der Strahlungslänge verwendet. Der Energieverlust durch Bremsstrahlung wird für Elektronen bei Energien oberhalb der sogenannten kritischen Energie E_c deutlich wichtiger als der Energieverlust durch Ionisation. Näherungsweise ist dies für Elektronen der Fall bei

$$E_e > E_c \approx 600 \text{ MeV} / Z \quad (\text{C.8})$$

Werte für E_c sind bei Gl. C.4 gelistet. Abb. C.3 zeigt für Elektronen also dominant Bremsstrahlung.

Aus der Formel (Gl. C.4) für die Strahlungslänge entnimmt man

$$-\frac{dE_{Brems}}{dx} \sim \frac{E}{m^2}$$

Für ein Muon z.B. ist Bremsstrahlung bei gleicher Energie daher um einen Faktor $(m_e/m_\mu)^2 = (0,5/106)^2$ kleiner und bis zu Energien

von mehreren 100 GeV gegenüber Energieverlust durch Ionisation vernachlässigt werden.

Da hochenergetische Teilchen auch in der Nähe eines Kerns nur wenig abgelenkt werden, fliegen auch die Photonen im Mittel unter sehr kleinen Winkeln zur Elektron-Richtung. Diese sind typisch von der Größenordnung

$$\theta \lesssim m/E \quad (\text{C.9})$$

C.3 Spurdetektoren

C.3.1 Impulsmessung im Magnetfeld

Der Nachweis der geometrischen Bahnen von Teilchen über möglichst lange Strecken ist besonders wichtig, da man so mit sehr hoher Genauigkeit Teilchenimpulse messen kann. In einem homogenen Magnetfeld ergibt sich eine Spiralbahn, aus deren Radius R die Impulskomponente P_{\perp} in der Ebene senkrecht zum Magnetfeld folgt,

$$P_{\perp} = 0,3 \cdot z \cdot \frac{R}{\text{m}} \cdot \frac{B}{\text{T}} \text{ GeV} \quad (\text{C.10})$$

Der numerische Faktor ergibt sich aus der Wahl der Einheiten (m, T, GeV). Diese Formel gilt auch relativistisch.

Beispiel: Für ein Teilchen mit $P_{\perp} = 1000 \text{ GeV}$ ergibt sich in einem Magnetfeld von $B = 1 \text{ T}$ ein Radius von $R = 3000 \text{ m}$. Auf einer Spurlänge von $l = 1 \text{ m}$ ist dann die Abweichung von einer Geraden $\approx l^2/(2R) = 0,5 \text{ mm}$. Die geometrische Messung der Teilchenbahn muss also deutlich besser als diese Länge sein.

C.3.2 Nebelkammern und Blaskammern

Historisch besonders wichtiges Beispiel sind Nebelkammern und Blaskammern: Nebelkammern arbeiten mit unterkühlten Flüssigkeiten, die kurz vor der Kondensation stehen. Blaskammern arbeiten mit überhitzten Flüssigkeiten, die kurz vor der Verdampfung stehen. Bei beiden dienen ionisierte Atome und freie Elektronen entlang der Teilchenbahnen als Kondensationskeime für Tropfen beziehungsweise Gasblasen, ähnlich wie die Rußpartikel aus einer Flugzeugdüse als Kondensationskeime für Kondensstreifen am Himmel sorgen. Die Tropfen oder Gasblasen können fotografiert und die Bilder später geometrisch vermessen werden. Mit diesen Methoden wurden seit ca. 1930 viele neue Elementarteilchen entdeckt.

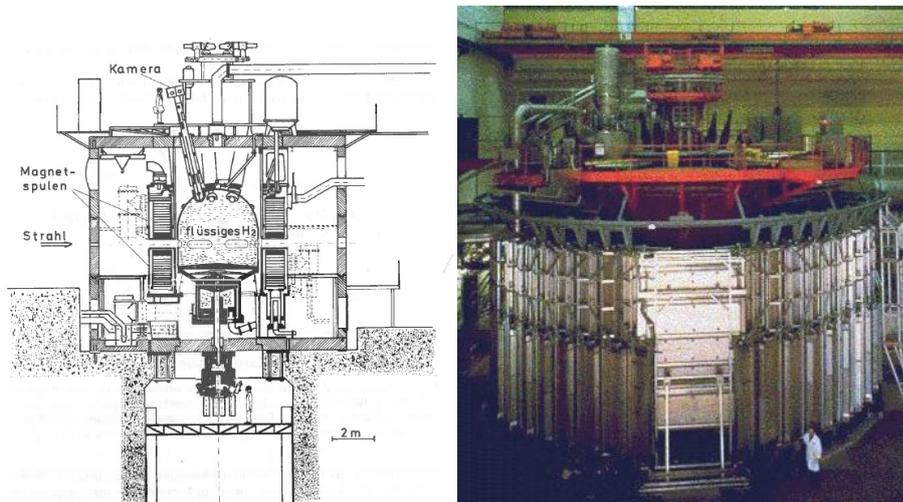


Abb. C.7 Skizze und Foto der "Big European Bubble Chamber" BEBC am CERN

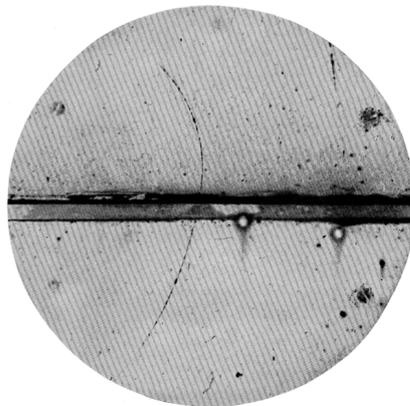


FIG. 1. A 63 million volt positron ($H_p = 2.1 \times 10^6$ gauss-cm) passing through a 6 mm lead plate and emerging as a 23 million volt positron ($H_p = 7.5 \times 10^6$ gauss-cm). The length of this latter path is at least ten times greater than the possible length of a proton path of this curvature.

Abb. C.8 Ein positiv geladenes Teilchen dringt von unten in die Nebelkammer ein und verliert in einer 6mm dicken Bleiplatte Energie. Die Reichweite danach ist zu groß für ein Proton. Dies ist die Entdeckung des e^+ durch Anderson 1933.

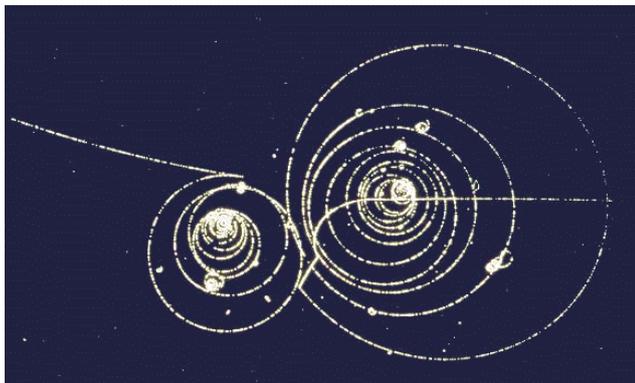


Abb. C.9 Fotografie einer Reaktion in einer Blasen-kammer. Die Dichte der Blasen ist ein Maß für den Energieverlust $-dE/dx$.

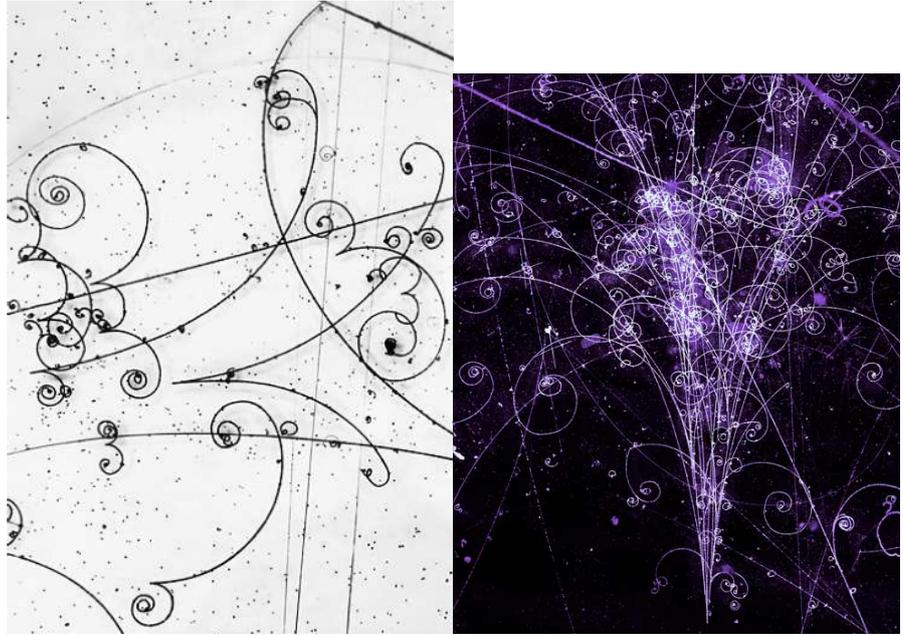


Abb. C.10 Links: Ausschnitt eines elektromagnetischen Schauers in einer Blasenkammer mit mehreren Photon-Konversionen in $e+e^-$ Paare. Rechts: Elektromagnetischer Schauer

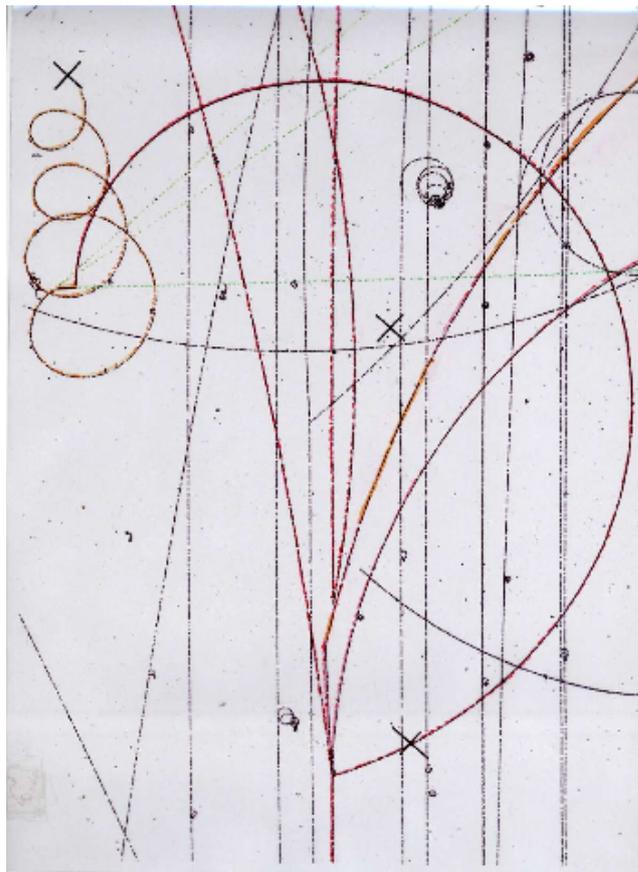


Abb. C.11 Zerfall eines Pions. Das Pion wird zusammen mit anderen Teilchen erzeugt, stoppt im Detektor und zerfällt anschließend in $\pi \rightarrow \mu \bar{\nu}_\mu$. Das Muon hat nur wenig Energie und stoppt schnell, bevor es zerfällt in $\mu \rightarrow e \nu \bar{\nu}$. Die Spiralbahn des Elektrons wird durch Energieverlust immer enger.

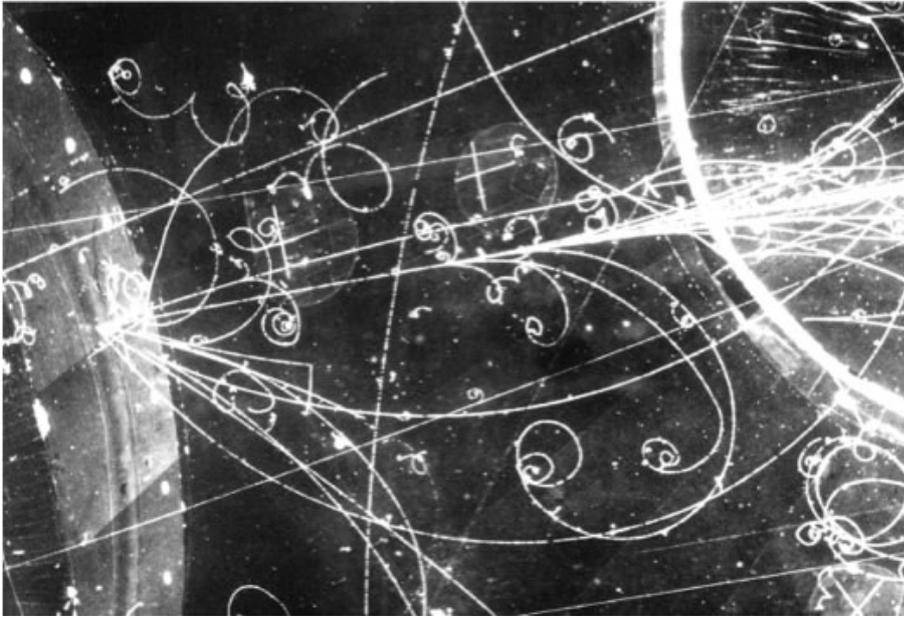


Abb. C.12 Erzeugung eines Jets aus Hadronen in einer Blasenkam-
mer.

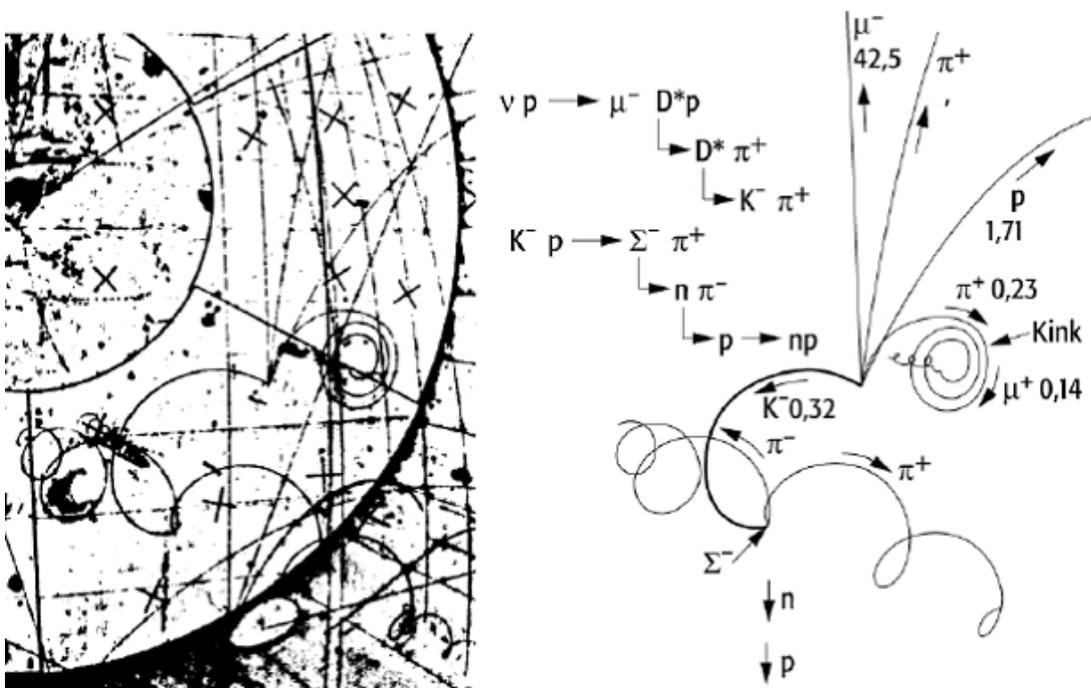


Abb. C.13 Erzeugung eines Charm-Hadrons mit anschließenden Zer-
fällen.

C.3.3 Gas-Detektoren

In Gasen ist aufgrund der geringen Dichte die Wechselwirkung geladener (und auch neutraler) Teilchen gering, so dass ihre Bahnen kaum gestört werden und Impulse mit hoher Präzision gemessen werden können. Allerdings ist die Anzahl ionisierter Atome in der Regel (bei Normalbedingungen) gering, so dass Mechanismen der "Gasverstärkung" notwendig sind, um messbare Signale zu erzeugen¹⁶.

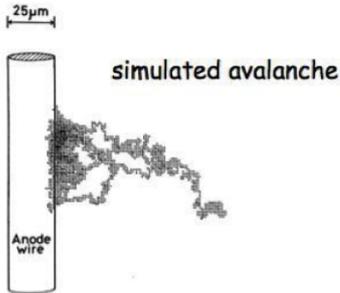


Abb. C.14 Gasverstärkung nahe am Draht.

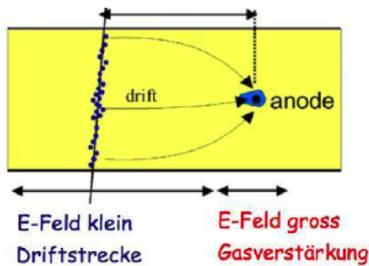


Abb. C.15 Drift von Elektronen zum Draht.

Drahtkammern: Hier werden in dem Gasvolumen dünne Drähte gespannt und auf hohes positives elektrisches Potential gesetzt. Werden nun durch ein hochenergetisches Teilchen Paare von Elektronen und Ionen erzeugt, so driften die Elektronen zum Draht.

Nahe am Draht ist das elektrische Feld sehr hoch ($E \sim 1/\text{Radius}$), die Elektronen werden stark beschleunigt und sind in der Lage, weitere Atome zu ionisieren. Die dadurch frei werdenden Elektronen werden durch das E -Feld ebenfalls stark beschleunigt, so dass durch viele derartige Prozesse eine Lawinenbildung entsteht. Auf diese Weise kann die Anzahl der primär entstandenen Elektronen um einen Faktor 10-10000 erhöht werden, so dass empfindliche und rauscharme Verstärker in der Lage sind, ein Signal auf dem Draht zu messen.

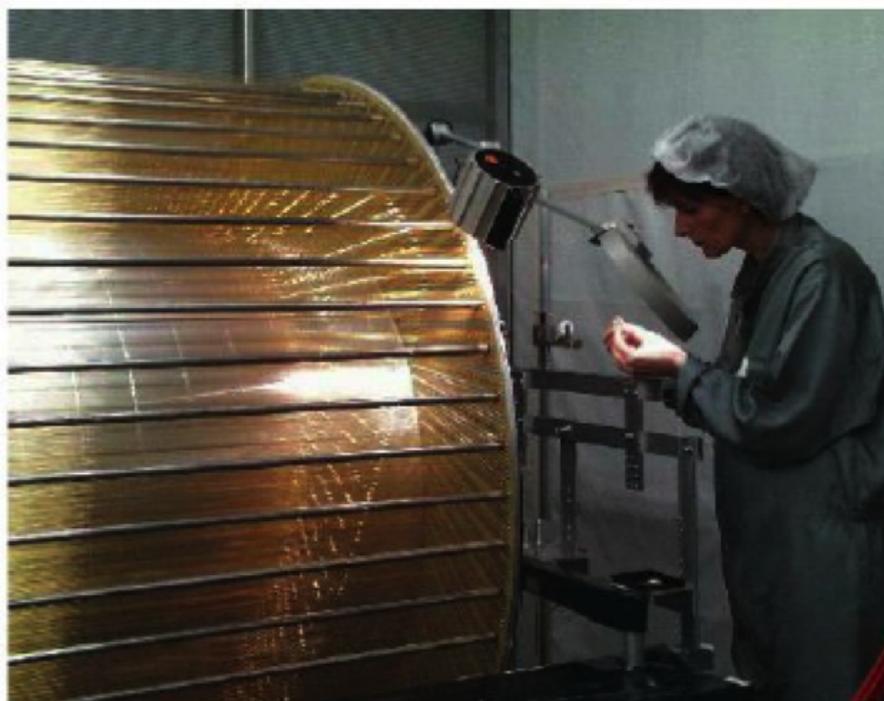
In einem homogenen elektrischen Feld ist - weit entfernt vom Draht - die Driftgeschwindigkeit nahezu konstant (typisch $5 \text{ cm}/\mu\text{s}$). Daher kann aus dem Zeitunterschied zwischen Durchgang des primären Teilchens und Signalankunft am Draht der Abstand des primären Teilchens vom Draht berechnet werden. So können Ortsauflösungen bis zu $100 \mu\text{m}$ erreicht werden.

In Driftkammern wird in der Regel eine Spur an mehreren Dutzend Drähten gemessen, so dass aus der Ortsauflösung je Draht und der Anzahl der Messungen die Messgenauigkeit für den Impuls senkrecht zu den Drähten folgt. Daher werden die Drähte parallel zum Magnetfeld gespannt.

¹⁶ Typisch sind dies entsprechend der Bethe-Bloch-Formel in einem Gas pro cm Weglänge

$$N_e \approx \frac{-dE/dx}{I} \approx \frac{2 \text{ MeV g}^{-1} \text{ cm}^2}{10 \text{ eV}} \cdot 10^{-3} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 200/\text{cm} \quad (\text{C.11})$$

Elektronen, also zu wenig Ladung für normale Elektronik.



H1 Central Jet Chamber

Abb. C.16 Teilansicht der Driftkammer des H1-Experiment am HERA Beschleuniger bei DESY. Die zylinderförmige Kammer umgibt das Strahlrohr. Die Drähte sind entlang der Achse des Zylinders parallel zum Magnetfeld gespannt.

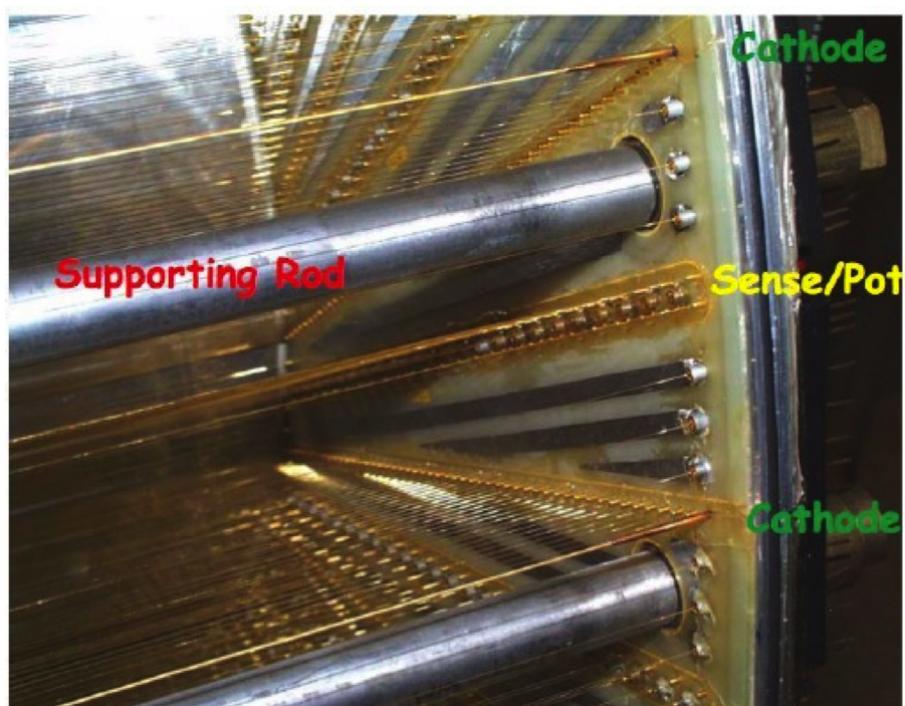
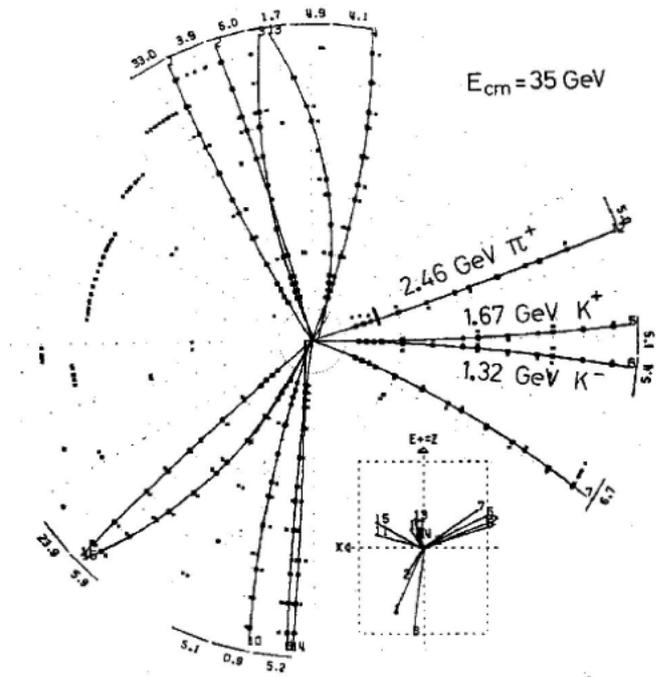


Abb. C.17 Innenansicht der Driftkammer des H1-Experiment am HERA Beschleuniger bei DESY.



22.9.80

Abb. C.18 Ereignis in der Driftkammer des JADE Experiments am PETRA Beschleuniger bei DESY. Man erkennt drei Bündel von Teilchen (Jets). Aus solchen Ereignissen wurde auf die Existenz von Gluonen geschlossen, $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g$.

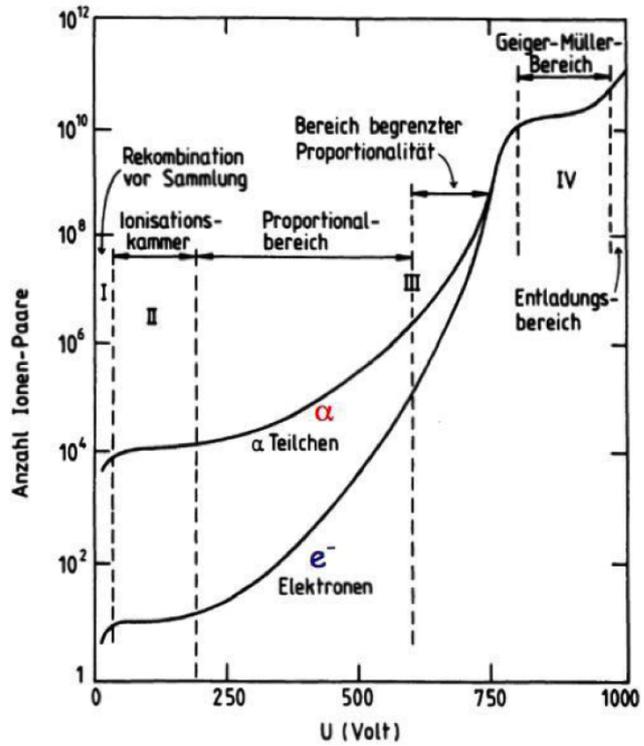


Abb. C.19 Gasverstärkung als Funktion der Anodenspannung bei Gasdetektoren. Je nach Spannung am Draht unterscheidet man Ionisationskammern (ohne Gasverstärkung), Driftkammern mit nahezu linearer Gasverstärkung und Geiger-Müller-Zähler.

TPC: Ein anderes Prinzip wird bei einer "Time Projection Chamber" verfolgt. Hier wird ein starkes elektrisches Feld parallel zum Magnetfeld angelegt. Die primär erzeugten Elektronen und Ionen driften über lange Strecken zu den Enden des Gasvolumens und werden dort über Drahtverstärkung oder andere Mechanismen nachgewiesen. Hierdurch ergibt sich ein zweidimensionales Bild der Teilchenbahnen an den Enden der Kammer. Die Koordinate senkrecht dazu wird aus der Ankunftszeit der Signale an den Enden gemessen, so dass insgesamt ein dreidimensionales Bild entsteht.

Schema der ALICE TPC (CERN)

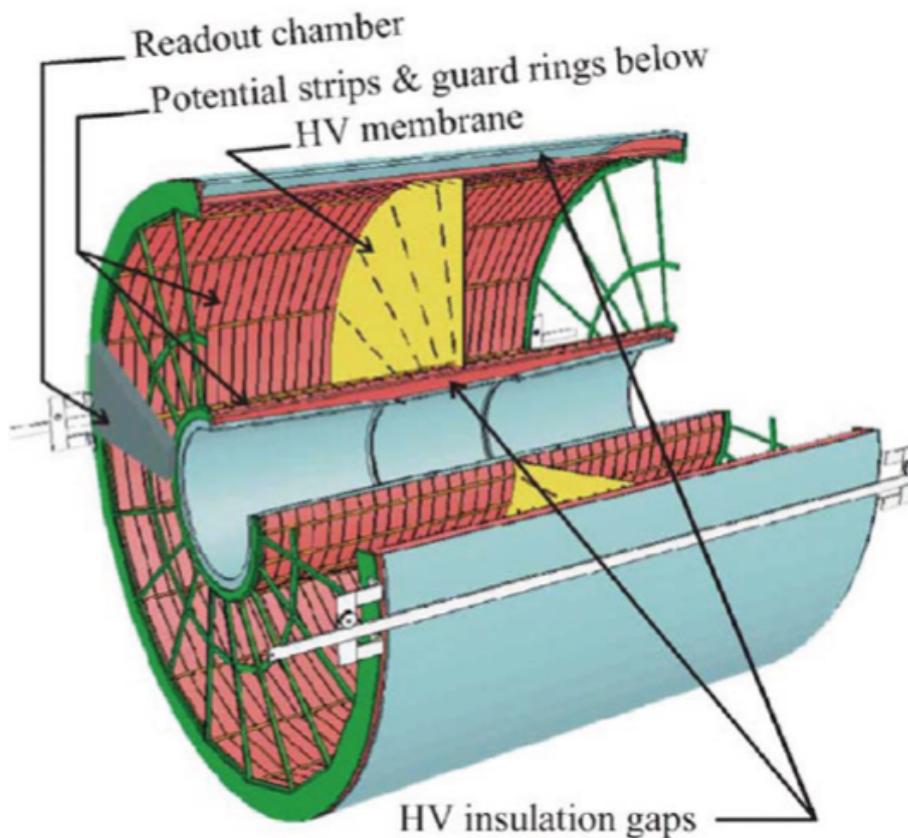


Abb. C.21 Die TPC des ALICE Experiments am LHC am CERN.

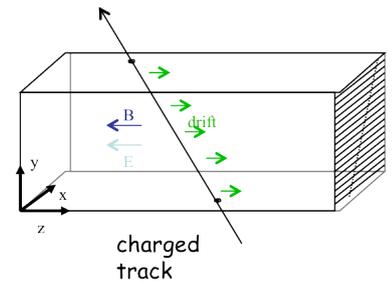


Abb. C.20
Schema einer TPC.

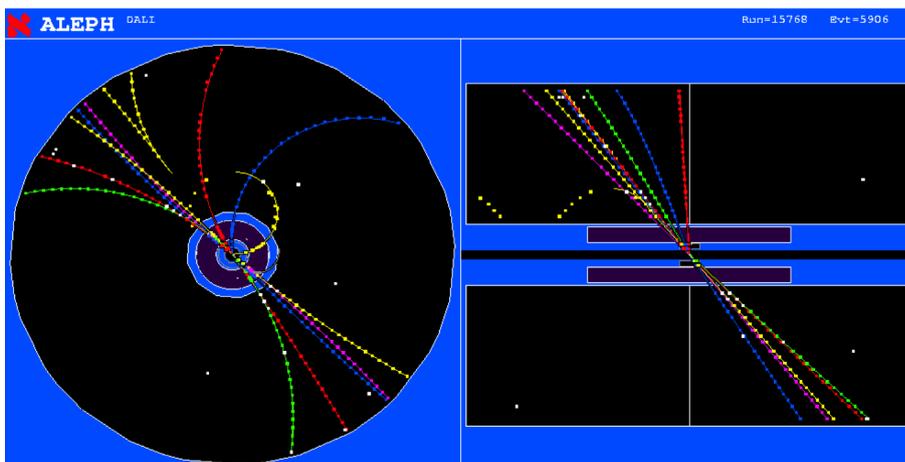


Abb. C.22 Bild eines Ereignisses in der TPC des ALEPH Experiments am LEP Beschleuniger am CERN, $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$.

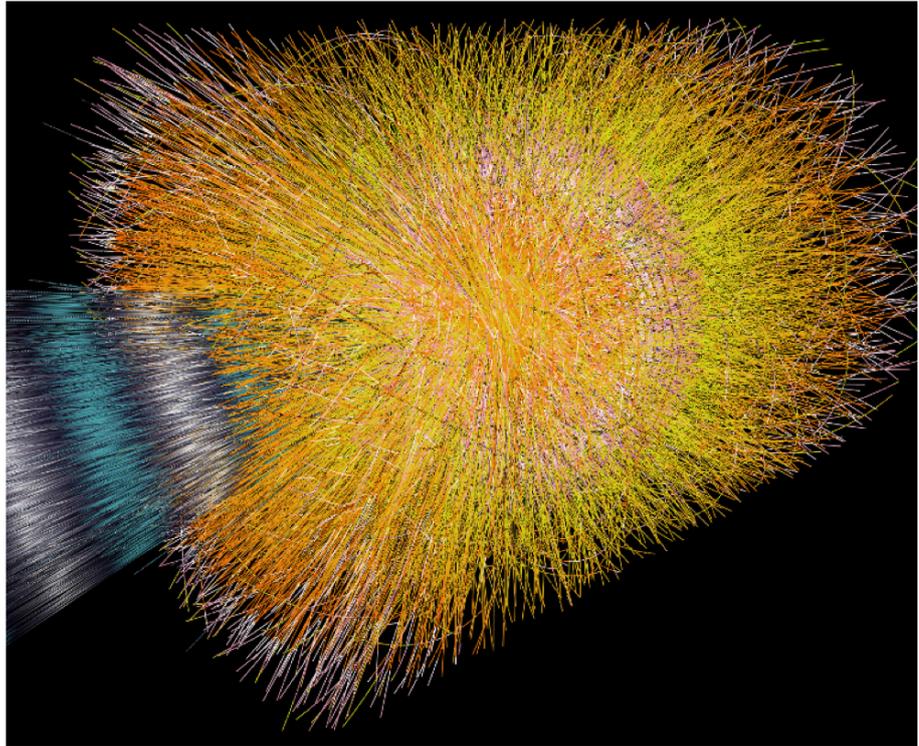


Abb. C.23 Bild eines Ereignisses in der TPC des ALICE Experiments am LHC. Das Bild zeigt die Kollision zweier Gold-Kerne bei TeV Energien je Nukleon.

C.3.4 Halbleiter-Detektoren

Die zentrale Komponente in fast jedem modernen Detektor besteht aus dünnen Halbleitern, die an den Oberflächen durch Metallflächen fein segmentiert sind. Da in Silizium der Bandabstand nur 1.1 eV beträgt, erzeugt ein hochenergetisches Teilchen bereits im Mittel bei einem Energieverlust von $dE/dx = 3\text{ eV}$ ein Elektron-Loch Paar. In typisch 0,3mm dicken Si-Kristallen werden daher von einem MIPS 30000 Elektron-Loch-Paare erzeugt, so dass keine weitere Ladungsverstärkung notwendig ist.

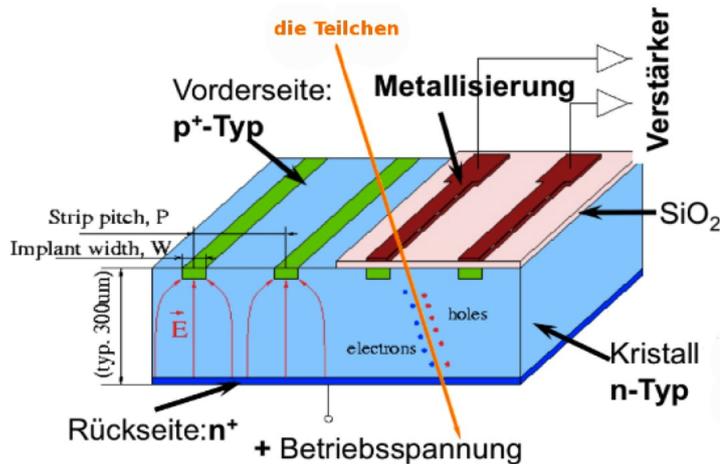


Abb. C.24 Prinzip eines Halbleiter-Detektors.

Die Elektronen (oder Löcher) driften dann durch eine äußere Spannung zu den Metallkontakten. Da die Driftstrecken sehr klein sind, entstehen die Signale in weniger als 10 ns. Da die Metallkontakte fein segmentiert werden können, sind Ortsauflösungen im Bereich $5\ \mu\text{m}$ möglich. Verwendet werden Streifendetektoren und Pixeldetektoren.

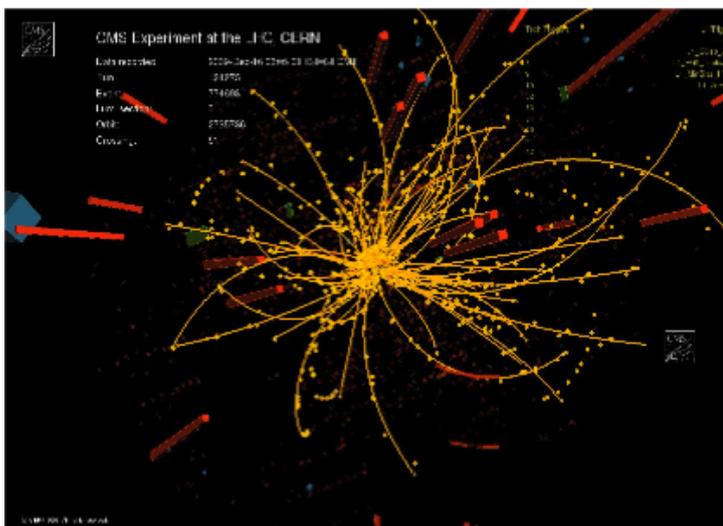


Abb. C.25 Eines der ersten Ereignisse, das am LHC mit dem CMS Silizium-Detektor gemessen wurde.

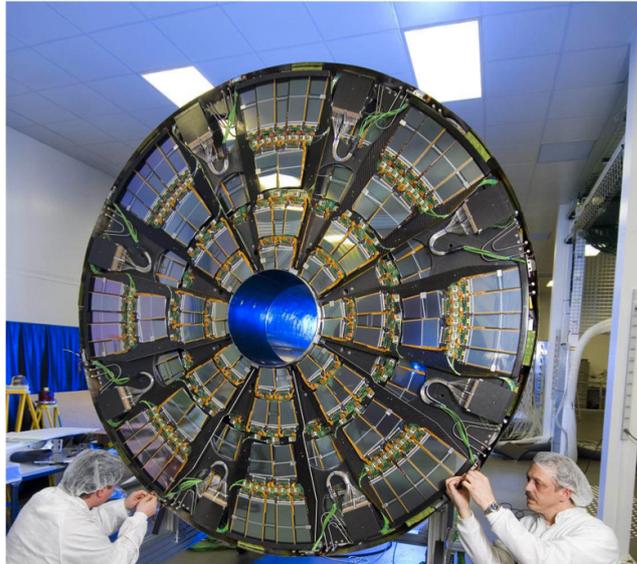


Abb. C.26 Endkappen des CMS Streifendetektors.

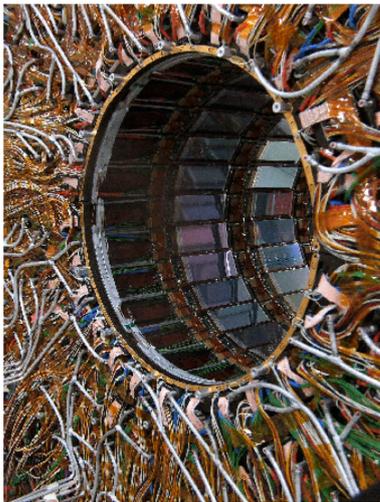


Abb. C.28 Verkabelung des CMS Streifendetektors.



Abb. C.27 Foto des CMS Streifendetektors von innen.

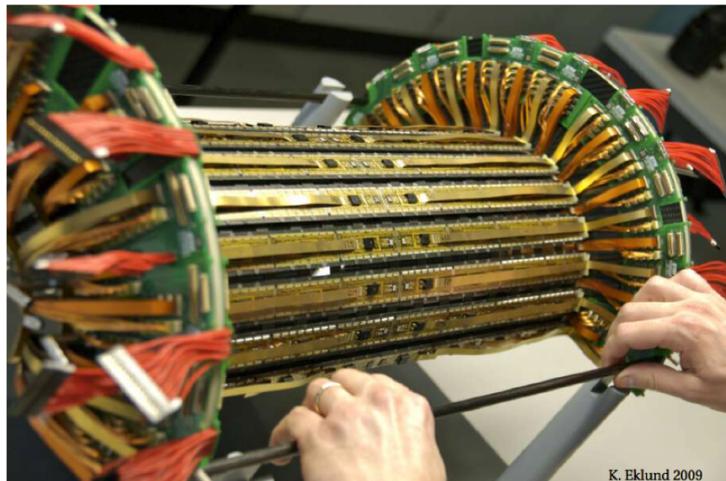


Abb. C.29 CMS Pixel-Detektor.

C.4 Photonen und elektromagnetische Schauer

Photonen wechselwirken mit Atomen hauptsächlich durch Photoeffekt, Compton-Effekt oder Paarbildung.

Photoeffekt: Hierbei wird das Photon absorbiert und überträgt seine Energie E_γ in der Regel auf ein einzelnes Elektron. Ist E_γ größer als die Bindungsenergie, wird das Atom ionisiert.



Der Wirkungsquerschnitt für Photoeffekt zeigt daher charakteristische Kanten in der Energieabhängigkeit, die die Energieniveaus des Atoms kennzeichnen. Der Wirkungsquerschnitt fällt steil mit E_γ und dominiert bei kleinen E_γ .

$$\sigma_{\text{Photo}} \sim Z^5 E_\gamma^{-7/2} \quad \text{für} \quad E_\gamma \ll m_e \quad (\text{C.13})$$

$$\sim Z^5 E_\gamma^{-1} \quad \text{für} \quad E_\gamma \gg m_e \quad (\text{C.14})$$

Compton-Effekt: Bei höheren Energien wird das γ an Elektronen gestreut,

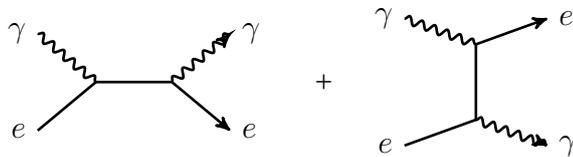


Abb. C.30 Feynman-Diagramme für Compton-Effekt.

Für hohe Energien $E_\gamma \gg m_e$ fällt der Wirkungsquerschnitt mit E_γ ,

$$\sigma_{e\gamma \rightarrow e\gamma} \approx \pi\alpha^2 \frac{1}{m_e E_\gamma} \left(\ln \frac{2E_\gamma}{m_e} + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{C.16})$$

Paarerzeugung: Hierbei erzeugen Photonen im Feld eines Kerns X ein e^+e^- -Paar,



Die Mindestenergie hierfür ist

$$E_\gamma \gtrsim 2m_e \quad (\text{C.18})$$

Ein freies γ kann ohne Stoßpartner nicht in reelle e^+e^- -Paare zerfallen. Der Kern erhält einen Rückstoß. Die Paarbildung ist der dominante Effekt bei großen E_γ . Für $E_\gamma \gg 2m_e$ gilt

$$\sigma_{\text{Pair}} = \frac{7}{9} \frac{1}{X_0 n_k} \quad \Rightarrow \quad I(x) = I_0 e^{-\frac{7}{9} \frac{x}{X_0}} \quad (\text{C.19})$$

Hierbei ist n_K die Dichte der Kerne, $n_K = \frac{\#\text{Kerne}}{\text{Volumen}}$. Der Wirkungsquerschnitt wird also unabhängig von der Photon-Energie.

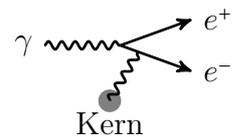


Abb. C.31 Feynman-Diagramm für e^+e^- Paarbildung im Feld eines Kerns.

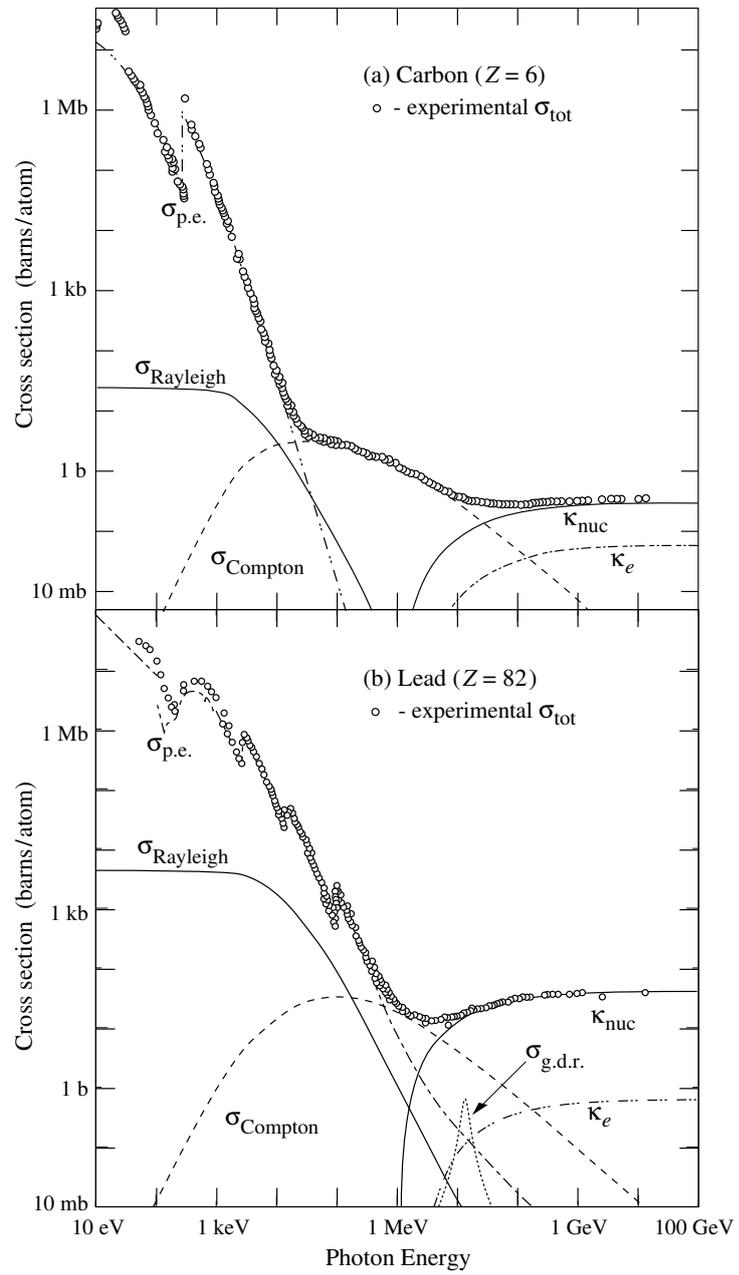


Abb. C.32 Wirkungsquerschnitt für Photonen in Blei.

Abb. C.32 zeigt die Beiträge für Photoeffekt, Compton-Effekt und Paarbildung als Funktion der Energie E_γ .

Elektromagnetische Schauer Bei großen Elektronenergien E_e oder Photonenergien E_γ dominieren Bremsstrahlung und Paarbildung.

$$e^\pm \rightarrow e^\pm \gamma \quad \gamma \rightarrow e^+ e^- \quad (C.20)$$

Es entsteht eine Lawine neuer Teilchen, in der sich diese Prozesse jeweils abwechseln. Erst für Photonen mit $E_\gamma < 2m_e$ entfällt die Paarbildung und Elektronen werden nur noch durch Compton- und Photoeffekt freigesetzt. Für Elektronen mit $E_e < E_c$ wird Bremsstrahlung weniger wichtig als Ionisation, so dass bei kleinen Energien im Schauer insgesamt die Energie durch Ionisation im Detektor deponiert wird. Die typische Anzahl der e^\pm und γ im Schauer ist daher

$$n_{e,\gamma} \approx \text{const} \frac{E}{2m_e} \approx \frac{E}{1\text{MeV}} \quad (C.21)$$

Abb. C.10 zeigt die Photographie eines elektromagnetischen Schauers in einer Blaskammer.

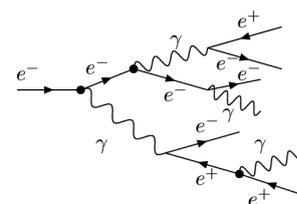


Abb. C.33 Elektromagnetischer Schauer.

C.5 Hadronische Schauer

Hadronen bestehen aus Quarks und Gluonen. Sie reagieren außer durch elektromagnetische und schwache Wechselwirkung auch durch die starke Wechselwirkung mit Atomkernen. Bei elastischen Wechselwirkungen von Hadronen mit dem Detektormaterial wie z.B.

$$p + \text{Kern} \rightarrow p + \text{Kern} \quad (C.22)$$

$$\pi^\pm + p \rightarrow \pi^\pm + p \quad (C.23)$$

wird kinetische Energie auf den Kern beziehungsweise das Proton übertragen, aber es werden keine weiteren Teilchen erzeugt. Oberhalb der Schwellenenergien zur Erzeugung neuer Teilchen überwiegen aber inelastische Reaktionen wie z.B.

$$p + p \rightarrow p + p + \pi^+ + \pi^- \quad (C.24)$$

Durch inelastische Reaktionen werden, wie in Abb. C.34 und Abb. C.35 gezeigt, hadronische Schauer ausgelöst. Die Schauerbildung stoppt, wenn die Schwellenenergien zur Bildung neuer Teilchen unterschritten werden (typisch im GeV Bereich). Diese Energie ist viel höher als die entsprechenden kritischen Energien bei elektromagnetischen Schauern, so dass in hadronischen Schauern nur relativ wenige zusätzliche Teilchen erzeugt werden.

In hadronischen Schauern werden häufig π^0 Mesonen erzeugt, die nach sehr kurzer Zeit in Photonen zerfallen, $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$. Diese erzeugen wiederum durch Paarbildung e^+e^- Paare, so dass in hadronischen Schauern fast immer auch elektromagnetische Schauer vorhanden sind.

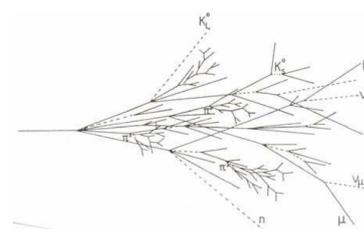


Abb. C.34 Skizze eines hadronischen Schauers.



Abb. C.35 Erzeugung eines Jets aus Hadronen in einer Blaskammer.

Für den Wirkungsquerschnitt für Hadronen in Materialien gilt

$$\sigma = \sigma_{elastisch} + \sigma_{inelastisch} \quad (C.25)$$

Da die Reichweite der starken Wechselwirkung zwischen Hadronen und Kernen sehr klein ist, ergibt sich für die freie Weglänge

$$\lambda = \frac{1}{\sigma n_{Kern}} \quad (C.26)$$

bis zur nächsten hadronischen Wechselwirkung (die Wechselwirkungslänge) z.B für Eisen $\lambda = 17,6 \text{ cm}$. Die Strahlungslänge in Eisen zum Vergleich beträgt $1,8 \text{ cm}$. Hadronische Schauer bilden sich in Materialien also typisch erst viel tiefer im Material.

C.6 Kalorimeter

Die Energiemessung von Elektronen und Photonen erfolgt bei hohen Energien durch die Messung ihrer elektromagnetischen Schauer. Die vielen hierbei entstehenden e^\pm und Photonen deponieren gegen Ende des Schauers ihre Energie in Form von Ionisation und Anregung von Atomen. Es ist ausreichend, diese Energie in ihrer Summe zu messen, so dass relativ grob strukturierte Detektoren verwendet werden können. Günstig sind Materialien mit hoher Kernladungszahl Z .

In hadronischen Schauern werden weniger neue Teilchen erzeugt, aber auch hier gilt das Prinzip, dass sich die zu messende Energie der ursprünglichen Hadronen durch die Summe der im Detektor deponierten Energien (Ionisation, Photonen, ..) rekonstruieren lässt.

Wichtig ist in jedem Fall, dass alle Energie der Teilchen absorbiert werden muss. Hierfür werden Kalorimeter verwendet, die ausreichend hohe Dichte und Kernladungszahl haben und mehrere Meter dick sind.

Einfache Detektoren für Kalorimeter sind Szintillatoren. Diese bestehen z.B. aus Plexiglas oder anderen Materialien, in denen Anregungsenergien effizient in Form von Licht abgegeben werden. Häufig haben diese Materialien aber eine zu kleine Dichte und Kernladungszahl, so dass sie z.B. zwischen dünnen Bleiplatten als Absorber eingefügt werden. In diesen findet dann die Schauerbildung statt und die entstehenden Teilchen werden in den Szintillatorplatten gemessen. Hierbei bleibt aber immer die im Absorber deponierte Energie nicht messbar, so dass die relative Auflösung der Energiemessung für elektromagnetische Schauer ca.

$$\frac{\delta E}{E} \approx \frac{10\%}{\sqrt{E/\text{GeV}}} \quad (C.27)$$

und für hadronische Schauer

$$\frac{\delta E}{E} \approx \frac{70\%}{\sqrt{E/\text{GeV}}} \quad (C.28)$$

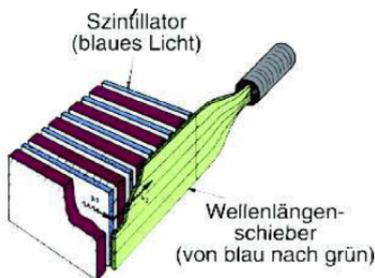


Abb. C.36
Schema eines Hadron-Kalorimeters mit Szintillatoren und Eisenplatten.

beträgt.

Speziell für elektromagnetische Schauer eignen sich Bleiglas oder transparente Kristalle aus schweren Elementen. Das CMS Experiment am LHC benutzt Kristalle aus $PbWO_4$. In ihnen ist die Dichte fast wie in Blei, so dass auch Elektronen oder Photonen mit 10^3 GeV Energie auf ca. 20 cm Länge komplett absorbiert werden. Die Energieauflösung beträgt etwa $2,5\%/\sqrt{E/\text{GeV}}$.

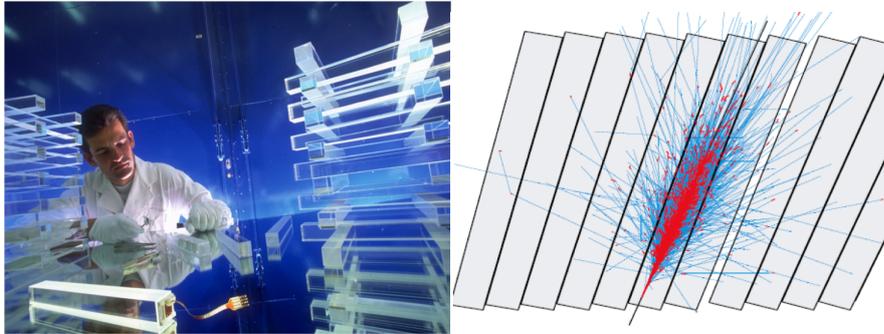


Abb. C.37 Elektromagnetisches Kalorimeter des CMS Experiments (links) und Simulation eines elektromagnetischen Schauers in mehreren Kristallen (rechts).

C.7 Detektorkonzepte und Identifizierung von Teilchen

Zur Energie und Impulsbestimmung stehen verschiedene Detektortypen zur Verfügung:

- Der Impuls kann für geladene Teilchen durch die Kreisbahn im Magnetfeld, also durch Spurdetektoren, bestimmt werden.
- Die Energie kann in Kalorimetern für alle langlebigen Teilchen außer Muonen und Neutrinos gemessen werden.
- Flugzeitmessungen können benutzt werden, um die Geschwindigkeit zu messen. Falls die Geschwindigkeit klein genug ist, kann hieraus direkt γ und $\gamma\beta$ und damit bei bekannter Masse auch Energie und Impuls bestimmt werden.
- Cherenkov-Detektoren nutzen aus, dass Teilchen mit Geschwindigkeit $v > n \cdot c$ in Materialien mit optischem Brechungsindex n eine charakteristische Strahlung aussenden. Auch damit können bei Teilchensorten identifiziert werden.

Im Umkehrschluß kann aus zwei dieser drei Messungen über die Beziehung

$$m^2 = E^2 - \vec{p}^2$$

auch die Masse bestimmt und damit das Teilchen identifiziert werden. Bei hohen Energien geht das allerdings nicht mehr, da die relativen Unterschiede zwischen Energie und Impuls kleiner als die

Messfehler werden, und die Masse so nicht mehr genau genug bestimmt werden kann.

Die wichtigsten Teilchen unterscheiden sich aber auch in ihrer Wechselwirkung mit Detektormaterialien.

Elektronen und Photonen erzeugen elektromagnetische Schauer, die in Materialien mit hohem Z schnell abklingen und hohe Teilchendichten haben.

Muonen dagegen machen fast keine Bremsstrahlung und keine hadronischen Wechselwirkungen und durchdringen daher auch mehrere Meter Material mit nur wenigen GeV Energieverlust.

Schwere Teilchen wie b -Quarks, c -Quarks und τ -Leptonen haben Lebensdauern im $c\tau \approx \text{mm}$ - Bereich und können über ihre Wegstrecke zum Zerfallsvertex identifiziert gefunden werden. Noch kurzlebigere Teilchen (W, Z, t, H) sind oft durch charakteristische Zerfallsprodukte und die Rekonstruktion ihrer Massen zu identifizieren.

Moderne Teilchendetektoren an hochenergetischen Beschleunigern machen sich diese Unterschiede zu Nutze. Sie bestehen (wie eine Zwiebel) aus mehreren Schichten von innen nach außen:

- Innen werden hochauflösende Spurdetektoren (z.B. Pixel-Detektoren) verwendet, um Zerfallslängen kurzlebiger Teilchen zu messen.
- Etwas weiter außen werden Spurdetektoren aus mehreren Lagen (Drähte oder Si-Detektoren) verwendet, um im Magnetfeld Impulse zu messen. Hierzu sind bei hohen Impulsen Teilchenbahnen mit einer Länge im Meter-Bereich notwendig. Alle diese Spurdetektoren müssen aus wenig Material mit kleiner Kernladungszahl bestehen, um möglichst Energieverluste oder gar Schauer der zu messenden Teilchen zu vermeiden, die die Impulsmessung stören würden.
- Ein elektromagnetisches Kalorimeter außerhalb des Spurkammer-Bereichs folgt weiter außen. Es muss aus Materialien mit hoher Kernladungszahl bestehen, da hierfür $X_0 \ll \lambda_{\text{hadronisch}}$ ist. Hierdurch werden kurze elektromagnetische Schauer erzeugt, während hadronische Schauer mit großer Wahrscheinlichkeit erst später beginnen und tiefer eindringen. Dies ist das wichtigste Kriterium zu Identifizierung von Photonen und Elektronen.
- Weiter außen folgt ein hadronisches Kalorimeter mit einer Dicke von 1-2 Metern, um hadronische Schauer komplett zu absorbieren.
- Umgeben ist dieser Aufbau zumeist von einer supraleitenden Solenoid-Spule, die ein Magnetfeld von mehreren Tesla parallel zur Strahlachse erzeugt.

- Als Rückflußjoch für das Magnetfeld dienen massive Stahlplatten weiter außen. Sie sind mit mehreren Lagen aus Driftkammern oder anderen Spurdetektoren versehen, um Muonen nachzuweisen, die als einzige Teilchensorte so viel Material durchdringen kann.

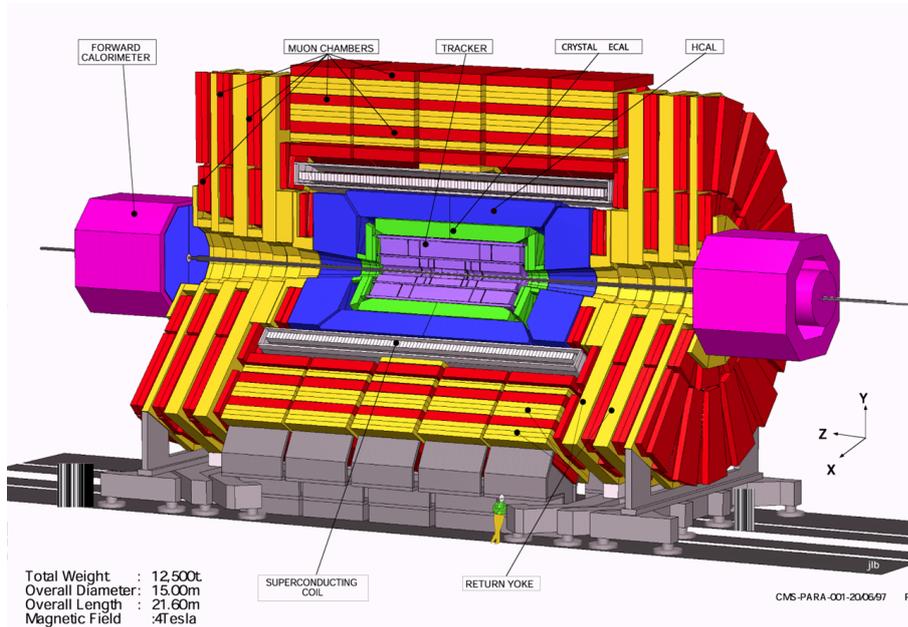


Abb. C.38 Schnitt durch den CMS-Detektor.

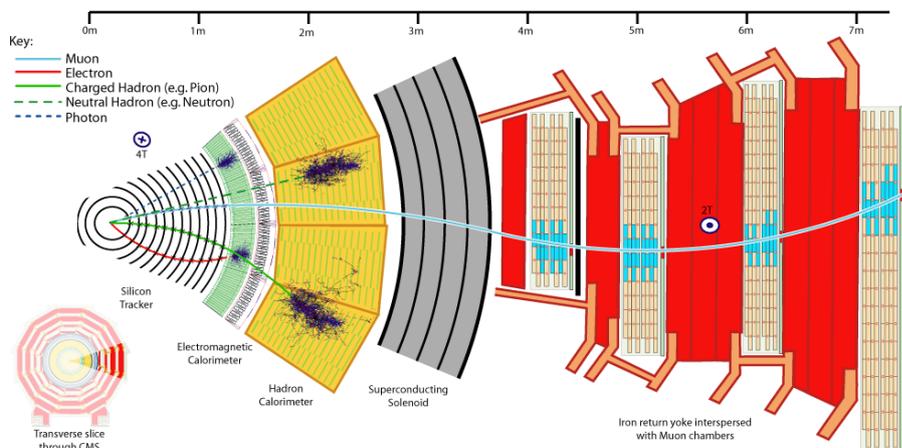


Abb. C.39 Schnitt durch den CMS-Detektor. Zu sehen ist die Reaktion verschiedener Teilchen in den inneren Si-Detektoren, dem elektromagnetischen und hadronischen Kalorimeter sowie dem Muon-System.

D Dirac-Gleichung

D.1 Kovariante Form und Hamilton

Im Folgenden wird die relativistische Schreibweise benutzt für 4-er Impulse und 4-er Ableitungen

$$p^\mu = \begin{pmatrix} E \\ \vec{P} \end{pmatrix} \quad \partial_\mu = \begin{pmatrix} \partial_t \\ -\vec{\nabla} \end{pmatrix}_\mu \quad (\text{D.1})$$

Der 4-er Impulsoperator ist dann $(E = i\partial_t, \vec{P} = -i\vec{\nabla})$

$$p^\mu = i\partial^\mu = i \begin{pmatrix} \partial_t \\ -\vec{\nabla} \end{pmatrix}^\mu \quad (\text{D.2})$$

Damit ist die Dirac-Gleichung

$$\boxed{(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0} \quad (\text{D.3})$$

Hierbei sind die 4 Komponenten von $\gamma^\mu = (\gamma^0, \vec{\gamma})$ zunächst unbekannte mathematische Objekte. Da die $i\partial_\mu$ aber Komponenten des Impulsoperators sind und Impuls und Masse die gleiche Dimension haben, können die γ^μ keine Dimension haben und müssen daher Konstanten sein. Im Folgenden soll gezeigt werden:

- Aus den vier Raum-Zeit-Dimensionen folgt, dass jede der γ^μ eine 4x4 Matrix und Ψ ein 4-komponentiger "Spinor" ist.
- Die vier γ^μ können so bestimmt werden, dass jede der 4 Komponenten von Ψ die relativistische Klein-Gordon Gleichung erfüllt.
- Die Gleichung beschreibt Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen
- Die Gleichung sagt Anti-Teilchen voraus.

Forderung nach relativistischer Invarianz

Die Dirac-Gleichung soll für ebene Wellen die relativistische Energie-Impulsbeziehung $E^2 - \vec{P}^2 - m^2 = 0$ erfüllen.

Wendet man $-(i\gamma^\nu \partial_\nu + m)$ von links auf die Dirac-Gleichung an, so erhält man

$$(\gamma^\nu \partial_\nu \gamma^\mu \partial_\mu + m^2)\Psi = (\gamma^\nu \gamma^\mu \partial_\nu \partial_\mu + m^2)\Psi = 0 \quad (\text{D.4})$$

Vertauschung der Summationsindizes $\mu \leftrightarrow \nu$ ergibt $(\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu + m^2)\Psi = 0$. Addiert man beide Gleichungen so erhält man

$$\left(\frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) \partial_\mu \partial_\nu + m^2\right)\Psi = 0 \quad (\text{D.5})$$

Dies ist genau dann die Klein-Gordon Gleichung $(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\Psi = 0$, wenn

$$(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) = 2 \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}^{\mu\nu}$$

ist, oder kurz

$$\boxed{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}} \quad (\text{D.6})$$

Diese Clifford-Algebra ist eine notwendige Bedingung für Lorentz-Invarianz. Aus ihr folgt insbesondere

Clifford-Algebra

$$(\gamma^0)^2 = 1, \quad (\gamma^i)^2 = -1 \quad \text{für } i = 1, 2, 3 \quad (\text{D.7})$$

Multipliziert man die Dirac-Gleichung $(i\gamma^0 \partial_t + i\vec{\gamma} \vec{\nabla} - m)\Psi = 0$ von links mit γ^0 und benutzt $(\gamma^0)^2 = 1$, so folgt

$$\boxed{H\Psi = i\partial_t\Psi = -i\gamma^0 \vec{\gamma} \vec{\nabla}\Psi + m\gamma^0\Psi} \quad (\text{D.8})$$

Der Hamiltonoperator der Dirac-Gleichung ist also

$$H = \gamma^0 \vec{\gamma} \vec{P} + m\gamma^0 \quad (\text{D.9})$$

D.2 Bestimmung der γ -Matrizen

Wegen den Antikommutator-Beziehungen in Gl. D.6 sind die γ^μ keine einfachen Zahlen. Dirac hatte die Idee, vier verschiedene $n \times n$ Matrizen anzusetzen. Wiederum aus Gl. D.6 folgt dann für die Spur (Tr)¹⁷ und die Hermitezität¹⁸ der Matrizen

$$\text{Tr}(\gamma^\mu) = 0 \quad (\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 \quad (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i \quad (\text{D.10})$$

Man kann zeigen, dass für $n = 2, 3, 5, 7, \dots$ keine Matrizen diese Kriterien erfüllen.

- $n = 2$: Die drei Pauli-Matrizen σ_i bilden bereits einen vollständigen Satz von spurlosen, antikommutierenden 2×2 Matrizen. Für $\gamma^i = \sigma^i$ müsste sich γ^0 damit als eine Linearkombination der Pauli-Matrizen und der I_2 ausdrücken lassen. Eine solche Matrix antikommutiert aber nicht mit den Pauli-Matrizen. Daher kann für $n = 2$ die Clifford-Algebra Gl. D.6 nicht erfüllt sein.

¹⁷ Für $\mu \neq 0$ gilt z.B. $\gamma^\mu \gamma^0 = -\gamma^0 \gamma^\mu$ und damit $\gamma^\mu = -\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$ sowie $\text{Tr}(\gamma^\mu) = -\text{Tr}(\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0) = -\text{Tr}(\gamma^0 \gamma^0 \gamma^\mu) = -\text{Tr}(\gamma^\mu)$, so dass $\text{Tr}(\gamma^\mu) = 0$. Hier wurde benutzt, dass man die Reihenfolge der Matrizen unter einer Spur zyklisch vertauscht werden darf, $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

¹⁸ Da der Hamiltonoperator H in Gl. D.9 links hermitesch sein muss, sind auch die Matrizen rechts hermitesch, also $\gamma^0 = (\gamma^0)^\dagger$ und $\gamma^0 \gamma^i = (\gamma^0 \gamma^i)^\dagger = (\gamma^i)^\dagger (\gamma^0)^\dagger$. Multipliziert man die letztere Gleichung von links mit γ^0 und benutzt $(\gamma^0)^2 = 1$, folgt außerdem $\gamma^i = \gamma^0 (\gamma^i)^\dagger \gamma^0 = -(\gamma^i)^\dagger \gamma^0 \gamma^0 = -(\gamma^i)^\dagger$.

- $n = 3, 5, \dots$ (ungerade): Da γ^0 hermitesch und $(\gamma^0)^2 = 1$ ist, sind die Eigenwerte von γ^0 gleich ± 1 . Wegen $\text{Tr}(\gamma^0) = 0$ müssen gleich viele Eigenwerte mit $+1$ wie mit -1 auftreten, so dass nur eine gerade Anzahl von Eigenwerten möglich ist. Damit ist n gerade.

Die kleinste mögliche Dimension der γ -Matrizen ist also 4×4 . Damit ist die Dirac-Gleichung zu lesen als

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m I_4)\Psi = 0_4$$

Hier ist Ψ ein vier-komponentiger Spinor,

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} \quad (\text{D.11})$$

Jede der Komponenten von Ψ erfüllt getrennt die Klein-Gordon Gleichung. Für eine ebene Welle

$$\Psi = \Psi_0 e^{-ipx} \quad (\text{D.12})$$

erfüllt jede Komponente die Gleichung $E^2 - \vec{P}^2 - m^2 = 0$.

Eine der möglichen expliziten Darstellungen der γ -Matrizen, die die Clifford-Algebra erfüllt, ist die Pauli-Dirac Form,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.13})$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.14})$$

Man benutzt aber meistens die standard Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.15})$$

um die 4×4 Matrizen in etwas übersichtlicherer 2×2 Form zu schreiben:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & \\ & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} & \sigma_i \\ -\sigma_i & \end{pmatrix} \quad \text{für } i = 1, 2, 3 \quad (\text{D.16})$$

Hier ist I die 2×2 Einheitsmatrix.

D.3 Lösungen der Dirac-Gleichung

Wir betrachten die Dirac-Gleichung in der Form von Gl. D.8,

$$H\Psi = i\partial_t\Psi = -i\gamma^0\vec{\gamma}\vec{\nabla}\Psi + m\gamma^0\Psi \quad (\text{D.17})$$

In Matrixschreibweise lautet sie

$$\begin{pmatrix} i\partial_t & \\ & i\partial_t \end{pmatrix} \Psi = \begin{pmatrix} & \vec{\sigma}\vec{P} \\ \vec{\sigma}\vec{P} & \end{pmatrix} \Psi + \begin{pmatrix} m & \\ & -m \end{pmatrix} \Psi \quad (\text{D.18})$$

Für ein freies Teilchen wird eine ebene Welle

$$\Psi = u(E, \vec{P}) e^{-i(Et - \vec{P}\vec{x})} \quad (\text{D.19})$$

als Lösung erwartet. Betrachtet wird zunächst ein Teilchen in seinem eigenen Ruhesystem, d.h. $\vec{P} = 0$. Eine Lösung der Dirac-Gleichung ist zum Beispiel

$$\Psi^{(1)} = u^{(1)} e^{-imt} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt} \quad (\text{D.20})$$

denn $i\partial_t \Psi^{(1)} = H\Psi^{(1)} = m\Psi^{(1)}$. Der Hamiltonoperator hat also als Eigenwert die Masse, wie erwartet für ein ruhendes Teilchen. Das gleiche gilt für die 2. Lösung $u^{(2)} = (0, 1, 0, 0)^T$. Für $u^{(3)} = (0, 0, 1, 0)^T$ und $u^{(4)} = (0, 0, 0, 1)^T$ jedoch führt das Vorzeichen der Masse in Gl. D.18 zur Lösung

$$\Psi^{(3)} = u^{(3)} e^{+imt} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{+imt} \quad (\text{D.21})$$

Die Energie als Eigenwert des Hamiltonoperators ist dann jedoch negativ, $i\partial_t \Psi^{(3)} = H\Psi^{(3)} = -m\Psi^{(3)}$ und kann so nicht direkt interpretiert werden. Eine Lösung hierzu findet man, wenn man die Dirac-Gleichung komplex konjugiert, so dass $i\partial_t$ und $P = -i\nabla$ sowie γ^2 ihr Vorzeichen relativ zum Massenterm ändern. Um zu verhindern, dass γ^2 und damit die Impulskomponente P_2 eine Sonderrolle einnehmen, muss anschliessend von links mit γ^2 multipliziert werden, und dann γ^2 nach rechts durchgeschoben werden.

Aufgabe D.1: Zeigen Sie, dass

$$\Psi_c = i\gamma^2 \Psi^* \quad (\text{D.22})$$

die standard Form der Dirac-Gleichung erfüllt:

$$i\partial_t \Psi_c = -i\gamma^0 \vec{\gamma} \nabla \Psi_c + m\gamma^0 \Psi_c \quad (\text{D.23})$$

Beachten Sie dabei die Antikommutator-Relation der γ -Matrizen ($\gamma^2 \gamma^\mu = -\gamma^\mu \gamma^2$ für $\mu \neq 2$).

Die beiden Komponenten $\Psi_c^{(1,2)}$ erfüllen also ebenso wie $\Psi^{(1,2)}$ die Bedingung $E = m$ für ($\vec{P} = 0$). Nun ist aber

$$i\gamma^2 (\Psi_c^{(1)})^* = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ipx} \right)^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ipx} = \Psi^{(4)}$$

Ebenso gilt $\Psi_c^{(2)} = -\Psi^{(3)}$. Damit gibt es also die vier physikalisch interpretierbaren Lösungen $\Psi^{(1)}, \Psi^{(2)}, \Psi_c^{(1)}, \Psi_c^{(2)}$.

Der Unterschied der Lösungen Ψ und Ψ_c ergibt sich, wenn man die Dirac-Gleichung einschliesslich Elektromagnetismus (oder jeder anderen Eichwechselwirkung) untersucht (Gl. ??

$$[i\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) - m] \Psi = 0 \quad (\text{D.24})$$

Hierfür erzeugt komplex konjugieren und mit γ^2 multiplizieren ein relatives Minuszeichen zwischen ∂_μ und iqA_μ . Daher lautet die resultierende Gleichung für Ψ_c

$$[i\gamma^\mu(\partial_\mu - iqA_\mu) - m] \Psi_c = 0 \quad (\text{D.25})$$

Die Bewegungsgleichung für die Lösungen Ψ und Ψ_c unterscheiden sich also gerade um das Vorzeichen des Terms mit der Ladung q . Dies gilt für alle Ladungen aller Eichwechselwirkungen. Daher werden die Lösungen Ψ als Felder der Teilchen und die Lösungen Ψ_c als Felder der zugehörigen Antiteilchen bezeichnet. Teilchen und zugehörige Antiteilchen haben die gleiche Masse m .

Anti-Teilchen

D.4 Drehimpuls und Spin

Für ein abgeschlossenes System wie ein einzelnes Dirac-Teilchen muss der Gesamtdrehimpuls erhalten sein und daher mit dem Hamilton-Operator

$$H = \gamma^0 \gamma^i P^i + m\gamma^0 \quad (\text{D.26})$$

aus Gl. D.9 kommutieren. Für den Operator des Bahn-Drehimpulses definiert als

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} \quad (\text{D.27})$$

findet man jedoch¹⁹

$$[H, \vec{L}] = \gamma^0 \gamma^i [P^i, \vec{r} \times \vec{P}] + m[\gamma^0, \vec{r} \times \vec{P}] \quad (\text{D.28})$$

$$= -i\gamma^0 \vec{\gamma} \times \vec{P} \quad (\text{D.29})$$

Es muss also außer dem Bahndrehimpuls einen weiteren Beitrag zum Gesamtdrehimpuls geben, der Eigendrehimpuls oder *Spin* \vec{S}

¹⁹Die γ -Matrizen wirken im Spinorraum, der nichts mit dem Orts- oder Impulsvektorraum zu tun hat. Sie kommutieren daher mit den Operatoren \vec{r} und \vec{P} . Daher ist z.B.

$$[\gamma^0 \gamma^i P^i, \vec{r} \times \vec{P}] = \gamma^0 \gamma^i [P^i, \vec{r} \times \vec{P}]$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \gamma^i [P^i, \epsilon_{klm} x^l P^m] &= \gamma^i \epsilon_{klm} (x^l [P^i, P^m] + [P^i, x^l] P^m) \\ &= -i\gamma^i \epsilon_{klm} \delta_{il} P^m = -i\vec{\gamma} \times \vec{P} \end{aligned}$$

genannt wird. Einen ganz ähnlichen Ausdruck wie für $[H, L_i]$ findet man für eine Matrix, die nicht vom Impuls oder Bahndrehimpuls abhängt und daher ein Eigendrehimpuls sein kann,

$$\Sigma^i = \begin{pmatrix} \sigma^i & \\ & \sigma^i \end{pmatrix} \quad \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & \\ & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad (\text{D.30})$$

denn²⁰

$$[H, \vec{\Sigma}] = 2i\gamma^0 \vec{\gamma} \times \vec{P} \quad (\text{D.31})$$

Damit der Gesamtdrehimpuls \vec{J}

$$\boxed{\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}} \quad (\text{D.32})$$

mit dem Hamilton-Operator kommutiert, $[H, \vec{J}] = 0$, muss der Spin-Operator festgelegt werden zu

$$\boxed{\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\Sigma}} \quad (\text{D.33})$$

Im Ruhesystem des Teilchens ($\vec{P} = 0$) ergibt sich Der Spin der Lösung $u^{(1)}$ entlang der z -Achse zu

$$S_z u^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 & \\ & \sigma_3 \end{pmatrix} u = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = +\frac{1}{2} u^{(1)}$$

Daher beschreibt die Dirac-Gleichung Spin 1/2 Teilchen. Insgesamt findet man

Spin $\pm \frac{1}{2}$

$$S_z u^{(1)} = +\frac{1}{2} u^{(1)} \quad S_z u^{(2)} = -\frac{1}{2} u^{(2)} \quad (\text{D.34})$$

$$S_z u_c^{(1)} = +\frac{1}{2} u_c^{(1)} \quad S_z u_c^{(2)} = -\frac{1}{2} u_c^{(2)} \quad (\text{D.35})$$

D.5 Helizität und Chiralität

Helizität Spinoren sind im Allgemeinen keine Eigenzustände des Spin-Operators. Für Teilchen, die sich in $+z$ - Richtung bewegen, sind die Spinoren jedoch Eigenzustände von S_z . Es wird daher der Helizitätsoperator definiert,

$$\lambda = \frac{\vec{S} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} = \frac{1}{2|\vec{p}|} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \vec{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \vec{p} \end{pmatrix}$$

der die Spin-Komponente parallel zum Impuls \vec{p} beschreibt. Helizität ist bedeutsam, weil der Spin zur Drehimpulserhaltung beiträgt.

Helizität von Fermionen:

$$\begin{aligned} \lambda = +\frac{1}{2} &\Rightarrow \vec{S} \text{ parallel } \vec{P} \\ \lambda = -\frac{1}{2} &\Rightarrow \vec{S} \text{ entgegen } \vec{P} \end{aligned}$$

²⁰ $[H, \vec{\Sigma}]$ beinhaltet Ausdrücke wie $[\gamma^0 \gamma^i P^i, \Sigma_j]$. Gleichung D.31 folgt daher aus

$$[\gamma^0 \gamma^i, \Sigma_j] = \left[\begin{pmatrix} \sigma_i & \\ & \sigma_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_j & \\ & \sigma_j \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} [\sigma_i, \sigma_j] & \\ & [\sigma_i, \sigma_j] \end{pmatrix} = 2i\epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma_k & \\ & \sigma_k \end{pmatrix} = 2i\epsilon_{ijk} \gamma^0 \gamma^k$$

Chiralität (= Händigkeit) Es wird eine Matrix γ^5 definiert als (in Pauli-Dirac-Darstellung)

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & & \\ & & & \\ 1 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\gamma^5)^2 = 1 \quad (\text{D.36})$$

Daraus werden zwei Chiralitäts - Projektionsoperatoren definiert,

$$P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \quad \text{und} \quad P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)$$

Aufgabe D.2: Zeigen Sie, dass P_L und P_R orthogonale Zustände eines Spinors selektieren, d.h. dass

$$P_L(P_R u) = 0, \quad P_L(P_L u) = P_L u \quad (\text{D.37})$$

Nach Anwendung auf beliebige Spinoren entstehen

$$\text{linkshändiges Teilchen: } u_L = P_L u \quad (\text{D.38})$$

$$\text{rechtshändiges Teilchen: } u_R = P_R u \quad (\text{D.39})$$

Damit gilt auch

$$\boxed{u = u_L + u_R} \quad (\text{D.40})$$

Insgesamt beschreibt damit der Spinor zum Beispiel eines Elektrons vier fundamentale Zustände,

$$\boxed{e_L^-, e_R^-, e_L^+, e_R^+} \quad (\text{D.41})$$

Die Wahrscheinlichkeit, bei einem rechtshändigen Zustand den Spin parallel zum Impuls zu messen, ist gleich der Geschwindigkeit β .

	$\lambda = -\frac{1}{2}$	$\lambda = +\frac{1}{2}$
linkshändig e_L	β	$1 - \beta$
rechtshändig e_R	$1 - \beta$	β

Damit sind im ultrarelativistischen Grenzfall, $E \gg m$, $E \approx p$, Teilchen mit positiver Helizität nahezu rechtshändig und Teilchen mit negativer Helizität nahezu linkshändig. Dies ist aber falsch bei kleineren Geschwindigkeiten.

D.6 Chiralitätserhaltung an Vertizes mit Vektorströmen

Chiralität (oder Händigkeit) spielt eine große Rolle, weil sie für Vektorströme an jedem Vertex eines Feynman-Diagramms erhalten bleibt.

Aufgabe D.3: Zeigen Sie, dass der *Strom*

$$j^\mu = u^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu u \quad (\text{D.42})$$

mit der Dichte $\rho = j_0$ die Kontinuitätsgleichung erfüllt:

$$\partial_\mu j^\mu = \partial_t \rho + \nabla \vec{j} = 0 \quad (\text{D.43})$$

Aufgabe D.4: Zeigen Sie, dass $u_L^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu u_R = 0$ ist, und dass daher auch

$$u^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu u = \underbrace{(u_L)^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu u_L + (u_R)^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu u_R} \quad (\text{D.44})$$

Es treten daher also bei γ^μ Kopplungen wie in den Eichtheorien keine Übergänge von $u_L \leftrightarrow u_R$ auf.

Da der Strom insgesamt erhalten bleibt und keine gemischten Terme $u_R \rightarrow u_L$ auftreten bedeutet dies, dass ein in einen Prozess einlaufendes linkshändiges Teilchen auch linkshändig die Reaktion verlässt, und ebenso für ein rechtshändiges Teilchen. Dies stellt eine wichtige Einschränkung für die erlaubten Helizitäts- Kombinationen in Prozessen dar. In der QCD und der schwachen Wechselwirkung gilt dies ebenso wie in der QED. Da die Chiralität für ultrarelativistische Teilchen auch die Helizität und damit den Spin festlegt, folgen hieraus bereits Grundeigenschaften der Wirkungsquerschnitte.

Zu beachten ist, dass bei Higgs-Wechselwirkungen keine γ^μ Kopplungen auftreten.

Jahr	Name	Begründung
2013	F.Englert, P. Higgs	Higgs-Mechanismus
2008	Y. Nambu, M. Kobayashi, T. Masukawa	Spontane Symmetrie-Brechung 6 Quarks, CKM-Matrix
2004	D. Gross, D. Politzer, F. Wilczek	Asymptotische Freiheit in der QCD
2002	R. Davis, M. Koshiba	Neutrino-Oszillationen
1999	G. t'Hooft, M. Veltman	Elektroschwache Wechselwirkung
1995	M.L. Perl, F. Reines	Entdeckung des τ -Neutrinos
1992	G. Charpak	Vieldraht-Proportionalzählrohr
1990	J.I. Friedmann, H.W.Kendall, R. Taylor	Entdeckung der Quarks in der Elektronstreuung an Protonen
1988	L.Lederer, M. Schwartz, J. Steinberger	Entdeckung des μ -Neutrinos
1984	C. Rubbia, S. van der Meer	W/Z Entdeckung und stochastische p -Kühlung
1980	J. Cronin, V. Fitch	CP-Verletzung im K^0 -Zerfall
1979	S.Glashow, A.Salam, S.Weinberg	Elektroschwache Wechselwirkung
1976	B. Richter, S. Ting	J/Ψ Entdeckung (c -Quark)
1969	M. Gell-Mann	Quark-Modell der Hadronen
1965	R. Feynman, J. Schwinger, S. Tomonaga	Quantenelektrodynamik
1963	E.P. Wigner	Symmetrien in der Teilchenphysik
1961	R. Hofstadter	Struktur der Nukleonen
1960	D. A. Glaser	Erfindung der Blasenkammer
1959	E. Segre, O. Chamberlain	Entdeckung des Antiprotons
1958	P. Tscherenkow, I. Frank, I. Tamm	Tscherenkow-Effekt
1957	C.N. Yang, T.-D. Lee	Paritätsverletzung in der schwachen Wechselwirkung
1951	J. Cockroft, E. Walton	Beschleuniger
1950	C. Powell	Photographische Methode zur Entdeckung der Mesonen
1949	H. Yukawa	Kernkraft und Vorhersage der Mesonen (Pionen)
1948	P.S.M. Blackett	Nebelkammer, Teilchen in der kosmischen Strahlung
1936	V.F.Hess, C.D.Anderson	kosmische Strahlung und Entdeckung des Positrons
1935	J. Chadwick	Entdeckung des Neutrons
1933	E. Schrödinger, P. Dirac	Quantenmechanik
1927	A. Compton, C. Wilson	Compton-Effekt, Nebelkammer

Tabelle D.1 Nobelpreise für Themen der Teilchenphysik